ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

ANNO CCLXXIX

1881-82

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME XII.

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1882

ATTI

DELLA

R. ACCADEMIA DEI LINCEI

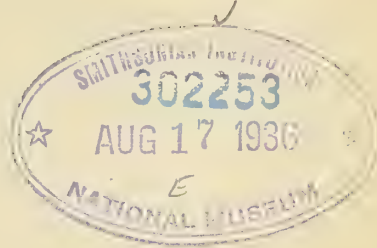
ANNO CCLXXIX

1881-82

SERIE TERZA

MEMORIE

DELLA CLASSE DI SCIENZE FISICHE, MATEMATICHE E NATURALI

VOLUME XII.

ROMA
COI TIPI DEL SALVIUCCI
1882

Sulle funzioni della vescica.

Ricerche fatte dal Socio corr. A. MOSSO e dal dott. P. PELLACANI

nel Laboratorio di fisiologia dell'Università di Torino.

Memoria letta nella seduta del 1 maggio 1881.

(Con tre tavole)

CAPITOLO I.

Metodo delle ricerche.

Abbiamo scelto la vescica come oggetto delle nostre indagini, perchè ci parve che quest' organo si prestasse meglio di ogni altro ad una serie di ricerche sulla fisiologia dei muscoli lisci; e perchè speravamo mercè l'applicazione del metodo grafico di acquistare nuove cognizioni intorno alle funzioni della vescica.

I metodi adoperati prima non erano sufficienti per studiare con esattezza la fisiologia di quest'organo e i rapporti che potevano esistere fra i suoi movimenti e quelli di altre parti del corpo.

Infatti, mentre alcuni osservatori misurarono le contrazioni della vescica mettendo in comunicazione il liquido contenuto nella medesima con una colonna di acqua di cui osservavano l'altezza in un tubo di vetro, ed altri si servirono di un manometro messo in comunicazione colla vescica piena di acqua tiepida, anche in questi ultimi tempi degli esperimentatori come Kowalevsky e Sokowin ([1]) si contentarono di scoprire la vescica e di guardare semplicemente coll'occhio i suoi cambiamenti di forma.

Il metodo di cui Budge si servì più comunemente consisteva nel fare un taglio sul vertice della vescica e di legarvi dentro un tubo graduato di vetro; poi legava l'uretra e riempiva la vescica con acqua fino ad una certa altezza del tubo graduato. Fissava questa buretta ad un sostegno, ed osservava quindi i movimenti della colonna liquida corrispondenti alle contrazioni della vescica.

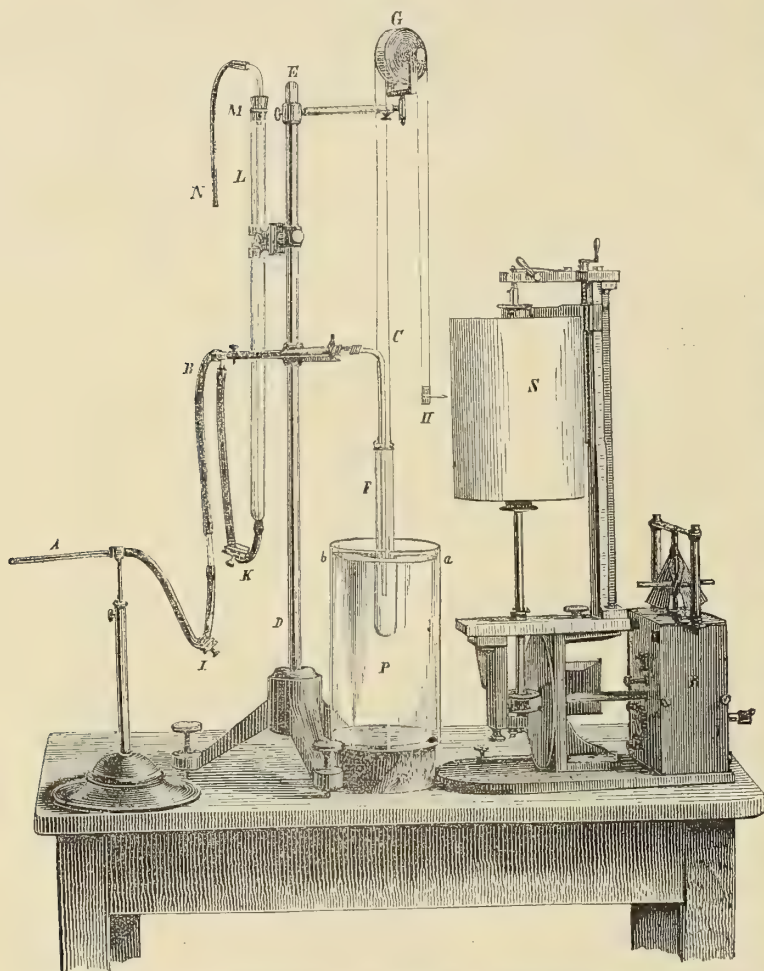
Nelle seguenti ricerche noi ci siamo serviti del pletismografo che ha il vantaggio di tenere costante la pressione e di registrare i più piccoli movimenti di contrazione e di rilasciamento della vescica ([2]).

Un catetere ordinario da donna (fig. 1) A trovasi in comunicazione con un tubo di vetro BC, il quale, piegandosi ad angolo retto, scende un centimetro, o due sotto il livello ab del liquido contenuto nel grande bicchiere P. Questo tubo discendente deve essere messo prima di ogni esperienza in posizione perfettamente verticale,

([1]) Sokowin, *Beiträge zur Physiologie der Entleerung und Zurückhaltung des Harns.* Hofmann und Schwalbe Jahresberichte. 1878. VI. Bb. III. Ab. pag. 87.

([2]) A. Mosso, *Sopra un nuovo metodo per scrivere i movimenti dei vasi sanguigni nell'uomo.* R. Accademia delle scienze di Torino, 1875.

e fissato solidamente in tale posizione al sostegno di ferro *DE*. Le viti di pressione che stanno alla base del sostegno servono a rendere più spedita questa prima parte dell' installamento. Un cilindretto di assaggio *F*, come quelli che si adoperano per le reazioni chimiche, a pareti molto sottili e sospeso con due fili di seta ad una carrucola *G*, è tenuto in equilibrio per mezzo di un pezzo di piombo *H*, che ha lo stesso peso del cilindretto *F*. Questo contrappeso porta una penna per scrivere sul cilindro affumicato, o sulla carta che si svolge da un rotolo sul chimografo di Ludwig.

Fig. 1.

Disposizione del pletismografo per scrivere i movimenti della vescica.

Il cilindretto *F* è così sospeso, che il tubo verticale *C* di vetro trovasi perfettamente nel suo asse, e può muoversi in alto, od in basso, senza toccare menomamente il tubo di vetro, che sta nel suo mezzo.

Per evitare che il cilindretto sia attirato per adesione contro il tubo che sta nel suo asse e si generi in questo modo una resistenza, è bene fare all'estremità inferiore del tubo verticale una piccola corona con ceralacca, oppure di imboccarvi semplicemente un piccolo anello di gomma elastica tagliato da un tubo di eguale diametro.

Dopo aver tirato in alto il cilindretto *F*, finchè il suo fondo tocchi l'estremità inferiore del tubo verticale, si mette sotto il vaso ad immersione *P* che per ora supponiamo pieno di acqua.

Il catetere *A* e la vescica dell' animale, o dell'uomo in cui trovasi introdotto, devono trovarsi nel medesimo piano *ab* del liquido nel grande vaso. La giusta posizione del livello noi la otteniamo facilmente disponendo il pletismografo e il cilindro, su cui si scrive, sopra un forte tavolo di ferro, che può abbassarsi ed elevarsi per mezzo di una vite; un tavolo da fotografo può anche servire per questo scopo.

Riempito esattamente con acqua il tubo *A I B C* e parte del cilindretto *F*, introduciamo il catetere in vescica ed apriamo la pinzetta *I*. Se ora succede una contrazione della vescica passerà nel cilindretto *F* una quantità di acqua corrispondente alla diminuzione di capacità della vescica. Il cilindretto *F* diventato più pesante per questa aggiunta di acqua deve affondarsi nel liquido del vaso sottoposto, finchè avrà spostato una quantità di liquido corrispondente all'acqua versatavisi dentro. Se supponiamo che succeda una dilatazione della vescica, rientrerà nella medesima un certo volume di acqua, ed il cilindretto reso più leggiero si innalzerà per un tratto corrispondente sopra il livello primitivo.

Immaginando che le pareti del cilindretto *F* non abbiano nè volume, nè peso, ed il bicchiere pieno di acqua *P* così largo che l'immergersi di tutto il cilindretto non alteri in modo sensibile il livello dell'acqua in esso contenuta, è chiaro che il cilindretto potrà scendere e salire, senza che succeda alcun mutamento nel livello dell' acqua, tanto in esso quanto nel vaso esterno *P*. Siccome però le pareti di un cilindretto di vetro per quanto sottili, hanno tuttavia un peso ed un volume determinato, così ne succederà che pel suo immergersi nell' acqua perderà tanto del suo peso, quanto pesa un eguale cilindro che avesse le pareti di acqua. Questa diminuzione di peso dal lato *F* di un sistema *F H* che sta in equilibrio sopra una carrucola *G* deve produrre uno spostamento. Il contrappeso *H* che è rimasto costante riparerà la perdita di peso del cilindretto *F* sollevando al di sopra del livello *a b* un peso di acqua nel cilindretto che sarà eguale a quanto ha perduto di peso il cilindretto nel suo affondarsi.

Sollevandosi in questa maniera una colonna di acqua sopra il livello *a b* deve prodursi un aumento di pressione corrispondente alla sua altezza dentro la vescica. Per evitare questo errore, che generalmente non è superiore ad una colonna di 2 centimetri di acqua, riempiamo il vaso *P* con un liquido che sia meno denso dell'acqua: cioè con alcool ed acqua. Ad ogni contrazione della vescica passerà nel cilindretto *F* una quantità corrispondente di acqua e questo si immergerà nell'alcool allungato del vaso *P*. Siccome però la densità di questo liquido è minore dell'acqua, il cilindretto *F* non sposterà solo nella sua discesa un volume di alcool eguale a quello dell'acqua contenuta nel suo interno, ma cercherà di affondarsi maggiormente, portando il livello dell'acqua che contiene sotto il livello *a b* dell'alcool esterno.

D'altra parte noi abbiamo già notato che il cilindretto nel suo immergersi va successivamente diminuendo di peso, secondo il noto principio di Archimede, e che il contrappeso, il quale rimane costante, cerca di riparare tale perdita col sollevare il livello *a b* interno dell' acqua sopra quello esterno dell' alcool, finchè siasi ristabilito l'equilibrio.

Noi abbiamo dunque in questo caso due forze, che agiscono in senso contrario; cioè la gravità che cerca di sommergere il livello dell'acqua sotto il piano *a b* dell'alcool, e la perdita di peso subìta dal cilindretto *F* nel suo immergersi che gli dà una spinta verso l'alto. Se queste due forze sono eguali, esse si compenseranno, ed il cilindretto *F* può scendere e salire per tutta la sua lunghezza rimanendo immutabile il livello *a b* dell'acqua in esso contenuta.

Per ottenere il giusto grado di densità necessario a tale scopo ci serviamo di un metodo empirico: facciamo cioè una mescolanza di acqua ed alcool assoluto se il

cilindretto ha delle pareti alquanto spesse. Il liquido avrà il grado voluto di densità quando si potrà riempire tutto il cilindretto di acqua e svuotarlo, ossia farlo affiorare fin presso il fondo, e tuffarlo fin presso il colletto, mentre che il livello *a b* dell'acqua contenuto nel medesimo rimane costante nello stesso piano *a b* del liquido esterno.

Per tutte le operazioni necessarie a riempire, o svuotare il cilindro, come per aggiungere, o togliere acqua dalla vescica, serve una buretta di vetro *L* graduata in centimetri cubi, che comunica per mezzo di un tubo di gomma chiuso con una pinzetta *K*, e di un tubo a *T* col tubo orizzontale *B C*. Per svuotare il cilindretto *F* o togliere acqua dalla vescica si aspira dal tubo *N* mentre la buretta è chiusa dal tappo *M* attraversato da un tubo di vetro: per aggiungere acqua basta aprire la pinzetta *K*.

Per le ricerche contenute in questa Memoria ci siamo regolarmente serviti di un cilindretto graduato e calibrato il quale conteneva 30 c.c. sopra 18 cent. di lunghezza: per cui ciascun centimetro misurato sulle ordinate dei nostri tracciati corrisponde a poco meno di 2 cent. cubici.

Si deve avere riguardo che la puleggia *G* sia molto sensibile, e così bene equilibrata che rimanga in equilibrio in qualunque posizione. L'apparecchio *R* fa muovere il cilindro *S* con velocità costante e variabile secondo il bisogno; non stiamo a descriverlo essendo un congegno di orologeria con regolatore Foucault che trovasi in tutti i laboratorî.

Quando volevasi esercitare una certa pressione sulla vescica per dilatarla, bastava di sollevare il tavolo su cui stava il pletismografo in modo che il livello *a b* diventasse superiore al piano della vescica e di aggiungere acqua colla buretta: oppure di abbassare l'animale, o l'uomo.

Per misurare esattamente la pressione sotto cui trovavasi la vescica nelle nostre esperienze ci servivamo di un livello ad acqua: formato da un semplice tubo di gomma col diametro interno di 5 mm. e lungo circa 1 metro, il quale portava alle estremità due pipette, ossia due tubi di vetro lunghi circa 20 centim. tirati in punta. Messo uno di questi tubi presso la sinfisi del pube, si metteva l'altro contro il vaso *P* e leggevasi sopra un doppio decimetro la differenza di livello esistente fra la vescica e il piano *a b*. Quest'altezza è la pressione sotto cui trovavasi la vescica.

I risultati da noi ottenuti in questo primo lavoro sulle funzioni della vescica dimostrano chiaramente i vantaggi che offre per simili studî uno strumento, il quale permette di impiegare pressioni relativamente piccole, e di conservarle costanti, per modo che le contrazioni anche debolissime della vescica non trovino alcun ostacolo ad estrinsecarsi.

Dubois [1] il quale tentò in questi ultimi tempi sotto la guida di Quincke di studiare le contrazioni della vescica per mezzo di un tubo di vetro lungo 150 centim. messo in comunicazione colla medesima per mezzo di un catetere, non è infatti riuscito ad osservare alcuno dei fenomeni più importanti che formano oggetto del presente lavoro.

Nelle ricerche di Dubois fatte esse pure sull'uomo nel capitolo intitolato, *Contrazioni della vescica* egli conchiude: « Ho cercato di produrre delle contrazioni

[1] P. Dubois, *Ueber den Druck in der Harnblase.* Deutsches Archiv für Klinische Medicin XVII. Bd. II e III Heft 1876, pag. 148.

vescicali, od in via riflessa per mezzo di aspersioni fredde dell'addome, o dei piedi, oppure direttamente per mezzo della faradizzazione, ed in nessuna maniera ho potuto eccitare delle contrazioni nella vescica ». Questa mancanza di risultati dove noi per mezzo del pletismografo otteniamo delle curve altissime e scritte direttamente dal liquido che esce dalla vescica, senza essere ingrandite, basterebbe senz' altro a convincerci della superiorità del nostro metodo.

Negli esperimenti fatti sugli animali noi ci siamo serviti di cagne, scegliendo quelle che erano di carattere più socievole ed affezionate. Per introdurre facilmente il catetere in vescica si faceva un taglio preliminare alla forchetta della vagina in modo che rimanesse bene scoperta l' apertura dell' uretra. Ottenuta in pochi giorni la guarigione, questi animali si prestavano comodamente ad ogni operazione. Ricordiamo fra le altre una cagnetta nera docilissima che ancora vive nel laboratorio su cui instituimmo la maggior parte delle nostre osservazioni.

Il desiderio di operare direttamente sulla vescica senza tener occupata la via dell'uretra per mezzo di un catetere, ciò che temevamo potesse complicare l'esperienza, ci fece concepire il progetto di studiare i movimenti della vescica per mezzo di una fistola vescicale. Benchè una semplice puntura della vescica basti per simili studî, abbiamo preferito di fare una fistola servendosi di una piccola cannula come quelle adoperate da Bernard per le fistole gastriche. Il metodo essendo quello stesso che seguesi generalmente per fare le fistole stomacali in un solo tempo non ci tratterremo a descriverlo.

CAPITOLO II.

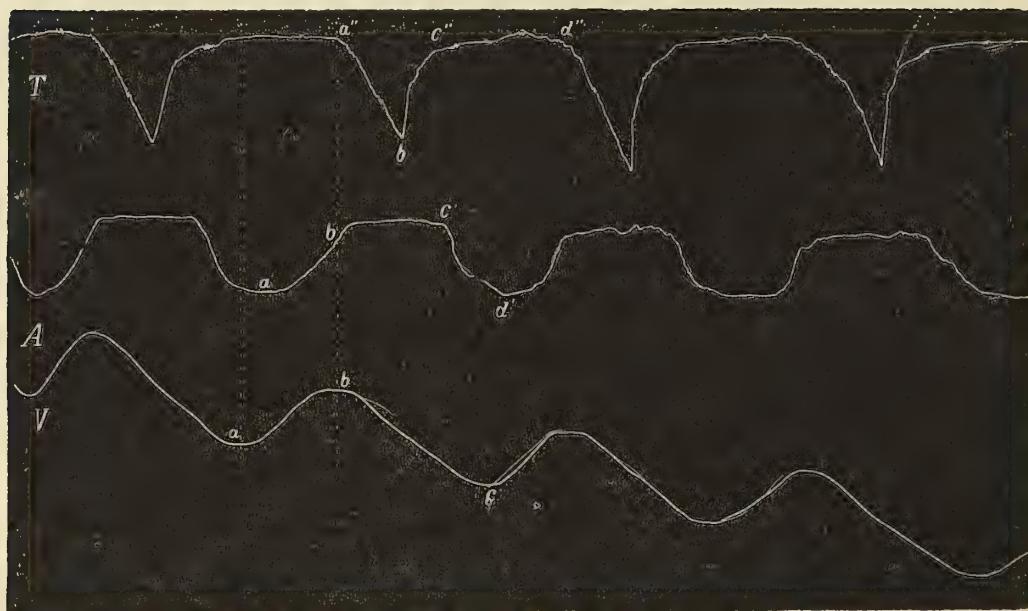
Movimenti della vescica per fatti psichici.

Movimenti passivi dovuti alla respirazione. — Dobbiamo innanzi tutto distinguere i movimenti proprî della vescica, quelli cioè che sono dovuti alla contrazione dei muscoli di quest' organo, da quegli altri che chiameremo passivi, i quali le vengono semplicemente trasmessi dalle contrazioni del diaframma e delle pareti addominali. Per far conoscere quale sia il tipo di questi movimenti passivi che entrano a complicare i tracciati dei movimenti proprî della vescica, quando le pareti addominali sono intatte, riferiremo subito un esempio preso da un grosso cane nel quale avevamo fatto 6 giorni prima una fistola vescicale sulla linea alba poco sopra la sinfisi del pube.

Il cane è in buonissimo stato, ed ha un appetito eccellente. Nell' apertura della cannuccia introduciamo un tappo con un tubo di vetro che per mezzo di un tubo di gomma fa comunicare la vescica col pletismografo. La pressione che distende la vescica è appena di 2 centimetri. Ossia il livello *a b* dell' acqua nel cilindretto è 2 centimetri più alto della sinfisi pubica. Il cane è profondamente tranquillo. Esso ha un pneumografo di Marey [1] stretto intorno al torace, e un timpano di Marey che poggia sopra l'addome 2 centimetri più in alto del prepuzio. Crediamo opportuno di far notare che servendoci del pneumografo di Marey si ottengono delle curve che

[1] Marey, *La methode graphique*, pag. 542.

chiameremo rovesciate, perchè quando ad esempio il torace si dilata, la penna del timpano registratore si abbassa e viceversa: cosichè nella linea *T*, *a'' b''* fig. 2 segnerà la durata della dilatazione toracica, e la linea *b'' c''* quella del suo restringimento. Sull'addome avendo applicato un timpano a membrana elastica con un bottone che toccava la pelle in vicinanza del prepuzio, il tracciato *A* rappresenta i movimenti quali sono realmente in natura cioè da *a'* in *b'* succede un'elevazione, e da *c'* in *d'* un abbassamento delle pareti addominali. Il tracciato scritto dal pletismografo è pure diritto: cioè quando esce acqua dalla vescica, la linea *V* si alza, e viceversa si abbassa quando succede una dilatazione di quest'organo. Tanto in questo come in tutti i tracciati successivi, noi abbiamo avuto cura che le curve stiano esattamente l'una sotto l'altra: per cui i punti presi sulla medesima linea verticale si coincidono per riguardo al tempo.

Fig. 2.

Rapporto fra i movimenti respiratorî del torace (linea *T*) e dell'addome (linea *A*) coi movimenti passivi della vescica (linea *V*).

Confrontando i tracciati della respirazione toracica *T* e addominale *A* con quello della vescica *V*, vediamo come sia precisamente in quest'ultimo dove incominciano a manifestarsi prima gli effetti della respirazione. Infatti quando non è ancora incominciato l'elevamento *a' b'* dell'addome, l'acqua incominciò già in *a b* ad uscire dalla vescica. Questo si spiega facilmente pensando che l'abbassamento del diaframma comprime le masse intestinali e quindi anche la vescica; e che l'effetto dell'abbassarsi del diaframma dovrà manifestarsi prima là dove è minore la resistenza, cioè nella vescica aperta e poscia sollevare le pareti addominali.

La dilatazione *a'' b''* della cavità toracica succede qualche tempo dopo la contrazione del diaframma. Il ritardo che osserviamo in questo tracciato non deve

attribuirsi a una cattiva applicazione dello strumento registratore; perchè il pneumografo erasi anzi tanto stretto da segnare anche le pulsazioni del cuore.

La leggera inclinazione che ha il tracciato *V* nella fig. 2 dipende dai movimenti proprî della vescica, che trovavasi in questo istante in un periodo di rilasciamento essendo succeduta poco prima una forte contrazione che aveva prodotto un'ascensione del tracciato.

Movimenti proprî della vescica. — I movimenti proprî della vescica si distinguono facilmente da quelli passivi dovuti alla respirazione, perchè sono meno rapidi. Le contrazioni della vescica più corte che noi abbiamo osservato, comprendendo il periodo di ascensione e di discesa della curva, durano da 6 a 7 secondi. In queste osservazioni sulla durata minima la vescica era scoperta e scrivevansi contemporaneamente al respiro. La velocità con cui si muove il cilindro nella fig. 2 essendo dunque troppo grande, d'ora innanzi ci serviremo di una velocità di rotazione del cilindro assai minore.

Ecco una esperienza fatta sul medesimo cane con fistola vescicale il 19 aprile 1881.

Il cane era disteso sopra un tavolo con uno asciugamani piegato a più doppi sotto il capo, che serviva da guanciale. L'animale era profondamente tranquillo. Passati i primi minuti, la respirazione divenne affatto superficiale e i movimenti passivi *a b c* della vescica più deboli. Noi adoperavamo tutte le cautele perchè non succedesse alcun rumore. Nel principio del tracciato in *G* (trac. 1, tav. I) entra l' inserviente Giorgio cui il cane era molto affezionato, perchè era lui che gli dava sempre da mangiare. Noi vediamo che comparisce subito una contrazione. Questa però è meno forte in confronto di un' altra prodottasi poco prima nell' istante in cui entrò nella stanza un' altra persona meno nota al cane e che per brevità non si riferisce.

In *P* (trac. 1, tav. I) uno di noi che aveva una mano leggermente poggiata sulla testa del cane per tenerlo immobile si ritira, lasciando che l' inserviente metta lui la mano al suo posto. Succede una nuova contrazione meno forte della prima.

Qualche altra volta nel medesimo cane i movimenti passivi della vescica sono meno distinti perchè la respirazione è più superficiale. Ecco un altro esempio (trac. 2, tav. I). L'animale giace disteso sul tavolo, coricato sul fianco destro; malgrado che tutti noi gli stiamo d'attorno, è profondamente tranquillo e pare col frequente socchiudere degli occhi che voglia addormentarsi. In *A* gli si tocca la coda. Succede poco dopo una contrazione. Il ritmo e la profondità dei movimenti respiratorî non cambiano. Quando il volume della vescica è presso a poco quello di prima, gli si tocca leggermente lo scroto in *B*. Succede una contrazione più forte della prima.

Non riproduciamo i tracciati dove si eccitò una sensazione dolorosa, tirandogli leggermente le orecchie, o mostrandogli del pane, perchè in questi casi si producevano delle contrazioni che avevano l'altezza di 16 ed anche di 20 centimetri. Sapendo che ogni centimetro del cilindretto galleggiante contiene circa 2 centim. cubici, la diminuzione di volume della vescica per effetto di queste contrazioni corrispondeva a 30, o 40 c.c. Gli stessi movimenti riflessi che abbiamo veduto prodursi nella vescica dei cani operati con fistola si producono nell'animale sano, ed esistono anche nell'uomo.

Esperienze fatte sulla donna. — Potendo parere che le esperienze sull'uomo siano più interessanti, noi tralasciamo le osservazioni fatte sulle cagne, e mettiamo

in principio di questo lavoro la parte che cronologicamente dovrebbe essere l'ultima, perchè fu solo dopo una lunga serie di esperienze sugli animali che ci accingemmo a confermare i risultati dei nostri studî sulla donna (¹).

Osservazione del 28 *giugno* 1881. — X. Y. è una ragazza di 18 anni, di professione cuoca, che venne accolta nel Sifilicomio per un' affezione cutanea. Essa si presta di buon grado alle nostre osservazioni e rimane tranquilla: ciò che è di grande vantaggio perchè la vescica si muove meno; e talora la linea decorre orizzontale, o con delle ondulazioni che corrispondono appena all'uscita di 2, o 3 centim. cubici durante 2, o 3 minuti. La ragazza giace coricata comodamente sul letto in posizione supina, colle gambe leggermente aperte ed alquanto sollevate.

Sono le 8,30 del mattino. La ragazza aveva fatto una leggera colazione un'ora prima. Da circa 15 minuti le abbiamo introdotto il catetere in vescica. Mentre essa è tranquilla in *T* (trac. 3, tav. I), le tocco leggermente il dorso della mano appoggiando le mie dita sopra le sue; succede subito una contrazione notevole. In *C* carico la macchina che fa girare il cilindro. A questo rumore che essa non sa cosa sia, succede un' altra contrazione meno rapida e meno alta. Mentre la vescica sta dilatandosi, le rivolgo la parola in *P*. Non abbiamo scritto sul memoriale cosa le fu detto, ma fu cosa di poca importanza, giudicando dalla leggera contrazione della vescica che ne seguì, come vedremo meglio fra poco parlando dell'attività cerebrale. In *R* essa pronuncia alcune parole per risponderci: succede una serie di contrazioni. La linea *T* segna i secondi. Ora poteva nascere il dubbio che queste curve non fossero dovute ad una contrazione delle pareti vescicali, ma che dipendessero da una contrazione delle pareti addominali, o del diaframma. Per rimuovere questa obbiezione abbiamo applicato in altre esperienze un timpano sull'addome a poca distanza dalla sinfisi pubica, in modo che stesse quasi sopra la vescica.

Nella scelta dei tracciati preferiamo quelli dove si vede l'effetto di cause relativamente deboli. Questo lo facciamo per due ragioni: 1° perchè così si rende meglio evidente la grande facilità della vescica ad eseguire dei movimenti riflessi; 2° perchè il dolore ed i forti eccitamenti producono delle contrazioni talmente elevate collo strumento di cui noi ci serviamo, che si presterebbero male alla riproduzione dei disegni per la loro ampiezza.

Altre osservazioni sui movimenti della vescica nella donna per fatti psichici. — Le seguenti osservazioni (trac. 4, tav. I) vennero fatte sopra una ragazza che aveva sofferto di tubercoli mucosi. La disposizione dell'esperienza è la stessa di prima. Ci assicuriamo che il timpano applicato sull'addome e quello a leva chiudano bene, per evitare ogni probabile errore.

Spieghiamo all'ammalata, che del resto era molto intelligente, e si prestava volentieri alle nostre esperienze, come noi desideriamo di vedere quale influenza abbia sulla vescica il leggero dolore prodotto da un pizzico nel braccio. Aspettiamo che sia tranquilla e quando la vescica pare del tutto immobile e il tracciato decorre orizzontale

(¹) Per questa serie di osservazioni siamo lieti di attestare la nostra gratitudine al sig. prof. Alberto Gamba, al sig. dott. Bongiovanni e al sig. dott. Silva che ci aiutarono ad installarci nel Sifilicomio e nelle carceri di Torino dove alcune ragazze ebbero la compiacenza di sottoporsi volentieri alle nostre esperienze.

uno di noi le dice in *A*, « adesso le do un pizzico »: ma non glielo dà; perchè noi ci eravamo proposti di sceverare l'effetto psichico della rappresentazione di un dolore, dall'effetto che realmente avrebbe il dolore stesso: vediamo infatti che poco dopo comparisce come fenomeno riflesso un'evidente contrazione *A B* della vescica. Il movimento della vescica non è accompagnato da alcun mutamento nel respiro come possiamo assicurarcene guardando la linea *R* della respirazione addominale scritta contemporaneamente.

Dopo, lei parla: si arresta subito il cilindro in *M*, ed abbiamo una contrazione *M M'* assai più forte della vescica. Aspettiamo che la penna sia ritornata all'altezza di prima, e poi si mette nuovamente il cilindro in moto. Poco dopo nel punto *N*, uno di noi le dice uno scherzo. La ragazza non si mosse: anche nel respiro non vi fu alcuna modificazione; e ciò nullameno per l' influenza di questo fatto psichico si produce un movimento riflesso della vescica ed abbiamo la contrazione *N Q* cui non corrisponde alcun mutamento nella curva della respirazione *R*.

I fenomeni osservati testè si possono considerare come esempî dei movimenti riflessi i più delicati che si producano nell'organismo: e corrispondono per l'uomo a quanto avevamo già osservato prima negli animali. Oltre al cane colla fistola di cui abbiamo riferito alcuni tracciati, avevamo una cagnetta nera che prestavasi molto bene per queste osservazioni. Quando si faceva qualche esperienza sopra di questo animale mettendogli un catetere nell'uretra in comunicazione col pletismografo, bastava semplicemente di guardarlo con occhio affettuoso, o fargli una carezza, anche senza toccarlo, perchè immediatamente si producesse una contrazione della vescica.

Movimenti della vescica nella donna durante l'attività cerebrale. — L'azione dei fenomeni psichici sui movimenti riflessi della vescica si manifesta pure molto distinta nel lavoro della mente.

Il 30 giugno facciamo un'esperienza sopra certa Margherita X. La ragazza è coricata sul letto col catetere in vescica; essa giace in posizione supina colle gambe leggermente divaricate. Oltre all'orina che vi era già in vescica, sotto la pressione di 8 centimetri vi penetrano ancora circa 120 c. c. di acqua alla temperatura della stanza che era circa 25° *C.*

Il rumore che si produce caricando l'orologio che fa girare il cilindro affumicato eccita anche in questa ragazza una contrazione della vescica. Poco dopo quando le si rivolge la parola senza che essa risponda, succede un'altra contrazione, e finalmente ha luogo una contrazione più forte delle due precedenti, quando uno di noi espone alla paziente lo scopo dell'esperienza, dicendole che si tratta di fare delle moltiplicazioni a memoria per vedere cosa succede nella vescica.

In *R* (trac. 5, tav. I), le si domanda quante uova ci vogliono per fare 7 dozzine. Guardando il tracciato noi vediamo come il ritmo e la profondità dei movimenti passivi della respirazione rimangono immutati. Durante 8, o 9 respirazioni pare che la nostra domanda non debba avere alcun effetto: poi incomincia una leggera elevazione, ed il movimento riflesso della vescica compare completo elevandosi la curva fino in ω.

Non riproduciamo per brevità il tracciato della respirazione addominale, perchè avremo subito dopo occasione di mostrare, che delle contrazioni assai più forti si

possono produrre volontariamente, senza modificare la forza ed il ritmo dei movimenti respiratorî. Del resto abbiamo dovuto persuaderci fino dal principio, che era inutile di fissare l'attenzione sullo stato delle pareti addominali e del respiro, perchè i movimenti passivi della vescica, quelli che sono dovuti ad una contrazione del diaframma, o delle pareti addominali danno un tracciato molto più rapido nella parte ascendente. Basta un po' di pratica per riconoscere immediatamente il profilo di un movimento passivo da quello di una contrazione propriamente detta.

Cessato il lavoro mentale, la vescica ritorna lentamente al volume di prima. Poco dopo in *S* (trac. 6, tav. I), le si propone un'altra moltiplicazione a memoria 13 × 12. La ragazza non essendo molto abituata ad eseguire tali operazioni di aritmetica incontra in tutti questi calcoli una certa difficoltà per cui talora dobbiamo aiutarla. In questo ultimo caso per es. le si disse che 10 dozzine facevano 120 e che lei non doveva far altro che aggiungere ancora 3 dozzine a 120. Malgrado il nostro soccorso questo lavoro mentale è accompagnato da una contrazione abbastanza forte della vescica, come risulta dal tracciato *S* ω. Appena finita l'operazione noi la preghiamo in ω di restare tranquilla e la vescica ritorna rapidamente al volume primitivo.

Movimenti volontarî della vescica. — Un problema che ci interessava moltissimo per l'importanza che esso ha per la fisiologia generale e per il meccanismo della emissione dell'orina era di sapere se le fibre muscolari della vescica possono contrarsi per mezzo della volontà, o se i suoi movimenti sono puramente riflessi nel senso stretto della parola.

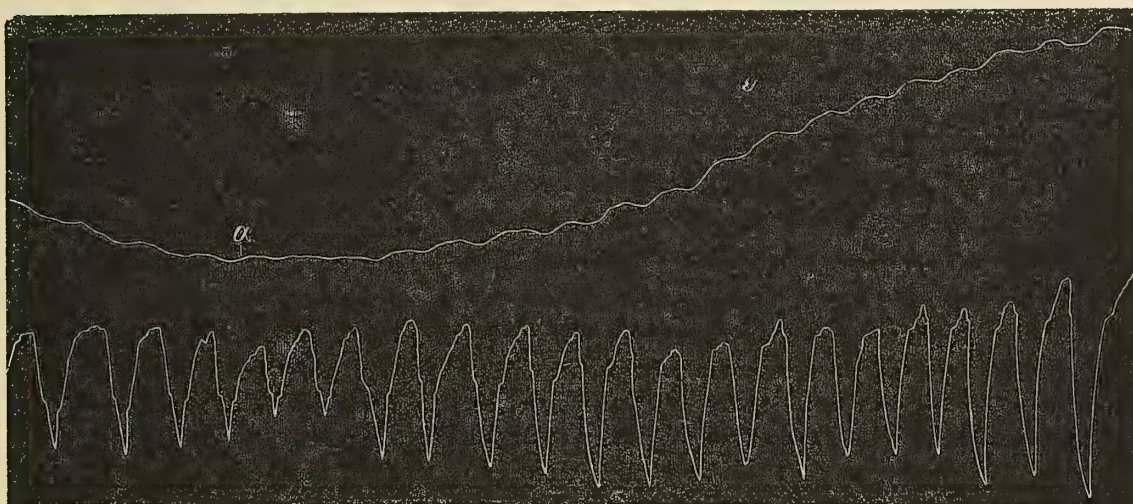
Per risolvere questo problema, noi abbiamo spiegato ad una ragazza che si trattava di vedere, se essa poteva produrre una contrazione della vescica senza modificare il respiro.

La cosa non era senza difficoltà, perchè quando ci si dice di fare un leggero sforzo per contrarre la vescica, tutti ci serviamo involontariamente della pressione addominale e molti arrestano addiritura il respiro. Per ovviare a questo inconveniente si applicava un pneumografo sull'addome, poco sopra la sinfisi del pube in corrispondenza della vescica e quando volevasi fare un'esperienza, uno di noi cominciava ad alzare ed abbassare la mano seguitando il ritmo normale del respiro dell'ammalata: quando erano bene avviati i due movimenti ed era cessato il primo effetto psichico di queste battute, si diceva alla paziente di contrarre la vescica e di continuare il respiro secondo le battute senza modificarlo in alcuna maniera.

Il 30 giugno facciamo un' esperienza sulla ragazza X. Aspettiamo che sia bene tranquilla e poscia la facciamo respirare secondo le battute; succede un primo riflesso della vescica per questo fatto psichico. Questa parte del tracciato non venne riprodotta. Quando la respirazione era bene avviata e la vescica sembrava immobile, le si dice in α (trac. 7, tav. II) di fare un leggero sforzo come per emettere l'orina, ma senza modificare il respiro, o spingere coll'addome. Succede poco dopo una contrazione della vescica. Non si può dire in questo caso che la paziente siasi servita della pressione addominale, perchè noi vediamo nel tracciato sottostante *R* che i movimenti respiratorî si conservano regolari, benchè siano divenuti leggermente più profondi. In ω si dice di sospendere la contrazione. La linea superiore *T* segna il tempo in secondi.

La stessa contrazione volontaria della vescica si vede nella fig. 3. In α si dice alla ragazza di contrarre la vescica senza modificare il respiro. Il movimento volontario della vescica tanto in questa quanto in molte altre esperienze non può venire messo in dubbio. Osservando il decorso regolare del tracciato respiratorio, crediamo si possa escludere ogni influenza della pressione addominale sulla contrazione volontaria della vescica.

Abbiamo già avvertito come si modifichi involontariamente il respiro tutte le volte che ci proponiamo di contrarre la vescica. Questo è un fenomeno di arresto identico a quello che osservasi nel respiro quando la nostra attenzione viene improvvisamente chiamata sopra un problema qualsiasi, o quando si produce un' impressione dolorosa in un punto qualsiasi del corpo. Anche nel sonno quando veniamo toccati, o si produce un suono, osservammo un arresto dei movimenti respiratorî od una inspirazione più profonda. La modificazione del respiro osservata nei casi precedenti non è coordinata allo scopo di far contrarre la vescica, ma è solo un fenomeno concomi-

Fig. 3.

Contrazione volontaria della vescica mentre si scrivono contemporaneamente con un pneumografo di Marey i movimenti dell'addome.

tante, che noi possiamo eliminare lasciando persistere la contrazione volontaria della vescica. Per giungere a questo risultato dovemmo impiegare l'artificio di regolare prima colla misura di un cenno della mano i movimenti respiratorî; quando l'attenzione era fissa nel riprodurre un determinato ritmo coi muscoli respiratorî, abbiamo dato un secondo ordine, quello cioè di contrarre la vescica ed ottenemmo una seconda contrazione.

Siccome però è difficile di respirare per un certo tempo con un ritmo volontario senza modificare la proporzione dei gas contenuti nel sangue, così ne avviene che dopo un certo tempo quando si arresta il respiro, se questo fu di poco più frequente, o più forte, ne succede un leggero grado di apnea. Nel tracciato 7, tav. II, noi abbiamo voluto riprodurre un tracciato dove questo effetto è più evidente. Perchè

non si creda che la contrazione osservata dopo il cenno α sia dovuta alla modificazione del respiro, diremo che già prima di α la paziente aveva incominciato a respirare secondo il cenno della mano. Del resto i movimenti della respirazione più frequenti e più profondi non producono una contrazione della vescica, ma invece una dilatazione, come vedremo nel capitolo in cui studieremo l'influenza del respiro.

Osservando questi tracciati noi abbiamo subito dovuto domandarci, se questa contrazione sia realmente dovuta all'impero della volontà, o se non sia piuttosto una semplice contrazione riflessa dovuta ad un fatto psichico.

Noi crediamo di no: e lo proveremo più tardi parlando della emissione dell'orina, dove dimostreremo che per mezzo della volontà, indipendentemente dalla pressione addominale possiamo produrre una contrazione tale della vescica da svotarla del suo contenuto. Ora noi sappiamo che i movimenti psichici prodotti dalla semplice attività cerebrale, senza parlare delle fortissime emozioni, non sono mai così forti da far spandere l'orina.

Non vogliamo entrare nella questione trascendentale, se esistano dei movimenti volontarî; anche ammettendo che tutti i movimenti del nostro organismo siano riflessi, per noi ci basta di aver stabilito che possiamo volendolo contrarre la vescica, senza servirci della pressione addominale: e questo costituisce nel linguaggio ordinario la contrazione cosciente e volontaria di un muscolo liscio.

CAPITOLO III.

Influenza della pressione sanguigna sui movimenti vescicali.

La contrazione della vescica e l'aumento della pressione sanguigna sono nel maggior numero dei casi due fenomeni concomitanti. — Nel precedente capitolo abbiamo veduto che la vescica tanto nell'uomo, quanto negli animali eseguisce colla più grande facilità dei movimenti riflessi per tutte le cause che producono un mutamento psichico. La rassomiglianza che presenta questo fenomeno coi movimenti di contrazione e di rilassamento dei vasi sanguigni, che uno di noi aveva già osservato nell'uomo (¹) servendosi del pletismografo applicato all'antibraccio, ci condusse a studiare prima d'ogni altra cosa il rapporto che esiste fra i movimenti riflessi della vescica e la pressione sanguigna. Queste esperienze ci parevano tanto più interessanti in quanto che nell'animale curarizzato e colla vescica scoperta potevamo rimuovere l'azione dei muscoli addominali, e del diaframma, mettendoci al sicuro da ogni movimento passivo.

I tracciati che abbiamo riprodotto nel precedente capitolo bastavano già per sè soli a stabilire che in un grande numero di circostanze vi deve essere un parallelismo completo tra i movimenti della vescica e le variazioni nello stato della pressione sanguigna. Infatti avendo osservato che esiste una contrazione della vescica per le medesime cause psichiche, che altre esperienze antecedenti fatte da uno di noi,

(¹) Mosso, opera citata e *Circolazione del sangue nel cervello dell' uomo.* R. Accademia dei Lincei, Memorie, serie 3ª, vol. V.

avevano dimostrato produrre una contrazione dei vasi la quale genera una pressione più elevata, ne veniva come conseguenza logica, che questi due fenomeni fossero contemporanei. Questo venne infatti pienamente confermato dalle osservazioni che esporremo fra poco. Ma assai più interessante per lo studio delle funzioni della vescica era per noi il problema di cercare se quest' organo sia capace di eseguire delle contrazioni anche quando il manometro non rivela un mutamento nelle funzioni dei vasi sanguigni, o del cuore. È di qui che incominciamo le nostre osservazioni.

Scegliamo una delle esperienze che abbiamo fatto sulla pressione sanguigna, servendoci dell'apparecchio di Ludwig a carta continua e riferiremo successivamente le osservazioni che abbiamo fatte sopra un medesimo animale. Il metodo descrittivo applicato in questo modo ad una sola serie di esperienze ha il vantaggio di risparmiarci delle inutili ripetizioni, e permette al lettore di seguire più da vicino tutte le particolarità che possono osservarsi in un medesimo cane, servendo le osservazioni precedenti come di paragone per le successive.

Movimenti osservati nella vescica scoperta. — 16 febbraio 1881 (tracciato 8, tav. II). Un grosso cane adulto del peso di circa 18 kilogrammi viene curarizzato; si prepara la carotide e si mette in comunicazione con un manometro a mercurio piegato a *U*. Dopo si apre la cavità addominale sulla linea alba, si scopre la vescica e si introduce nel collo della medesima in vicinanza della prostata una cannula per farla comunicare col pletismografo. La pressione che distende la vescica ossia la differenza di altezza fra il livello *ab* dell'acqua nel cilindretto galleggiante e il vertice della vescica è di 8 centim. Un pneumografo di Marey stretto intorno al torace e messo in comunicazione con un timpano a leva scrive sulla carta senza fine i movimenti respiratorî, linea *R*. La linea *T* rappresenta il tempo scritto in secondi.

Tralasciamo il tracciato scritto durante i primi 10 minuti ed incominciamo dall' istante in cui dopo finite le prime manualità la curva della vescica decorre regolare con delle leggiere ondulazioni.

L'animale respira spontaneamente: siccome rimane abbastanza immobile non crediamo opportuno di fargli un' altra injezione di curaro nella vena giugulare. Dopo una leggera contrazione *A* (trac. 8, tav. II) di cui non si conosce la causa: in *B* compare un' altra contrazione assai più forte che venne segnata sulla carta mentre svolgevasi il fenomeno, col nome di contrazione spontanea. Ciò vuol dire che questo movimento della vescica non ci parve in quell' istante, essere in relazione coi fenomeni del mondo esterno. Intorno a noi non si era fatto alcun rumore; nessuno degli astanti aveva cambiato di posizione; l'animale pure non erasi mosso. La vescica ampiamente scoperta essendo al sicuro da ogni azione dei muscoli addominali, noi dobbiamo considerare questo tracciato come tipico per le contrazioni proprie della vescica. Le tre linee (*R* della respirazione, *P* della pressione e *V* della vescica) si corrispondono esattamente: nel riprodurne i disegni come abbiamo già avvertito, vennero fatte le correzioni necessarie per far scomparire lo spostamento che esse presentavano sulla linea verticale. Crediamo inutile soggiungere che nell'atto dell' esperienza trattandosi di forti escursioni torna spesso incomodo di avere le penne esattamente l'una sotto l'altra e che si rimedia a questo spostamento segnando di quando in quando i punti di ritrovo.

Un esame, anche superficiale, di questo tracciato, basta per dimostrare che la contrazione *B* non dipende nè dal mutamento del respiro *C*, nè dall'aumento della pressione *D*, o dalla frequenza alquanto maggiore dei battiti cardiaci, perchè tutti questi fenomeni compaiono nello stesso tempo. Anzi la contrazione della vescica precede alquanto i fenomeni che si osservano nel sistema circolatorio e nei movimenti del respiro.

La denominazione di *spontanea* che applichiamo in questo caso alla contrazione della vescica e ai mutamenti del respiro e della pressione sanguigna che si osservano contemporaneamente, è un' espressione vaga, e con essa intendiamo solo di avvertire che ne ignoriamo la causa. Ma un animale in cui si apra l'addome per scoprire la vescica, il quale tiene una carotide in comunicazione col manometro, ed ha una cannula nella trachea, trovasi in condizioni relativamente così gravi, che non dobbiamo meravigliarci se producesi senza altre cause esterne un improvviso movimento psichico col quale esso cerchi di rimuovere l' impressione dolorosa di un simile stato.

Questo mutamento non può quindi paragonarsi a quelle variazioni spontanee che uno di noi osservò prodursi nelle funzioni del cuore e dei vasi sanguigni di chi dorme e che vedremo ripetersi nel seguente capitolo, studiando il tono della vescica nel sonno prodotto dal cloralio. È nel sonno profondo dove possiamo meglio provare l'esistenza di movimenti della vescica che senza alcun dubbio mancano di una relazione immediata coi fenomeni del mondo esterno.

Esistono delle contrazioni vescicali che non sono accompagnate da alcun mutamento nella pressione sanguigna e neppure del respiro. — Vediamo prima un esempio di queste contrazioni e dopo ci fermeremo a ragionare sul loro significato. È sempre il medesimo cane, di cui continuiamo senza interruzione a descriverne il tracciato. Dopo che fu compiuta la forte contrazione *B* (trac. 8, tav. II) e che il volume dell'acqua contenuta in vescica era ritornato in *C* al valore primitivo, compaiono successivamente tre contrazioni più piccole. Nella riproduzione del tracciato vennero omessi circa 10 secondi della curva ed incominciamo col trac. 9, tav. III, a riprodurre la parte discendente della contrazione *E*: poscia per intero le contrazioni *F* e *G*, ed una parte della debolissima contrazione *H*.

Notiamo che nei tracciati *R* e *P* manca ogni modificazione nel respiro e nella pressione, mentre si compie il movimento della vescica in *F*. In *G* mentre succede un'altra contrazione, si nota una modificazione leggerissima del respiro e quasi nessuna della pressione. Succedono solo 2 o 3 movimenti respiratorî più rapidi ed il cuore fa esso pure due o tre pulsazioni alquanto più frequenti. In *H* non vi è nulla di notevole nella pressione e nel respiro, mentre succede un leggerissimo movimento di contrazione.

Corrispondono queste contrazioni a quelle che abbiamo già osservato nell'uomo e nei cani colle pareti addominali intatte? O sono forse prodotte dall' irritazione che il raffreddarsi della vescica e l'evaporazione possono indurre nei muscoli di quest'organo? Le precauzioni che noi abbiamo preso onde evitare che l'evaporazione e il raffreddamento potessero diventare per se stessi causa di eccitamento e di variazioni nello stato della vescica ci fanno escludere la seconda di queste probabilità per attenerci alla prima.

Vedremo più tardi quando studieremo l'influenza dei centri nervosi sulle funzioni della vescica, che simili movimenti possono esistere anche quando è distrutto il midollo spinale e sono tagliate le comunicazioni coi ganglî mesenterici. Queste esperienze che esporremo in seguito, mettendo fuori d'ogni dubbio l'esistenza dei movimenti così detti *automatici,* ci dispensano per ora da ogni considerazione intorno alla natura di tali contrazioni. Questo nostro silenzio è tanto più necessario in quanto che non abbiamo qui alcun indizio per accertare se le contrazioni *F G* ad esempio, siano dovute all'azione del cervello, o del midollo spinale, o del simpatico o delle pareti vescicali per se stesse.

Se riteniamo che vi siano delle contrazioni della vescica le quali si possano considerare come spontanee ed automatiche, o perchè sono indipendenti dai centri nervosi, o solo perchè nell'atto della loro produzione non siamo in grado di scorgere dei mutamenti nelle funzioni degli organi vicini capaci di spiegarcene l'origine, noi veniamo indirettamente ad eliminare il dubbio che le contrazioni della vescica siano prodotte da una contrazione dei vasi sanguigni e da un aumento della pressione.

La vescica può anche contrarsi mentre la pressione diminuisce. — Dalle esperienze fatte possiamo asserire che la vescica non solo è capace di contrarsi mentre rimane costante la pressione, ma che essa può contrarsi anche mentre la pressione diminuisce.

Le esperienze più semplici per dimostrare questo fatto sono quelle dove abbiamo irritato il nervo vago producendo un rallentamento, od un arresto del cuore. Qui la contrazione della vescica e l'abbassarsi della pressione succedevano contemporaneamente.

Non riferiamo un esempio di questi tracciati per ovviare l'obbiezione che si potrebbe fare in seguito alle ricerche del prof. Oehl, su cui avremo più tardi occasione di intrattenerci, che irritando il nervo vago possiamo agire per mezzo delle sue terminazioni periferiche direttamente sulla vescica.

Nel medesimo cane che diede i tracciati precedenti tagliamo il vago destro: le pulsazioni del cuore diventano più frequenti, la pressione sanguigna aumenta leggermente. In *I* (linea *P* trac. 10, tav. III) vediamo che la pressione diminuisce gradatamente: non conosciamo la causa di questo abbassamento: vediamo però che poco dopo la vescica incomincia a contrarsi in *L* e che la sua contrazione continua mentre diviene successivamente maggiore l'abbassamento della pressione sanguigna *IK.* Viceversa si constata in *M* un rilassamento della vescica, mentre la pressione va leggermente aumentando. I mutamenti del respiro sono così poco notevoli e talmente in ritardo, che non possono considerarsi come la causa delle variazioni che osserviamo nella pressione sanguigna e nella vescica.

Crediamo inutile riferire altri esempî in appoggio della asserzione che la vescica può contrarsi indipendentemente dalle variazioni che succedono nella pressione del sangue, e quindi anche durante un abbassamento della medesima.

Dopo le ricerche fatte sull'utero da Spiegelberg, Oser, Schlesinger, Röhrig ed altri i quali sostennero che la chiusura dell'aorta produce una contrazione dell'utero, potrebbe nascere il dubbio che le contrazioni della vescica dipendano da una contrazione dei vasi che si ramificano nei muscoli di quest'organo. Sebbene riteniamo

che la diminuzione nell'afflusso del liquido nutrizio possa per sè solo indipendentemente da qualsiasi altra causa eccitare una contrazione delle pareti vescicali: non possiamo ammettere che questo sia il meccanismo con cui si producono generalmente le contrazioni della vescica. Noi vedremo fra poco che il tempo il quale trascorre da un eccitamento psichico alla comparsa di una contrazione della vescica è troppo breve per ammettere una simile ipotesi. Il fatto che dopo un eccitamento può comparire la contrazione della vescica visibilmente prima di un aumento della pressione sanguigna, basta per sè solo a rendere insostenibile una simile ipotesi. Lasciando in disparte ogni nesso di causa ad effetto fra la contrazione dei vasi vescicali, e la contrazione delle pareti muscolari di quest'organo, ci siamo preoccupati di cercare se esistevano come fatti contemporanei la contrazione dei vasi unitamente a quella dei muscoli vescicali. Le indagini che abbiamo fatto in proposito non diedero alcun risultato positivo.

E fu egualmente infruttuosa una lunga serie di esperienze che abbiamo fatto per ricercare i nervi ed i centri vasomotori della vescica.

Movimenti della vescica che si producono durante i fatti psichici. — Evidentissimi e costanti sono invece i movimenti della vescica che sono in rapporto colle cause esterne. Basta che si gridi, che si tocchi l'animale, o si faccia un rumore qualsiasi, perchè immediatamente si contragga la vescica. Delle moltissime osservazioni di cui sono tutti pieni i fogli delle nostre esperienze preferiamo di riprodurre alcuni tracciati presi dal cane precedente prima che si tagliasse un nervo vago.

In *A* faccio un grido in vicinanza dell' orecchio del cane (trac. 11, tav. IV). Succede una forte contrazione della vescica, e un leggiero aumento della pressione sanguigna con sistoli più frequenti del cuore. I movimenti del respiro divengono pure più celeri. Tutti questi fenomeni appaiono contemporaneamente e durano un tempo presso a poco eguale. Succeduta una forte contrazione della vescica nella quale sono usciti circa 10 c. c. di liquido in meno di 10 secondi, ne segue un rilasciamento. Quando la curva sta avvicinandosi all'ascissa, in *D* uno di noi grida nuovamente. Si ripete la stessa serie di fenomeni accennata precedentemente; cioè una contrazione della vescica (però alquanto più debole della prima in *A*). Un leggerissimo aumento della pressione sanguigna con frequenza maggiore dei battiti cardiaci. Movimenti del respiro più piccoli e più rapidi.

Il tracciato continua a svolgersi (trac. 12, tav. IV): pochi secondi dopo, in *B* batto colla nocca del dito indice sopra il tavolo su cui era legato l'animale. Succede un'altra contrazione accompagnata da tutti i fenomeni accennati nelle precedenti osservazioni per la pressione ed il respiro. In *T* uno di noi tocca l'animale alle gambe. Quantunque il cane fosse leggermente curarizzato e si fosse fino a questo momento conservato immobile, si ottiene una forte reazione della vescica, della pressione sanguigna e del respiro. L'impressione di questo toccamento fu assai più forte delle eccitazioni precedenti, perchè noi vediamo succedersi una serie di contrazioni nella vescica: alle quali corrispondono del resto delle modificazioni nella curva del respiro e della pressione sanguigna.

Nel decorso di questa esperienza che durò circa un' ora tagliammo il nervo vago a destra. Questa operazione ebbe una vivissima influenza sulla vescica che

rimase lungamente contratta. Quando la vescica ritornò al volume di prima, irritammo il nervo vago con correnti deboli applicate sul moncone periferico, o con trazioni applicate sul moncone centrale, e con tutte queste operazioni si ottenne un restringimento della vescica. Notiamo come interessante il fatto che la contrazione della vescica si produsse anche nei casi in cui per una trazione del moncone periferico, o per una irritazione elettrica debolissima del vago, non si aveva un'azione manifesta sulle sistoli del cuore.

Riteniamo quasi inutile dopo i tracciati precedenti di avvertire che le irritazioni fatte con correnti indotte toccando il muso, l'occhio, la lingua, e le ramificazioni di un nervo sensibile qualunque, diedero sempre tanto in questo come in tutti gli altri cani senza alcuna eccezione, un forte restringimento della vescica.

Dopo tutte queste osservazioni sempre concordanti fra di loro non dubitiamo di affermare *che un movimento psichico e qualunque eccitamento dei nervi sensibili è capace di produrre una contrazione della vescica.*

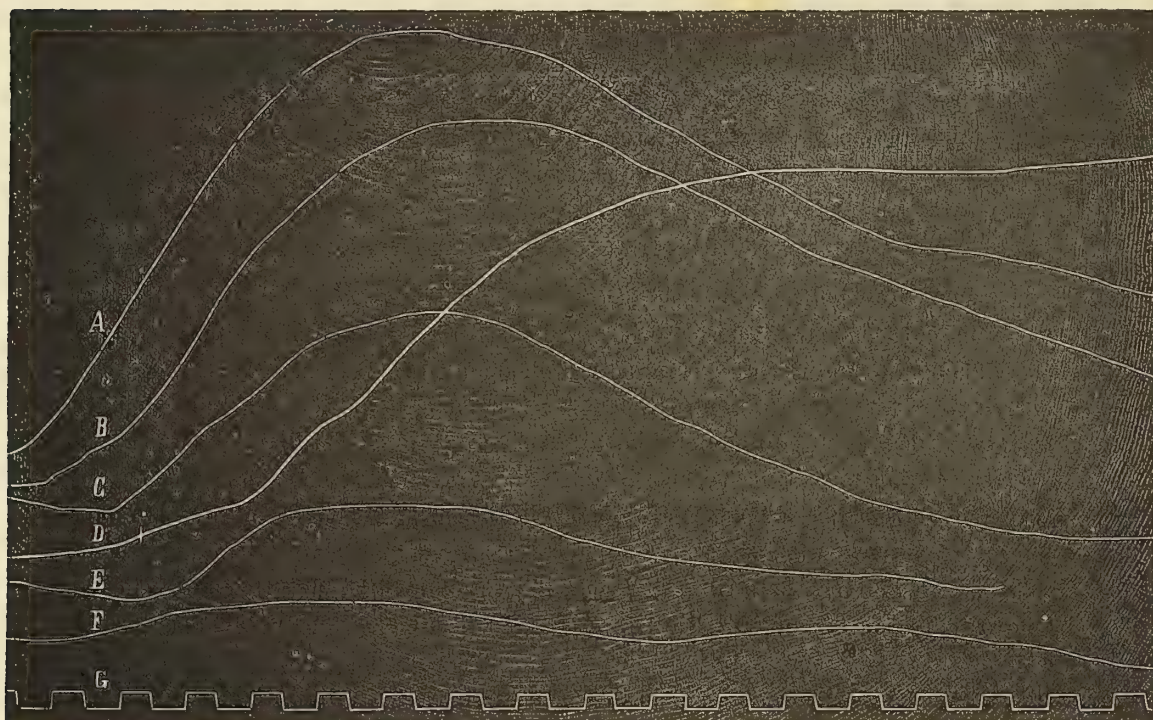
La fisiologia aveva già raccolto molte osservazioni le quali dimostravano che potevasi in vario modo produrre una contrazione della vescica. P. Bert l'aveva ottenuta nell'animale curarizzato irritando il nervo ischiatico, il mediano e l' infraorbitale. Basch e Meyer in seguito all' irritazione del nervo crurale: noi vediamo ora che gli animali anche profondamente curarizzati in modo da essere incapaci di respirare e di muoversi per qualsiasi eccitamento, reagiscono con forti movimenti della vescica a tutti gli eccitamenti esterni.

Il curaro non distrugge la sensibilità. L' udito, la vista e l' olfatto, il gusto, tutti i sensi di un animale si conservano illesi sotto l' influenza di questo veleno. Anche quando un animale si trova così profondamente avvelenato che morirebbe se si arrestasse la respirazione artificiale, senza poter reagire in alcuna maniera ed eseguire il benchè minimo movimento, basta di avvicinarglisi, di minacciarlo accostandogli le mani agli occhi, perchè immediatamente si produca una contrazione della vescica. Le grida od anche semplicemente il parlargli vicino all'orecchio dopo un periodo di silenzio, un contatto in qualsiasi parte del corpo, l'azione del freddo, un urto anche leggiero dato al tavolo colla nocca delle dita, è tutto infine ciò che può agire sui sensi, o sull' intelligenza di questo animale che ha l' apparenza di essere morto, bastano per produrre una forte contrazione della vescica. I movimenti di quest' organo ci rivelano in modo straziante che la sensibilità e la coscienza sono conservate intatte nell' avvelenamento col curaro. In seguito ad altre esperienze dove abbiamo ancora osservato una contrazione della vescica quando le forze dell'animale e la sensibilità erano così esaurite che non producevasi più un aumento della pressione sanguigna anche per forti eccitamenti delle labbra, delle orecchie o delle gambe, non dubitiamo di affermare che la vescica sia un estesiometro assai più sicuro della pressione sanguigna e non inferiore all'iride stessa.

CAPITOLO IV.

Ricerche sul tono della vescica.

Varie forme di contrazione dei muscoli della vescica. — Un fatto che si impone subito alla nostra attenzione quando paragoniamo una serie di contrazioni della vescica, che si succedono l'una all'altra, è la mancanza di un tipo uniforme nel loro profilo. Indipendentemente dall' altezza e dalla durata, vi è sempre nel periodo di ascensione della curva, o nel periodo della discesa, qualche variante che leva ogni simmetria nelle contrazioni. Basta sovrapporre parecchi tracciati di contrazioni vescicali scritte l'una dopo l'altra, come venne fatto nella fig. 4, per dimostrare la verità

Fig. 4.

Varie forme di contrazioni della vescica ottenute nel medesimo cane in una esperienza che durò meno di mezz' ora.

A Contrazione prodottasi perchè si gridò forte vicino al cane
B Contrazione spontanea
C Altra contrazione prodottasi dopo *A* per avere nuovamente gridato forte vicino all'animale
D Irritazione del nervo vago
E Contrazione spontanea
F Contrazione spontanea
G Tempo in secondi

di questa asserzione. Dai tracciati riferiti in questa figura risulta eziandio che la curva di contrazione dei muscoli lisci, i quali costituiscono le pareti della vescica, rassomiglia alla curva di contrazione dei muscoli striati in un periodo della loro stanchezza.

Colla differenza che già conoscevasi da lungo tempo che la durata della contrazione dei muscoli lisci è immensamente più lunga di quella dei muscoli striati. Infatti le più rapide contrazioni che noi abbiamo osservato nella vescica duravano per lo meno 6 a 7 secondi come si vede nella curva *F* della figura 4.

Per quanto sia grande la differenza riguardo al tempo, che passa fra le contrazioni dei muscoli lisci riferite nella fig. 4, e quelle dei muscoli striati, queste si possono ancora a primo aspetto considerare come delle vere contrazioni. Quando però il raccorciamento raggiunge un grado estremo di lentezza, e lentamente scompare: per modochè invece di avere sull'ascissa dei minuti secondi, si hanno dei minuti primi: e ciascuna curva ne abbraccia parecchi: in questi casi parrebbe più conveniente parlare di un *cambiamento di tono*. Nello stato attuale delle nostre cognizioni non abbiamo alcun motivo per separare le contrazioni propriamente dette dai cambiamenti di tono nei muscoli della vescica: e possiamo ritenere questi due nomi come espressioni dei gradi differenti di un medesimo processo.

Forse ci allontaniamo alquanto dal concetto che si ha generalmente del tono nei muscoli striati: ma non si può fare altrimenti trattandosi di fibre le quali possono assumere una distensione incomparabilmente maggiore di quella dei muscoli striati. Quando noi consideriamo una fibra muscolare liscia della vescica, la quale colla distensione delle pareti di quest'organo raggiunge una lunghezza tre o quattro volte maggiore di prima, e che si accomoda a questo grado di lunghezza senza dar luogo a nessuno dei fenomeni di tensione muscolare che si osservano nei muscoli striati, evidentemente dobbiamo rappresentarci questi muscoli come dotati di una disposizione molecolare, e di proprietà elastiche assai differenti da quanto non si fosse prima immaginato ed ammesso per gli altri muscoli. La stessa maniera di contrarsi delle fibre liscie sembra avere dei caratteri speciali. Spesso nei tracciati ad una contrazione lenta si vede sovrapporsi una contrazione più rapida: e a questa seconda aggiungersene una terza ancora più rapida, e così con infinite variazioni; per cui la curva prende talvolta il profilo di una montagna che va gradatamente elevandosi per mezzo di successivi altipiani. Come lo prova l'esempio del tracciato 12, tav. IV in cui si toccano le gambe dell'animale nel punto *T*; — e dove per un eccitamento unico abbiamo una serie di contrazioni.

In questo primo studio che noi facemmo rapidamente della contrazione nelle fibre della vescica, non essendoci stato possibile di spingere l'analisi fino al punto che avremmo desiderato, ritorneremo sopra questo argomento con un prossimo lavoro. Ognuno comprenderà facilmente che non possiamo asserire che si tratti in questo caso di contrazioni che divengono successivamente più rapide, o più lente nel medesimo fascio muscolare, fino a che non venga eliminato il dubbio che la curva pletismografica è la risultante, o se si vuole la somma algebrica di tutti i molteplici moti di contrazioni e di rilasciamenti che succedono negli innumerevoli sistemi di fasci muscolari che costituiscono le pareti della vescica.

Anche in questa seconda ipotesi che ciascun fascio di fibre agisca da sè, le osservazioni che abbiamo fatto nei capitoli precedenti, ci conducono ad ammettere l'esistenza di un certo sincronismo nel modo di reagire delle fibre muscolari della vescica:

perchè nella parte discendente della curva difficilmente si osservano altrettante accidentalità, come nella parte ascendente.

Giacchè abbiamo adoperato il paragone delle montagne per concretizzare in un tipo il profilo dei tracciati vescicali, aggiungeremo che questi hanno quasi sempre come le montagne un pendio più rapido che sarebbe il tratto in cui la curva ascende, ed un pendio più accidentato e più lungo quello della discesa.

Variazioni nel tono della vescica. — Per dare un' idea esatta dei cambiamenti di tono che si osservano nella vescica riprodurremo una delle molte esperienze che vennero eseguite sulla nostra cagnetta nera nel sonno prodotto dal cloralio il 19 aprile 1881.

Alle 5 pomeridiane si prende l'animale, gli si lava il retto per mezzo di due clisteri e quindi gli si injettano dentro circa due grammi di cloralio idrato sciolto nell'acqua. Dopo 15 minuti la cagnetta è addormentata. Si distende sul tavolo si introduce il catetere e si svuota la vescica, poi si mette il catetere in comunicazione col pletismografo. In queste osservazioni ci servivamo di due tavoli a vite, sopra uno vi era l'animale, sull'altro il pletismografo e il cilindro rotante: in questo modo si aveva ogni comodo per aumentare, o diminuire la pressione: generalmente abbiamo però sempre preferito di alzare, o di abbassare l'apparecchio, perchè le scosse, quantunque leggere che potevano imprimersi all'animale girando la vite sottostante, non avessero alcuna influenza sullo stato della vescica. Si fanno nel principio alcune esperienze che verranno esposte in fondo al capitolo.

Noi avevamo amministrato una dose di cloralio piuttosto abbondante per scemare quanto più era possibile la sensibilità dell'animale; e cercare per mezzo di un profondo assopimento di conoscere cosa succedeva nella vescica quando l'animale era, per così dire, sottratto all'influenza degli agenti esterni.

L'animale dorme profondamente, anche gridandogli forte nelle orecchie non si riesce a produrre alcun movimento riflesso nella vescica. E ciò nulla meno sente il dolore, come ce ne assicuriamo tirandogli le orecchie. Per questo eccitamento la cagnetta non si muove e non si sveglia; essa reagisce solo per mezzo di una contrazione della vescica; si aumenta il tono della medesima e si solleva la curva del tracciato: questa decorre per un certo tratto quasi orizzontale e poscia a misura che il sonno diviene nuovamente più profondo si rilascia, e la curva discende; oltre a questi fenomeni di contrazione, dei quali conosciamo la causa, esistono nell'animale che dorme altri cambiamenti di tono che non stanno in alcun rapporto immediato cogli agenti esterni, come si vede nel tracciato 13, tav. V; ogni centimetro misurato sulle ordinate corrisponde a poco meno di 2 centim. cubici, perchè il cilindretto del pletismografo che abbiamo adoperato contiene 30 c. c. per 18 centim. di altezza. La velocità del cilindro rotante è indicata in secondi dalla linea *T*.

La curva I trac. 13 segnata dal pletismografo, indica col suo abbassarsi una lenta e continua dilatazione della vescica quanto più il sonno diventa profondo. Un minuto prima che venisse scritto questo tracciato di rilasciamento avevamo cercato di svegliare la cagnetta comprimendo fra le unghie del pollice e dell' indice la membrana interdigitale delle zampe posteriori. L'animale non si era mosso ed aveva solo

reagito per mezzo di una forte contrazione della vescica. L'elevazione della curva fu di breve durata e subito dopo la tonicità dell'organo, non potendo fare equilibrio alla pressione di 8 centim., le sue pareti tornano a cedere e si lasciano sfiancare dall'acqua che penetra lentamente in vescica.

I fogli originali, da cui abbiamo tolto le esperienze trac. 13. I, II e trac. 14. III, IV, V, VI, sono lunghi 48 centim. Siccome sarebbe stato incomodo riprodurli per intero, nel copiarli vennero tralasciati lateralmente a destra e sinistra circa 8 centim. Così resta spiegato perchè le curve della tav. V, che sono segnate secondo il loro ordine con numeri romani, non si corrispondano esattamente nell'altezza dall'ascissa, quando si avvicinino le estremità della tavola in modo da formarne un cilindro. Notiamo che nella linea I, sono molto manifesti i movimenti passivi della respirazione. Questi sono meno evidenti nella linea II perchè il sonno essendo divenuto più profondo, è divenuto più superficiale il respiro. La linea II rappresenta nel tratto *B C* la continuazione di un aumento di tono manifestatosi nel sonno profondo per cause che ci sono sconosciute. Escono circa 10 c. c. dalla vescica; quindi vi è un breve arresto *C D* e dopo benchè nulla sia mutato nelle condizioni esterne succede una rapida diminuzione di tono delle pareti vescicali, per cui vi penetrano in meno di un giro del cilindro altre 20 c. c. di acqua. La linea *D E* che segna questo rilasciamento si prolunga in basso intersecando la linea *I*. Da questa esperienza risulta che i muscoli della vescica indipendentemente dalle azioni esterne subiscono delle modificazioni profonde nella loro tonicità: per cui la vescica, può rilasciarsi sotto la medesima pressione con maggiore, o minore rapidità, oppure contrarsi lentamente.

In questo caso mentre il tono andava aumentando nel tratto *A B C* e poscia diminuiva nel tratto *D E* per quanto grande fosse la nostra attenzione, non abbiamo potuto scorgere alcun mutamento nel ritmo e nella profondità delle respirazioni.

Altre volte siamo invece riusciti a conoscere qualche fenomeno concomitante che potrebbe benissimo essere la causa di questi cambiamenti di tono. Così è nel tracciato seguente preso sulla stessa cagnetta alle ore 7.5 mentre dorme ancora profondamente sotto l'influenza del cloralio. La vescica si dilata lentamente e con un decorso meno regolare. Nella linea III, tav. V si notano delle ondulazioni le quali dimostrano che il sonno è divenuto meno profondo. Noi siamo certi che queste variazioni non dipendono da cause esterne perchè abbiamo avuto cura di non agire menomamente sull'animale. La linea IV che ne è la continuazione discende in modo più uniforme. Mancano le oscillazioni passive del respiro perchè i movimenti del torace sono meno forti di prima, quantunque abbastanza visibili per chi osserva il torace e l'addome. In *F* linea V ci accorgiamo che improvvisamente il respiro diventa molto superficiale; pare quasi sospeso. Poco dopo compare un restringimento della vescica. La linea si eleva da *F* in *M*; probabilmente perchè la respirazione è divenuta insufficiente.

In *M* l' animale eseguisce parecchi movimenti respiratori più profondi e poscia compare una seconda pausa, come quelle che uno di noi aveva già osservato nella respirazione dell'uomo che dorme.

Il tono della vescica cresce di nuovo da *M* in *M'*. Poi decorre orizzontale per un certo tratto nella curva VI, quando in *G* la respirazione diviene nuovamente più forte. La curva discende rapidamente da *G* in *N*.

In questo punto l' animale si muove senza svegliarsi. Succede una contrazione della vescica con decorso irregolare *N H.* Poscia il tono della vescica aumenta rapidamente, mentre l'animale fa dei profondi movimenti respiratori. Da *R* in *S*, dove il tracciato decorre quasi orizzontale, si può giudicare per mezzo dell'ampiezza delle oscillazioni passive della vescica che in tutta questa esperienza non fu mai così forte la respirazione. Dopo *S* compare improvvisamente una rapida dilatazione della vescica di cui non conosciamo la causa.

Il fatto della progressiva dilatazione della vescica osservata nelle curve I, III e IV potrebbe lasciar credere che le pareti di quest'organo cedano continuamente e si sfianchino quando una pressione ad esempio di 8 centim. agisce in modo costante alla loro superficie. Le curve che abbiamo riprodotto nelle tavole II, III e IV e tutte le osservazioni che abbiamo fatto nell'animale sano dimostrano che questo non è il caso più generale. Nell'uomo e negli animali allo stato fisiologico la vescica può resistere benissimo per un tempo indeterminato ad una pressione di 8, o 10 cent. senza lasciarsi dilatare oltre un certo limite. Questo fatto ci obbliga ad ammettere che l'orina onde penetrare in vescica, deve essere spinta da una pressione superiore a quella di 8 o 10 cent.

Nell' esperienza precedente la dilatazione eccessiva e la cedevolezza delle pareti di quest' organo va messa a carico del cloralio, il quale produsse una diminuzione nella tonicità dei muscoli vescicali.

Le lesioni del midollo spinale fatte in qualunque punto della sua lunghezza costituiscono esse pure un mezzo certo per diminuire in modo notevole il tono della vescica. Nel momento in cui si eseguisce il taglio del midollo succede una forte contrazione della vescica e poscia questa si va dilatando lentamente, in modo che la curva segna una linea leggermente inclinata verso l'ascissa. La discesa, ossia lo sfiancamento della vescica sotto le pressioni che noi adoperavamo ordinariamente nelle nostre esperienze, dura un tempo più o meno lungo da 4 fino a 10, 12 minuti ed anche più; poi si trova un certo grado di riempimento della medesima dove si direbbe quasi che basti per se stessa a fare equilibrio alla pressione interna, senza bisogno dei centri nervosi.

Nelle esperienze che riferiremo nel seguente capitolo abbiamo parecchie osservazioni, dove, malgrado il taglio fatto nel midollo spinale, le pareti della vescica potevano resistere alla pressione di 10 centim. dopo che avevano raggiunto la distensione che competeva alla tonicità di un organo separato dai centri nervosi.

Ci sarebbe troppo difficile distinguere in questi due differenti stati della tonicità vescicale quanto ha perduto la vescica per la sua separazione dai centri nervosi, e quanto si debba attribuire all' urto che riceve la vitalità dell' intero organismo per una operazione così grave.

Ricerche sulla tensione delle pareti vescicali. — Nello studio del modo con cui si dilata la vescica dobbiamo prendere in esame tre fattori, che sono *P T V*: essendo *P* la pressione, *T* il tempo necessario per fare penetrare in vescica un determinato volume *V* di acqua, colla pressione *P*. Notiamo che la vescica per una determinata pressione non si mette rapidamente in equilibrio. Già pensando che si tratta di un tessuto vivente, nessuno può imaginarsi che uno studio della tensione nelle pareti vescicali possa avere una rassomiglianza completa coi fenomeni più generalmente conosciuti col nome di elasticità nei corpi inorganici.

Per avere un concetto possibilmente esatto del modo con cui si comportano l'elasticità e la dilatazione della vescica noi potevamo fare tre serie di osservazioni, cioè:

1° $V\,(P\,T)$. Determinare il valore dei volumi che acquista la vescica quando le pressioni aumentano in progressione aritmetica per intervalli di tempo costanti.

2° $P\,(T\,V)$. Determinare quali valori si debbano dare alla pressione perchè in intervalli di tempo sempre eguali la vescica acquisti dei volumi crescenti in un dato rapporto.

3° $T\,(P\,V)$. Determinare il tempo necessario perchè la vescica sotto pressioni crescenti in progressione aritmetica acquisti dei volumi che variino nello stesso modo.

Delle numerosissime curve che trattavasi di determinare per avere una conoscenza esatta intorno all' elasticità della vescica noi abbiamo fatto solo la determinazione dell'ultima serie.

L'apparecchio che adoperammo nelle nostre esperienze per fare questo studio ci permetteva: 1° di far variare a piacimento la pressione del liquido nella vescica; 2° scelta una determinata pressione di mantenerla costante; 3° di leggere comodamente la quantità di liquido che penetrava in vescica. Per metterci in condizioni che ci avvicinassero quanto meglio era possibile alle normali il liquido adoperato aveva la temperatura dell' orina. La fig. 5 rappresenta questo apparecchio. Una buretta *A* divisa in $^1/_5$ di centim. cubico e che contiene 100 c. c. viene messa in comunicazione per mezzo di un tubo di gomma elastica *B* con l'estremità *N* di un serpentino di piombo *C*. Il serpentino è tutto immerso in un vaso di rame *D E* pieno di acqua che può riscaldarsi con una lampada o raffreddarsi con ghiaccio. L'estremità *O* del serpentino comunica per mezzo di un tubo di gomma elastica *F* con un catetere *G* che si introduce in vescica. Una pinzetta a molla tiene sospesa la buretta di vetro in modo che può farsi scorrere facilmente in alto ed in basso. Il sostegno *H* viene messo sul bordo di un tavolo in modo che la buretta non incontri alcun ostacolo nelle escursioni a varie altezze.

Fig. 5.

Apparecchio per studiare il tono della vescica.

Nel principio di ogni esperienza si vuota la vescica e si aspetta alcuni minuti perchè le pareti della medesima si mettano in riposo sotto la pressione zero. Un metro

d'acciajo *LM* tenuto fisso con una pinzetta *R* sopra il sostegno *H* serve a misurare le pressioni esercitate dal liquido contenuto nella buretta sulle pareti della vescica. Lo zero si trova facilmente servendosi del livello ad acqua che venne descritto nel primo capitolo. Il metro di acciajo *ML* viene avvicinato alla buretta e si stabilisce lo zero della misura nel punto segnato dal livello come zero della pressione. Nelle presenti esperienze ci siamo sempre serviti della sinfisi del pube come punto fisso per lo zero della pressione. L'errore che poteva commettersi nel giusto apprezzamento della pressione non è tale da modificare i risultati delle nostre esperienze. Un termometro *T* immerso nel recipiente di rame serviva a regolare la temperatura in modo da conservarla possibilmente costante. Per mezzo di una serie di sperienze preliminari sapevasi che la temperatura del bagno era di poco superiore alla temperatura dell'acqua che dal catetere penetrava in vescica e si teneva calcolo di questa correzione.

L' uso dell' apparecchio ora descritto si comprenderà meglio riproducendo una delle esperienze con cui abbiamo risolto il seguente problema:

Determinare di quanto si dilati la vescica quando delle pressioni come 5,10,15,20, 25 cent. di acqua agiscono sopra le sue pareti ciascuna durante lo spazio di 4, o 5 minuti. Fatta una esperienza a digiuno, vedere se si ottengano gli stessi valori dopo che l'animale ha mangiato.

13 aprile. Cagnetta nera del peso di 5 kilogr. Alle ore 9,46 antimeridiane si lava il retto con un clistere di acqua fresca e si aspetta circa 10 minuti e poi si mette l'animale sulla tavola. Questa cagnetta era tanto docile che tollerava benissimo l'introduzione del catetere in vescica senza muoversi. Si svuota la vescica. La buretta il serpentino e tutti i tubi di gomma essendo completamente pieni di acqua si abbassa il livello del liquido nella buretta fino allo zero e poi si imbocca il tubo *F* col catetere *G* facendo attenzione che non penetri aria.

Stabilita questa comunicazione incomincia l'esperienza. Temperatura dell' acqua nella vasca = 39°. Per ottenere una pressione costante di 5 centim. si solleva lentamente la buretta in modo che il livello dell'acqua contenuta nella medesima corrisponda a 5 centim. sopra lo zero. A misura che l'acqua penetra in vescica con un movimento della mano si solleva la buretta facendola scorrere lentamente contro il metro, così che il livello del liquido non oltrepassi mai i 5 centim. della scala.

Dopo 4 minuti si vede che sono penetrati 12 c. c. di acqua nella vescica. Si solleva d'un tratto il livello della colonna liquida fino a 10 cent.: l'acqua penetra più rapidamente in vescica: la buretta viene grado grado sollevata in modo che la pressione rimanga costante a 10; dopo 4 minuti leggiamo 63, poi a 15, 100 : a 20, 124. Giunti a questa pressione l'animale si muove: si capisce che ha voglia di orinare: il liquido fa delle forti oscillazioni. Si porta la pressione a 25, l'animale diventa più irrequieto. Dopo cinque minuti di forti oscillazioni prodotte dalle contrazioni della vescica leggiamo 135. Vedendo che l'animale non resisterebbe senza agitarsi troppo ad una pressione maggiore, abbassiamo la buretta e ritorniamo a 20 pressione il livello scende a 127, dopo 5 minuti scendiamo 15 di pressione, leggiamo 115 c. c. nella buretta, poi 10 pres. 93, pressione 5 leggiamo 5 c. c. come è segnato nella seguente tabella:

Temperatura 39° Pressione		penetrarono		
Temperatura 39° Pressione	5 in 4′	penetrarono	12 c. c.	
»	10	»	63 »	
»	15	»	100 »	
»	20	»	124 »	tenta di orinare
»	25	»	135 »	
»	20	»	127 »	
»	15	»	115 »	
»	10	»	93 »	
»	5	»	5 »	
»	0	»		

I valori di queste cifre vennero rappresentati graficamente colla linea *A B C D* fig. 6.

Un'altra esperienza fatta subito dopo dà i seguenti risultati: Notiamo però che i periodi sono alquanto più lunghi; invece di 4 minuti sono qui 5 minuti.

Pressione	5 in 5′	penetrano	11 c. c.
»	10	»	70 »
»	15	»	145 »
»	20	»	190 »

Giunti a questa pressione l'animale diventa irrequieto; compaiono delle forti oscillazioni con sforzi come se volesse orinare; si deve abbassare la pressione e levare il catetere. L'animale appena messo in terra orina immediatamente. Vedi curva *E F* fig. 6.

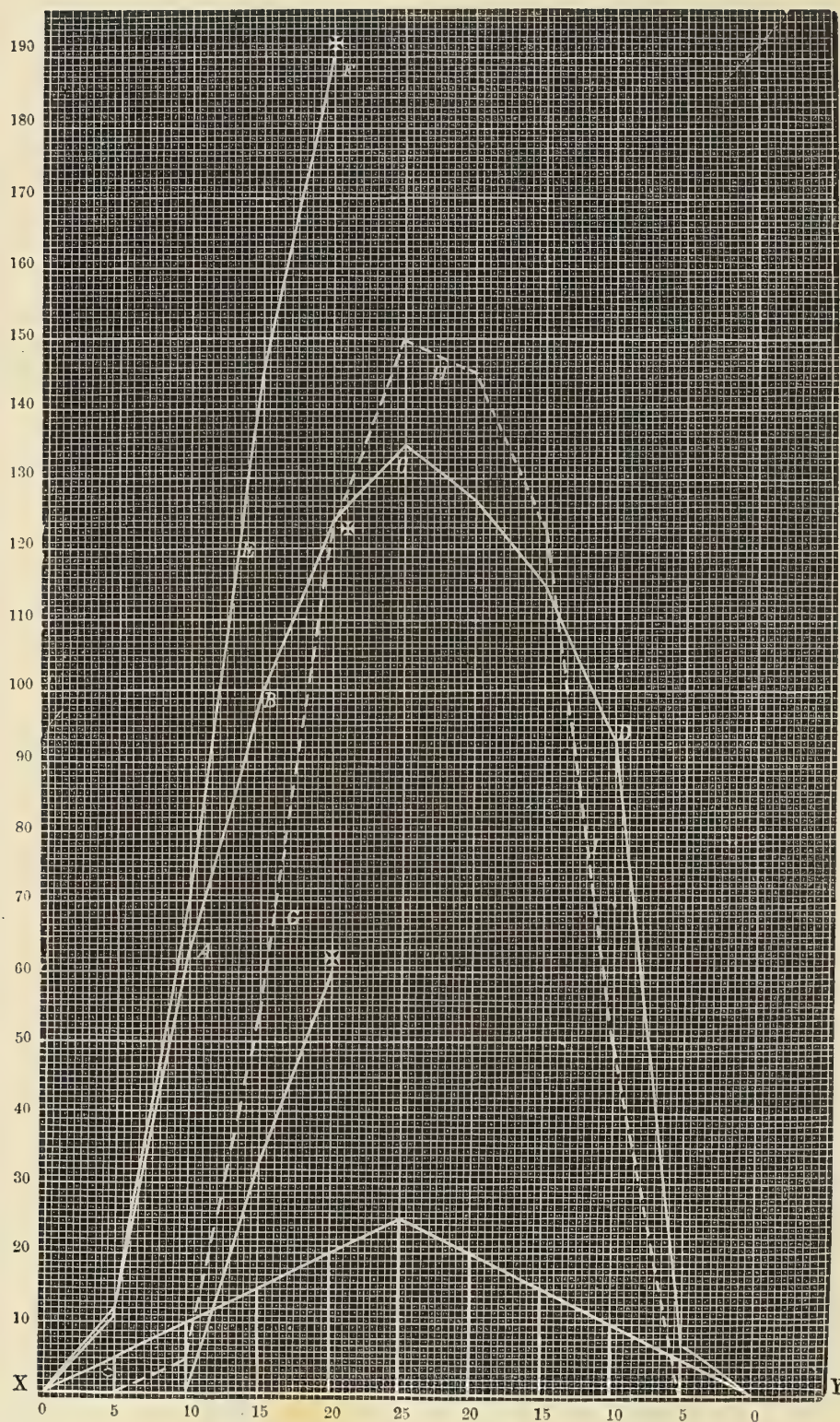
Dopo la cagnetta mangia in abbondanza pane e latte: alle ore 2,10 si fa un'altra esperienza mettendosi nelle stesse condizioni di prima e si hanno i seguenti sisultati:

Pressione	5 in 4′	penetrano	0 c. c.	
»	10	»	5 »	
»	15	»	54 »	
»	20	»	123 »	tenta di orinare
»	25	»	160 »	
»	20	»	155 »	
»	15	»	123 »	
»	10	»	50 »	
»	5	»	0 »	

I valori di questa esperienza vennero rappresentati graficamente colla linea *G H L* fig. 6.

Nella medesima cagnetta facciamo subito dopo un'ultima esperienza alle ore 3,35:

Pressione	5 in 4′	penetrano	0 c. c.
»	10	»	0 »
»	15	»	33 »
»	20	»	60 »

FIG. 6.

Curve di 4 esperienze fatte successivamente nel medesimo cane per determinare l'elasticità della vescica a digiuno e dopo il pasto. I numeri scritti a sinistra sulle ordinate rappresentano i centim. cubici di acqua penetrati in vescica in tempi eguali sotto pressioni rappresentate in centimetri di acqua, i cui valori sono scritti sull'ascissa X Y.

Arrivati a questa pressione troviamo che l'animale diviene molto inquieto e cerca di orinare: siamo obbligati a metterlo in libertà: appena tocca terra, vuota immediatamente la vescica. Abbiamo indicato per mezzo di una croce nella figura 6 i valori della pressione che aveva il liquido in vescica tutte le volte che l'animale tentava di orinare. Vedendo che questi segni si trovano tutti sulla medesima verticale, che corrisponde alla pressione di 20 centim. mentre è molto variabile la quantità del liquido che penetra in vescica sotto la medesima pressione, noi conchiudiamo che l'eccitamento ad emettere l'orina sorge in rapporto colla pressione e non colla quantità del liquido contenuto in vescica. Questo argomento verrà trattato in appresso in un capitolo speciale.

Dalle precedenti osservazioni riteniamo come dimostrato: 1° che la vescica gode di una elasticità abbastanza completa; 2° che sotto la medesima pressione la vescica può contenere dei volumi di liquido assai differenti; 3° che il bisogno di mingere insorge sempre sotto la medesima pressione; 4° che quando la vescica viene molto distesa non ritorna subito abbassando la pressione al volume di prima, ma conservasi per un breve tempo alquanto dilatata.

Azioni locali sul tono della vescica. — Una difficoltà assai grave che si presenta in queste ricerche è la grande varietà dei valori che si ottengono per la distensione della vescica, quando nel medesimo individuo in condizioni apparentemente eguali si impiega la medesima pressione.

Si vedrà in seguito che il digiuno ed il cibo, le emozioni, il sonno, il caffè ecc. producono delle modificazioni profonde nella tonicità e perciò nella resistenza che presenta la vescica alle pressioni che cercano distenderla. Per ora desideriamo di chiamare l'attenzione del lettore sopra un modo di aumento del tono che può fino ad un certo punto considerarsi come dipendente da azioni locali, anzichè da cause generali.

È una osservazione che forma il principio delle esperienze fatte sulla cagnetta nera il giorno 19 aprile di cui venne già riprodotta una buona parte nel presente capitolo. L'animale era profondamente addormentato per l'iniezione di circa 2 grammi di idrato di cloralio nel retto. Adoperiamo l'apparecchio descritto poco sopra.

Si mette la pressione a 5 cent. e non penetra acqua in vescica: aspettiamo 5 minuti e non ne entra punto. Solleviamo il pletismografo di altri 5 centimetri. Si aspetta nuovamente 5′ minuti ed anche colla pressione di 10 cent. non può penetrare acqua in vescica. Essendo sicuri che il catetere era bene in vescica e che doveva funzionare, perchè aveva servito poco prima nella stessa posizione a svuotare la vescica, si solleva la pressione fino ai 15 centimetri. Nello spazio di 5 minuti penetra appena un centim. cubico di acqua. Per riempire la vescica siamo obbligati a portare la pressione fino a 20 cent.: ed in 5 minuti penetrano circa 140 c. c. Dopo alcuni minuti che la vescica era distesa sotto questa pressione si osserva che riducendo la pressione a 10 cent. non si contrae tanto quanto era da aspettarsi per una tensione elastica delle sue pareti. Nell' abbassare il pletismografo fino a 10 di pressione escono 30 o 40 c. c. e poi la vescica rimane immobile.

La resistenza offerta dalla vescica all'entrata dell'acqua fino alla pressione di 15 cent. è un fatto che dipende, secondo ogni probabilità, dalla iniezione del cloralio

nel retto. Alle ore 5,55 si svuota la vescica; poco dopo viene iniettato nel retto un altro grammo di idrato di cloralio sciolto nell'acqua.

Si incontra nuovamente una forte resistenza per distendere la vescica. Con 5 cent. di pressione non penetra acqua durante 5 minuti: a 8 cent. di pressione non ne penetra pure durante altri 5 minuti. Solo a 10 cent. la vescica incomincia lentamente a distendersi. Noi riteniamo che tale aumento esagerato dal tono vescicale sia un fenòmeno riflesso dovuto all'irritazione che il cloralio produsse sulla mucosa dell'intestino. Nelle condizioni normali sotto la pressione di 5 cent. penetrarono nelle altre esperienze in media circa 15 c. c. di liquido. Ed in un caso in cui venne amministrato a questa cagna la medesima dose di cloralio per la bocca, penetrarono 22 c. c. di acqua alla pressione di 5 cent. 100 c. c. alla pressione di 10 cent. e 180 c. c. alla pressione di 15 cent. In seguito a parecchie osservazioni fatte in proposito crediamo di poter asserire che degli eccitamenti applicati sui nervi sensibili in vicinanza della vescica come ad esempio un clistere di cloralio amministrato pel retto possono produrre un aumento di tono nei muscoli della vescica.

CAPITOLO V.

Influenza del cervello e del midollo spinale sulle funzioni della vescica.

Esperienze del Valentin e del Budge. — Le ricerche sperimentali intorno a questo interessante capitolo della fisiologia incominciano colle indagini di Valentin [1] e di Budge [2]. I risultati delle esperienze fatte quasi contemporaneamente da questi autori si accordano, colla sola differenza che Budge considera come alquanto più ristretto il campo delle parti cerebrali che irritate producono una contrazione vescicale. Valentin ammette che l'irritazione del cervelletto, dei peduncoli cerebrali, dei corpi striati e dei talami ottici, produca sempre una contrazione della vescica, e che l'irritazione degli emisferi cerebrali non dia questo movimento in modo costante.

Le ricerche di Budge constatarono una sfera di azione assai più ristretta per l'eccitazione dei centri nervosi. Il metodo adoperato da Budge consisteva nell'aprire immediatamente dopo la morte la cavità dell'addome, o del cranio, oppure una parte qualsiasi della cavità midollare, e di eccitare osservando i movimenti della vescica. Con questo metodo egli non potè vedere che l'irritazione degli emisferi cerebrali, dei talami ottici dei corpi striati e delle eminenze quadrigemine, producesse il più piccolo movimento della vescica. Solamente irritando il cervelletto potè egli produrre dei movimenti nella vescica: e qui trovò una parte dove l'eccitazione li produce più frequentemente e più distinti. Questo luogo trovasi nel punto dove il midollo allungato passa per mezzo dei corpi restiformi nel cervelletto. Finalmente egli osservò che il midollo spinale irritato in tutta la sua lunghezza e specialmente nella metà inferiore

[1] Valentin, *Repertorium*. Vol. VI, pag. 325-359 Lehrbuch der Physiologie 2 Auflage Vol. II. pag. 462.

[2] Budge, *Untersuchungen über das Nerwensystem*. Erstes Heft pag. 159. Zweites Heft pag. 83.

(anteriore) produce un movimento della vescica. Volkmann [1] mise in dubbio le esperienze di Valentin e di Budge e disse che in cinque esperimenti non osservò alcun movimento della vescica.

Budge non ebbe però un concetto esatto dei movimenti riflessi che noi vedemmo prodursi con tanta facilità nella vescica. Infatti nella seconda parte della sua memoria egli dice a pag. 186: « Io devo conchiudere dalle osservazioni che feci fino ad « oggi (1864) che nessun altro nervo sensibile, tranne quelli proprii della vescica « stessa, è capace di eccitare dei movimenti in quest'organo ». Anche irritando con correnti elettriche i nervi più sensibili, come il trigemino egli non avrebbe osservato alcun movimento.

Esperienze dell'Oehl [2]. — Fra le ricerche che contribuirono efficacemente ad ampliare le nostre conoscenze intorno ai movimenti riflessi della vescica meritano un posto distinto quelle del prof. Oehl. Egli si serviva del metodo già adoperato da Budge e Giannuzzi. Metteva un manometro in comunicazione colla vescica e quindi osservava i movimenti della colonna liquida in rapporto cogli eccitamenti del vago. Riferiremo testualmente le conclusioni dell'Oehl che hanno maggior interesse pel nostro soggetto.

« Eccitando l'uno o l'altro dei vaghi integri, ha luogo costantemente ed imme- « diatamente una forte elevazione della colonna manometrica. Dopo qualche tempo « però, e malgrado della perdurante eccitazione, la colonna recede, ma la pressione « esercitata dalla vescica si mantiene maggiore; perchè la colonna resta più alta di « quello che fosse nello stato di riposo del nervo.

« Eccitando il moncone periferico di uno o di amendue i vaghi recisi, si ottiene « pure, ma non costantemente, ed in un grado minore, la elevazione del liquido nel « manometro. In questo caso però non soltanto sono minori nel grado gli effetti, ma « si esige anche una maggiore intensità della corrente eccitante, e a differenza del caso « precedente, la contrazione della vescica e gli effetti al manometro non conseguono « tosto all'applicazione della corrente, ma avvengono dopo qualche tempo dalla sua « azione . . . . Non si può respingere l'idea, che nel pneumogastrico si contengano « fibre motrici della vescica, quali, in seguito ad una congenere osservazione, sono « pure ammesse da Stilling.

« Eccitando il moncone centrale del vago reciso si ottiene in ogni caso e ripe- « tutamente nello stesso animale, una rapida e considerevole elevazione della colonna « manometrica non escluso anche il getto violento e prolungato del liquido e del- « l'urina contenuta nell'apparato . . . .

Per tali risultati Oehl venne alle seguenti conclusioni: 1° che il vago contiene delle fibre motrici per la vescica; 2° che contiene delle fibre sensitive, le quali agiscono riflessoriamente sulla contrattilità di questo organo; 3° che nella eccitazione dei vaghi integri si ottengono al manometro i massimi effetti risultanti dalla pressione della vescica, perchè si stimolano contemporaneamente i nervi motori ed i nervi riflessi.

[1] R. Wagner, *Handwörterbuch.* Vol. I, pag. 592.

[2] Oehl, *Sull'influenza del* 10° *pajo sulla contrazione della vescica.* Manuale di fisiologia. Parte III, pag. 138.

In seguito alle nostre esperienze, esposte nel capitolo II, essendosi messa fuori di ogni dubbio la somma facilità alla produzione dei movimenti riflessi che possiede la vescica, noi siamo inclinati a dare maggior peso alle riserve colle quali il prof. Oehl enuncia dei risultati che egli stesso dichiara di non aver ottenuto costantemente.

Assai più interessanti sarebbero a parer nostro le ricerche che Oehl fece sopra uno dei punti i più difficili di questo intricatissimo argomento: quello cioè di conoscere quale sia il luogo nei centri nervosi dove succede il riflesso dei nervi sensibili periferici sui filamenti nervosi che Budge chiama *spinali motori* della vescica.

Sappiamo già che Budge nella prima parte della sua memoria aveva stabilito che per i movimenti della vescica vi è una via nervosa la quale decorre nei peduncoli, nei corpi restiformi, nel midollo allungato, nei cordoni anteriori del midollo spinale fino alla fine del midollo. Nella seconda parte della sua memoria egli stabilì che vi sono due punti dai quali può avere origine un eccitamento che metta in attività le fibre spinali motrici della vescica: cioè il cervello e molti nervi sensibili: ossia un focolare di eccitamenti cerebrali ed uno riflesso. « Si sa che gli affetti dell'animo « producono una contrazione della vescica. Siccome essi derivano da certe rappresen- « tazioni (Vorstellungen) e queste rappresentazioni hanno bisogno per prodursi degli « emisferi cerebrali, così ne deriva che quando i movimenti dell'animo promuovono « una contrazione della vescica questa è dovuta ad un eccitamento dei peduncoli « cerebrali per mezzo del cervello. Perciò il cervello agisce sui peduncoli cerebrali « nello stesso modo di una corrente elettrica. — La scienza non è ancora in stato « di poter dire quali siano le parti del cervello che eccitate dai movimenti del- « l'animo agiscono sui peduncoli cerebrali per produrre una contrazione vescicale, « e tanto meno si conosce la natura di questa attività ».

Budge prende ancora in esame un' altra supposizione e dice: « si può anche im- « maginare che gli affetti dell'animo agiscano bensì sul cervello, ma che in seguito « a questo eccitamento per mezzo dei nervi del cuore si produca un mutamento nella « pressione del sangue, e che per questa via vengano poscia eccitati i peduncoli ce- « rebrali. Fino ad ora ci mancano delle esperienze per decidere quale sia il modo « di eccitazione di cui si serve la natura » (¹). Citiamo queste particolarità perchè si conosca il modo con cui furono prima formulati alcuni problemi che noi abbiamo svolto nel presente lavoro.

Le ricerche dell'Oehl fecero fare un passo allo studio analitico dell'innervazione vescicale avvicinandosi di più che non avesse fatto Budge al punto dei centri nervosi dove hanno luogo i riflessi del nervo vago sopra le fibre spinali motrici della vescica.

Noi non abbiamo fatto in proposito alcuna esperienza e riferiamo testualmente le sue parole.

« In altre esperienze, di riuscita difficile, in causa della dileguantesi eccitabilità « del pneumo-gastrico, potemmo constatare, nella solita maniera, la persistente in- « fluenza del suo moncone centrale sulla vescica, dopo avere levato la volta del cranio « e separati gli emisferi dalla restante massa cerebrale con un taglio al davanti del

(¹) Budge, opera citata pag. 181.

« nodo, ed anche dopo di avere esportata la massa cerebellare fino a scoprire il « pavimento del 4° ventricolo.

« Per tali esperienze può essere quindi affermato, che il centro di riflessione delle « fibre del vago sulle fibre spinali della vescica non è al di là del midollo allungato, « o del nodo del cervello, e molto probabilmente in grande vicinanza al ganglio di « origine del pneumo-gastrico ».

Se pensiamo che nelle nostre esperienze non era necessaria l'eccitazione del vago per produrre una contrazione della vescica, ma che bastava semplicemente di pizzicare la pelle del collo, di toccare la ferita per cercare il vago, onde ottenere delle forti contrazioni vescicali, dobbiamo rimanere sorpresi che parecchi osservatori valentissimi abbiano trovato che le irritazioni del vago, del simpatico e dello splacnico fossero incapaci a destare delle contrazioni riflesse nella vescica. — Non possiamo fare a meno di attribuire questi insuccessi al difetto del metodo. Anche Sokowin ([1]) che si propose di cercare quali fossero i nervi sensibili del corpo che erano capaci di produrre una contrazione in via riflessa, trovò che l'irritazione del vago non dava alcun movimento riflesso della vescica. Per le irritazioni dei monconi centrali del nervo ischiatico crurale e splacnico Sokowin riuscì ad ottenere costantemente una contrazione della vescica. Questa mancava però quando erano estirpati prima gli emisferi cerebrali.

Crediamo inutile di rilevare altre contraddizioni degli autori che si occuparono di questo argomento per scusarci, se vediamo venir meno la nostra fede nell'autorità dei nomi e ci riduciamo ad esporre unicamente i fenomeni che noi stessi abbiamo potuto constatare.

Nostre esperienze sopra il midollo spinale. — Dopo le osservazioni fatte sui movimenti della vescica nel capitolo II possiamo considerare la questione da un punto di vista più elevato e generalizzare i fatti osservati coll'asserire che: qualunque nervo sensibile venga eccitato, si producono dei movimenti riflessi nella vescica. Per vedere quale influenza avesse il simpatico nella produzione di questi movimenti, abbiamo tagliato i due nervi che si staccano dal ganglio mesenterico inferiore verso la vescica e vedemmo, che toccando, o premendo le estremità inferiori, succedeva egualmente una contrazione della vescica. Ritorneremo più tardi sopra tale argomento, dimostrando che i cani cui abbiamo estirpati i filamenti che vanno alla vescica, insieme coi ganglî mesenterici inferiori, poterono vivere lungo tempo senza presentare alcun disturbo nelle funzioni di quest'organo per riguardo alla sensibilità ed al moto. Intanto ammettiamo anticipatamente come dimostrato che il simpatico non è necessario alla produzione dei movimenti riflessi della vescica.

Tagliato il midollo, in qualunque punto della sua lunghezza, al disopra della regione sacrale, non è più possibile nelle condizioni ordinarie, subito dopo il taglio, di produrre una contrazione della vescica irritando le estremità anteriori, o posteriori dell'animale.

([1]) Sokowin, *Beiträge zur Physiologie der Entleerung und Zurückhaltung des Harns.* Hofmann und Schwalbe Jahresberichte 1878. III Abth. Physiologie pag. 89.

Vedremo fra poco le ragioni per cui enunciando in questo modo i risultati delle nostre esperienze, dobbiamo ricordare che qui si tratta di cani nelle condizioni ordinarie, subito dopo il taglio del midollo. Con ciò non intendiamo di ammettere che alla esecuzione di tutti i movimenti riflessi della vescica vi prenda parte il cervello. Le nostre esperienze ci conducono anzi ad ammettere l'esistenza di movimenti riflessi i quali si compiono esclusivamente nel midollo, come avevano già detto prima del Goltz, il Valentin, il Budge ed il Giannuzzi.

Ecco come si esprime in proposito il Valentin ([1]): « Quum fibrae nervosae, quae « vesicam petunt, in partem medullae spinalis lumbarem intrent, sectio supra hunc « locum facta urinae retentionem, quem excretio involuntaria postea insequitur, excitat, « quum voluntas vesicae exitum aperire non possit, motus vero automatici reflexivi « perfici possint. Medulla spinali omnino destructa aut fibris sensoriis et motoriis « aut his solis deletis, lotii emissio involuntaria excitatur ».

Le osservazioni del Budge in proposito sono forse espresse in un modo meno chiaro; egli dice infatti ([2]): « Nach Durchschneidung des Rückenmarks erfolgt eben so « selten, als die Kothentleerung, die des Urins, doch habe ich auch diese grade so wie « jene beobachtet; irre ich aber nicht, so geschah dies immer kurz vor dem Tode ».

Per vedere quali movimenti possa compiere la vescica separata dall'encefalo sotto il dominio del midollo spinale abbiamo pensato di facilitare i movimenti riflessi avvelenando l' animale colla stricnina dopo il taglio del midollo alla regione dorsale.

In queste circostanze comprimendo fortemente le estremità posteriori osservammo nella vescica scoperta prodursi una distinta contrazione ad ogni eccitamento. Uno di noi, il dott. Pellacani esporrà con maggior dettaglio queste esperienze in un prossimo lavoro, sull'azione che i medicamenti esercitano sopra la vescica: frattanto in seguito ai risultati ora esposti possiamo già ammettere che gli eccitamenti i quali partono dalle estremità inferiori trovano nel midollo lombare una via ristretta, ma più breve di riflessione; ed un' altra più comoda, ma più lunga che si estende fino al cervello.

Questi fatti, come abbiamo già detto, hanno bisogno per rivelarsi di condizioni speciali; cioè di una eccitabilità straordinaria del midollo spinale: sia che venga prodotta dalla stricnina, sia che producasi naturalmente qualche tempo dopo il taglio, come succedeva, a parer nostro, nelle esperienze di Giannuzzi e di Goltz.

Nelle condizioni normali e subito dopo il taglio del midollo alla regione dorsale, non osservammo alcun movimento riflesso della vescica comprimendo fortemente con tanaglie le estremità posteriori. Fu solo dopo di esserci assicurati di questo fatto che potemmo accingerci a cercare dove passino nel midollo le così dette fibre motrici della vescica. Simile studio venne fatto tagliando separatamente in varî punti i cordoni del midollo.

La sola esperienza che conosciamo in questo riguardo è dovuta a Budge ([3]): « Ho tagliato, egli dice, all'altezza della 5ª vertebra cervicale di una cagnetta neo- « nata solamente la metà posteriore (superiore) del midollo da entrambi i lati ed

([1]) Valentin, opera citata pag. 151.

([2]) Budge, *Untersuchungen über das Nervensystem* 1841. Erstes Heft pag. 160.

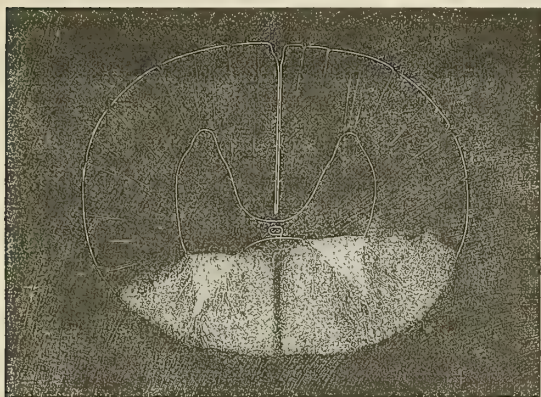
([3]) Budge, *Ueber den Einfluss des Nervensystems auf die Bewegung der Blase.* Zeitschrift für rationelle Medicin. III, R. XXI Bd. pag. 15.

« eccitai i cordoni anteriori per mezzo di una corrente elettrica nel luogo dove erano « stati portati via i cordoni posteriori. Servendomi di un apparecchio ad induzione « dove i due rocchetti erano posti alla distanza di 60 mm. osservai delle contrazioni « evidenti della vescica del retto e della tube. Quando scomparirono le contrazioni « per il medesimo eccitamento, vennero avvicinati i rocchetti fino a 40 mm. e si ebbe « nuovamente un'azione manifesta nella vescica ».

Pare che Budge siasi servito di questa sola osservazione per conchiudere che le fibre nervose da cui dipendono i movimenti della vescica passano dal midollo allungato nei cordoni anteriori del midollo onde percorrerlo in tutta la sua lunghezza. Noi riteniamo come dubbie le esperienze del Budge perchè applicando la corrente elettrica sul midollo scoperto di un cane neonato è quasi impossibile di limitare l'irritazione ai soli cordoni anteriori, senza che l'eccitamento elettrico si diffonda ai cordoni posteriori.

Per procedere con maggior sicurezza noi abbiamo escluso completamente ogni irritazione locale fatta per mezzo di correnti elettriche e ci siamo tenuti all'osservazione dei movimenti riflessi prodotti per eccitamenti meccanici applicati sulle estremità.

Ecco alcune delle esperienze che abbiamo fatto in proposito.

Fig. 7. (')

Taglio dei cordoni anteriori e laterali del midollo. — Esperienza del dì 11 maggio 1881. — Cane nero adulto del peso di 15 kilogr. Quando è profondamente cloroformizzato, si scopre il midollo al limite della regione dorsale e lombare: si incide la dura madre, e sollevando per un lembo della medesima leggermente il midollo, con un coltellino somigliante a quelli che servono per l'operazione della cataratta, trafiggiamo il midollo da parte a parte. Lo scopo di questa operazione era di conservare i cordoni posteriori intatti, tagliando quanto meglio era possibile i cordoni laterali e gli anteriori.

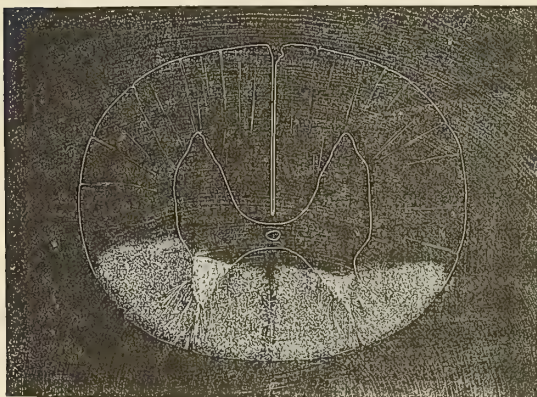
Si chiude la ferita e si mette il cane supino per scoprire la vescica: si introduce nella medesima un catetere per un' apertura fatta al perineo onde evitare la resistenza dell'uretra in tutta la lunghezza del pene: poi si mette la vescica in comunicazione col pletismografo e si scrive.

Quando si comprimono le estremità anteriori si produce una contrazione della vescica. Tenendo bene divaricate le pareti addominali ed isolando la vescica ci assicuriamo che questi movimenti riflessi non dipendono dalle variazioni del respiro che succedono in seguito al dolore. Comprimendo le estremità posteriori per mezzo di

(') Nella presente figura, e nelle 3 successive, la parte disegnata con dettaglio rappresenta la parte del midollo conservata, come vedevasi nei preparati ad un leggiero ingrandimento. Ciò che venne lasciato nero rappresenta la parte distrutta del midollo.

una tanaglia si producono egualmente delle contrazioni vescicali distinte. L'esperienza viene ripetuta parecchie volte di seguito.

Ucciso l'animale si prolunga in alto ed in basso l'esportazione degli archi vertebrali e si stacca un pezzo del midollo lungo parecchi centimetri: avendo riguardo di non toccare la ferita del midollo fino a che questo non sia stato sufficientemente indurito nell'alcool. Dopo alcuni giorni si fanno con diligenza delle sezioni complete cercando il punto dove è minore la porzione del midollo che fu conservata. La fig. 7 dimostra che il taglio fu completo pei cordoni anteriori e laterali: essendosi conservata solo una piccolissima parte di questi ultimi. Il taglio si estende alla parte centrale della sostanza grigia ed alle corna anteriori. Solo i cordoni posteriori e la sostanza grigia delle corna posteriori venne conservata intatta.

Fig. 8.

Esperienza del dì 11 *giugno*. — Grosso cane del peso di 15 kilogrammi. Durante la cloroformizzazione si apre lo speco vertebrale e si scopre il midollo al limite inferiore della regione dorsale. Si incide la dura madre e si trafigge il midollo da una parte all'altra avendo cura di conservare intatti solamente i cordoni posteriori. Il resto viene tagliato volgendo il coltello in basso in modo da dividere tutta la sostanza dei cordoni laterali e anteriori. Messa una spugna nella ferita si cucisce la pelle e senza aspettare che sia cessata l'emorragia si volta l'animale e si scopre la vescica. Si mette una cannula nell'uretra che penetra in vescica.

Riempito l'organo con acqua sotto una leggiera pressione si fa comunicare col pletismografo per scriverne i movimenti. L'animale nello svegliarsi dalla cloroformizzazione essendo divenuto alquanto irrequieto, viene leggermente curarizzato per mettersi al sicuro dai movimenti passivi. Si fa la respirazione artificiale.

Per mezzo di ripetute prove ci assicuriamo che si producono delle contrazioni della vescica tanto irritando le estremità anteriori, quanto le posteriori. L'eccitazione si faceva comprimendo fortemente le dita con una tanaglia. Ucciso l'animale si estrae un lungo pezzo del midollo tagliandolo sopra e sotto la ferita e quindi si indurisce nell'alcool. Dalle sezioni fatte per cercare il punto dove era stato fatto il taglio prendiamo un preparato microscopico che dà la figura 8. In essa vediamo che vennero troncate completamente le vie nervose dei cordoni anteriori: e che i cordoni laterali essi pure vennero distrutti in gran parte, eccettuata una piccola porzione in vicinanza dei cordoni posteriori. Le corna anteriori e la parte centrale della sostanza bigia venne distrutta completamente.

In seguito a queste esperienze ed altre fatte nello stesso modo alla regione cervicale che diedero i medesimi risultati, noi ci crediamo autorizzati a conchiudere: *che fibre motrici della vescica decorrono nei cordoni posteriori, o nell' estrema parte posteriore dei cordoni laterali.*

Le indagini da noi fatte sul decorso delle fibre motrici della vescica nel midollo spinale verrebbero a completare i fatti osservati dal Türck ([1]) con altro metodo, quando stabilì che nella metà posteriore dei cordoni laterali vi sono delle vie per una conduzione centrifuga. È noto che secondo questo autore si sviluppano delle cellule granulose in seguito a malattie del cervello, o del midollo, in quelle vie nervose che rimasero lungamente senza funzionare. Questo metodo che venne reso più completo dalla reazione che l'acido cromico ed i suoi sali esercitano sui tessuti nervosi affetti da un leggero grado di degenerazione, permisero a Türck di stabilire un *cordone delle piramidi:* cioè una via nervosa che parte dai peduncoli cerebrali, scende in basso dal medesimo lato a traverso il ponte, la piramide del medesimo nome, nella decussazione delle piramidi del midollo allungato passa nell'altro lato nella metà posteriore dei cordoni laterali.

Le ricerche da noi fatte sul midollo per determinare il decorso delle fibre spinali motrici della vescica, vengono a confermare per quest'organo le conclusioni alle quali Woroschiloff ([2]) lavorando sotto la direzione del Ludwig era già arrivato nel 1874 per i movimenti delle estremità posteriori nel coniglio. Crediamo utile di riferire sommariamente l'esperienza che Woroschiloff rappresentò colla tavola XII, pag. 284. È un coniglio nel quale in corrispondenza della prima vertebra lombare si tagliò più della metà anteriore dell'intero midollo. Comprimendo le estremità posteriori e specialmente la sinistra, tre ore dopo l'operazione, l'animale piegava fortemente le estremità posteriori. Per mezzo di un eccitamento delle parti del corpo poste anteriormente al taglio del midollo non potevasi invece ottenere alcun movimento delle estremità posteriori.

Taglio dei cordoni posteriori e laterali del midollo. — Per stabilire quanto si estendevano nei cordoni laterali le fibre motrici della vescica, abbiamo eseguito sopra altri animali il taglio dei cordoni posteriori e laterali. Queste indagini avevano contemporaneamente il vantaggio di servire come di controprova delle esperienze precedenti. Trattandosi di risultati negativi abbiamo dovuto raddoppiare la circospezione. I cani venivano operati con tutte le cautele possibili onde risparmiare le emorragie, e conservare intatto il midollo. Quando l'operazione era finita l'animale veniva slegato e messo in libertà per assicurarci, se malgrado la scopertura del midollo dopo cessata la cloroformizzazione esso era in stato di servirsi delle estremità posteriori. Assicuratici che l'animale si reggeva bene sulle gambe, veniva nuovamente messo sul tavolo di operazione, si introduceva il catetere in vescica, (se era necessario si scopriva anche la vescica) e quando ci eravamo assicurati che esistevano i movimenti riflessi in modo normale, si voltava l'animale, si incideva la dura madre e sollevato per un lembo della medesima leggermente il midollo con un coltello da cataratta si tagliavano i cordoni posteriori insieme alla parte anteriore dei cordoni laterali.

Esperienza del 6 *giugno.* — Cane maschio del peso di kilog. 9,700. Quando l'animale è profondamente cloroformizzato si scopre il midollo al limite inferiore della regione dorsale. Tanto in questa quanto nelle precedenti esperienze per evitare l'emorragia ci servivamo di un coltello galvanico. Messo l'animale in terra aspettiamo

([1]) Türck, Wiener akademische Sitzungsberichte vol. VI, pag. 288; vol. XI, pag. 93.

([2]) Woroschiloff, *Der Werlauf der motorischen und sensiblen Bahnen durch das Lendenmark des Kaninchen.* Bericht. der kön. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften math. phys. Classe Nov. 1874.

Fig. 9.

che si sollevi da se stesso e cammini per assicurarci che non venne prodotta inavvertentemente qualche lesione del midollo. Dopo si incide la dura madre e col solito coltellino si attraversa il midollo in modo da separare buona parte dei cordoni laterali e tutti e due i cordoni posteriori. Voltato l'animale sul dorso scopriamo la vescica e mettiamo la porzione prostatica dell'uretra in comunicazione col pletismografo per scrivere i movimenti della vescica.

Qualunque eccitamento delle estremità anteriori e posteriori non è più capace di produrre una contrazione della vescica. Quando si comprimono le estremità anteriori in modo da eccitare una forte sensazione dolorosa, in seguito ai forti movimenti del respiro si producono bensì delle variazioni nel tracciato; ma queste hanno tutta l'apparenza dei movimenti passivi. Per ciò riteniamo che in questo caso mancano i movimenti riflessi della vescica. Le sezioni fatte nel midollo indurito dimostrano come si vede nella fig. 9 che il taglio aveva lasciato intatti solo i cordoni anteriori, le corna anteriori della sostanza grigia e la parte anteriore dei cordoni laterali.

Fig 10.

Esperienza del dì 8 *giugno.* — Cane di media grandezza cloroformizzato. Si scopre il midollo al limite inferiore della regione dorsale colle cautele esposte nell'esperienza precedente. Si incide la dura madre e si tagliano i cordoni posteriori e laterali. Dopo aver messo il pletismografo in comunicazione colla vescica, vediamo che l'animale è troppo irrequieto. Per evitare che si trasmettano dei movimenti alla vescica curarizziamo leggermente l'animale e si fa la respirazione col soffietto. Eccitando le estremità anteriori l'animale dà segno con leggieri movimenti di sentirne dolore, ma la vescica resta quasi immobile.

Per eliminare ogni movimento passivo anzichè amministrare una seconda dose di curaro si preferisce di incidere l'addome sulla linea alba e di scoprire la vescica tenendo bene divaricate le pareti addominali. L'eccitamento delle estremità anteriori rimane senza effetto; e così pure quello delle estremità posteriori.

Ucciso l'animale, si leva una buona parte del midollo che viene indurito nell'alcool. L'esame delle sezioni microscopiche dimostra come si vede nella fig. 10 che noi avevamo tagliato completamente i cordoni posteriori e la sostanza centrale bigia e più della metà dei cordoni laterali. Secondo queste esperienze si deve conchiudere che: *nei cordoni anteriori del midollo e nella parte anteriore dei cordoni laterali, non passano fibre motrici della vescica.*

CAPITOLO VI.

Influenza del simpatico sulle funzioni della vescica.

Ricerche del Valentin. — Le prime ricerche che noi conosciamo intorno all'influenza del simpatico sulla vescica si devono al Nestore dei fisiologi moderni al Valentin. Noi riferiremo un frammento del suo libro *de functionibus nervorum cerebralium et nervi sympathici* (Bernae 1839, pag. 64). « Parte abdominali inferiori et « imprimis sacrali N. sympathici irritata motus energici vesicae urinariae in « cuniculo, equo et cane exoriuntur, ut lotium illa inclusum magna vi propellatur. Vesica « cum a vertice ad collum, tum ab utroque latere contrahitur. Motus in eo latere, quo « nervus irritatur, incipit posteaque cum altero latere communicatur. N. N. spina- « libus abdominalibus mediis et inferioribus irritatis et N. sympathici « parte intermedia integra, eadem ratione, qua diximus, vesica contrahitur ».

Esperienze del Giannuzzi. — Dopo Valentin fu, per quanto noi sappiamo, Giannuzzi il primo che abbia cercato di studiare separatamente l'influenza che esercitano sulla vescica i filamenti nervosi del simpatico e del midollo spinale. Giannuzzi isolava in una prima esperienza i nervi che vanno direttamente dal midollo al plesso ipogastrico e quelli che vi si rendono dopo aver attraversato i gangli del grande simpatico e quindi li eccitava per mezzo di una corrente elettrica. Dalle sue esperienze Giannuzzi conchiuse: « che la differenza che osservasi tra l'eccitamento dei nervi « rachidiani e quelli del grande simpatico, non riguarda la forma della contrazione della « vescica, od il luogo dove questa si produce, ma il grado di intensità della contrazione « e l'eccitamento necessario per produrla. Infatti i nervi rachidiani hanno bisogno di « una eccitazione meno energica e producono delle contrazioni più forti e più rapide, « mentre i nervi simpatici hanno pel contrario bisogno di una eccitazione più intensa « e danno luogo a delle contrazioni vescicali più deboli e più lente ».

Giannuzzi cercò con altre esperienze di stabilire quali fossero le parti del midollo spinale che presiedevano alle contrazioni della vescica. Riferiremo testualmente la seconda esperienza che egli fece a tale scopo (¹).

Esp. II. « Ad un cane adulto, in digestione, divisi la midolla spinale tra la « prima vertebra lombare e l'ultima dorsale, dopo aver levato la lamina vertebrale che « corrisponde a questo punto. Tirata fuori la vescica constato che i filamenti del grande « simpatico hanno perduto la loro sensibilità, mentre che io avevo veduto persi- « stere costantemente questa sensibilità negli animali indeboliti dalle sofferenze, o nar- « cotizzati coll'oppio, ma nei quali non era stato reciso il midollo ».

« Questi fatti mi hanno condotto a conchiudere che i filamenti del grande « simpatico prendono origine al disotto del punto dove venne fatta la sezione. Io non « mi sono tuttavia contentato di queste esperienze, e facendomi l'obbiezione che il ta- « glio del midollo spinale poteva bastare per rendere i rami del grande simpatico

(¹) G. Giannuzzi, *Recherches physiologiques sur les nerfs moteurs de la vessie.* Journal de la Physiologie de Brown-Séquard. 1863, tome VI, pag. 24.

« insensibili, ho voluto pungere sopra due altri cani il midollo al livello delle quattro « ultime vertebre dorsali, e galvanizzare le radici che vi prendono origine: ma in « queste condizioni non osservai alcun movimento nella vescica: quantunque per ren- « dere sensibili le più piccole contrazioni di quest'organo, avessi fatto comunicare la « sua cavità con un manometro ».

L'obbiettivo di Giannuzzi era solo di conoscere i nervi motori della vescica, e di cercare se vi fossero dei nervi motori speciali per ciascuna delle sue parti; quindi egli non si fermò per stabilire con opportune esperienze, se il simpatico era un nervo di moto o di senso, o se aveva entrambe queste proprietà. Prendendo in esame le sue indagini, si vede subito che colla prima esperienza il Giannuzzi non poteva decidere se il simpatico fosse un nervo di senso o di moto: perchè egli non tagliò precedentemente le comunicazioni del simpatico col midollo spinale. Supponendo che il simpatico sia un nervo sensibile, irritando i suoi cordoni presso la vescica si possono ottenere dei movimenti che hanno il loro punto di riflessione, o nel cervello, o nel midollo, o nei gangli mesenterici, o nel plesso ipogastrico. Giannuzzi dice infatti che l'eccitamento dei filamenti del simpatico produceva una contrazione della vescica accompagnata da un dolore molto forte. Per conoscere se oltre alla sensibilità, il simpatico sia anche dotato di motilità per i muscoli della vescica, bisogna tagliare i filamenti che dal ganglio mesenterico vanno alla vescica, isolarli bene, tenendoli sollevati nell'aria, e quindi irritarli meccanicamente, o per mezzo di una corrente elettrica. Ritorneremo più tardi sopra questo argomento, quando esporremo le nostre esperienze: per ora riteniamo che le ricerche del Giannuzzi non sono abbastanza concludenti, e che egli non si pronunciò con sufficiente chiarezza intorno alle proprietà del simpatico. In seguito ad un'esperienza assai importante egli dice che il simpatico aveva perduto la sensibilità dopo il taglio del midollo, perchè eccitando il midollo al livello delle ultime vertebre dorsali non otteneva più alcuna contrazione della vescica per mezzo del simpatico. Questa ci sembra che fosse piuttosto una esperienza per stabilire la mancanza di motilità anzichè la mancanza di sensibilità del simpatico.

Esperienze del Budge. — Budge che si occupò del medesimo problema dice (²): « Io devo confessare che fui molto sorpreso di non essere riuscito contro ogni mia aspet- « tazione a trovare delle fibre motrici nel simpatico. Ciò era talmente contrario alle « mie supposizioni che io sempre ritornai su questa esperienza per giungere ad un « sicuro risultato ».

Riferiremo un'esperienza di Budge onde procedere con maggior cautela in questo campo assai controverso. Budge dopo aver descritto le osservazioni preliminari soggiunge: « Un tubo manometrico venne messo in comunicazione colla vescica: e « quindi mentre i due rocchetti dell'apparecchio di induzione erano lontani circa « 60 millim. si irritò il simpatico isolato per mezzo di un pezzo di vetro, in corri- « spondenza della biforcazione dell'aorta.

« L'animale diede segni di dolore. L'acqua nel manometro salì a 10, 12, 15 mil- « lim. nelle tre volte che si ripetè l'esperienza. Poi si irritò nello stesso modo il

(²) I. Budge, *Ueber den Einfluss des Nervensystems auf die Bewegung der Blase.* Zweite Abtheilung Zeitschrift für rationelle Medicin III. Reihe XXXI Band, pag. 181, 1864.

« simpatico in vicinanza del diaframma, e si ebbero nuovamente gli stessi fenomeni:
« cioè dolore e contrazione della vescica: l'acqua nel manometro salì a 22 millim.
« Assicuratici di questo fatto, si tagliò con un pajo di forbici affilate il nervo nel
« punto eccitato, e si pose una laminetta di vetro fra le due estremità del medesimo.
« Poi si irritò nuovamente sopra e sotto il punto tagliato. Irritando sopra si aveva
« una contrazione di 22 millim. irritando sotto mancava il dolore e la contrazione
« della vescica, perchè l'acqua non cambiava di livello nel manometro.

« La parte tagliata del nervo si trovava fra due gangli: l'estremità superiore
« del medesimo comunicava per mezzo di fibre centripete col midollo: non così l'in-
« feriore. Si isolò per mezzo di un bastoncino di vetro una parte del simpatico posta
« più in basso (verso il promontorio) che stava essa pure fra due gangli, e la si
« eccitò colla corrente galvanica. La colonna manometrica si elevò immediatamente,
« ma meno di prima. Ripetuta l'eccitazione si ebbero i medesimi risultati. Allora si
« tagliarono i rami comunicanti che partivano dal ganglio posto più in alto, senza ri-
« muovere il bastoncino. Si irritò nuovamente, ma senza alcun effetto. In questa espe-
« rienza il pezzo di nervo eccitato non aveva più alcuna comunicazione col midollo
« per mezzo di fibre centripete. Si ripete nella stessa maniera una terza esperienza,
« nella quale si irritò di nuovo il cordone fra due gangli: si tagliarono i rami co-
« municanti e si irritò nuovamente. Il risultato fu lo stesso di prima.

« Il risultato generale era che nel simpatico decorrono solo delle fibre sensibili,
« delle quali dove vi sono dei gangli alcune passano per mezzo dei rami comuni-
« canti al midollo ed una parte va in alto lungo il cordone del simpatico fino al-
« l'entrata nella cavità del torace » (¹).

Esperienze dell'Oehl. — Un'osservazione analoga servì più tardi all'Oehl per conchiudere che nel vago vi sono delle fibre motrici le quali dovrebbero attraversare il plesso celiaco per giungere alla vescica.

Oehl dopo aver detto che « galvanizzando i monconi periferici dei vaghi si pos-
« sono vedere i cangiamenti di forma della vescica per contrazione delle sue fibre » soggiunge: « Galvanizzando i cordoni esofagei al cardias si può ottenere lo stesso ef-
« fetto senza arrestare la circolazione, ed elidere in tal guisa il dubbio che a tale
« arresto si dovessero le contrazioni vescicali ».

Qui vediamo come una esperienza quasi identica serva nelle mani del Budge per dimostrare che nel simpatico vi sono solo delle fibre sensibili, e che Oehl invece ne trae argomento per dimostrare che le ramificazioni del vago le quali si confondono col simpatico sono capaci indipendentemente dalle modificazioni del circolo di produrre una contrazione della vescica. Noi avremmo ritenuta più fondata la conclusione dell'Oehl qualora egli avesse tagliato il midollo spinale per assicurarsi che non esistevano dei riflessi per le comunicazioni col midollo spinale. Non vogliamo però entrare nella critica di queste esperienze dell'Oehl, perchè non abbiamo fatto esperienze in proposito.

Esperienze del Sokowin. — Un'esperienza assai più decisiva venne fatta in

(¹) Budge, Memoria citata pag. 183.

questo riguardo da Sokowin sotto la direzione di Kowalevsky ([1]). Volendo egli decidere se l'influenza motrice del cervello sulla vescica facevasi esclusivamente per mezzo delle radici sacrali, oppure anche per mezzo delle fibre del simpatico (ganglio mesenterico inferiore) tagliò il midollo alla 7ª vertebra lombare. L'eccitamento elettrico del midollo alla regione cervicale produsse in questo caso delle contrazioni vescicali ancora distinte, quantunque deboli. E queste cessarono appena vennero tagliati i filamenti nervosi i quali dal ganglio mesenterico inferiore vanno al plesso ipogastrico.

Essendo dimostrato in questo modo che i filamenti del simpatico contengono delle fibre di senso e delle fibre di moto per la vescica, Sokowin affrontò un problema assai più grave; quello cioè di determinare, dove si fanno i riflessi, quando viene eccitato un filamento del simpatico, mentre il midollo è tagliato.

Egli sarebbe giunto alla conclusione arditissima « che le contrazioni riflesse « della vescica si fanno per mezzo del ganglio mesenterico inferiore », e ne dedusse il fatto importante che « può in un ganglio del simpatico aver luogo la trasmissione « di eccitamenti dalle fibre sensibili alle fibri motrici ».

Il simpatico è un nervo di senso e di moto. — Non avendo il tempo per ripetere tutte le osservazioni del Giannuzzi, del Budge, dell'Oehl e del Sokowin per trovare le cause delle loro divergenze, quantunque riteniamo questo argomento degno di tutta l'attenzione dei fisiologi e degli anatomi, abbiamo tentato di constatare bene alcuni dei fatti che ci parvero più interessanti pel nostro soggetto, cercando una risposta alle seguenti domande.

I. Il simpatico è un nervo motore, o sensitivo?

II. Vi è qualche differenza fra le contrazioni vescicali prodotte dall'eccitamento del simpatico e quelle prodotte per l'irritazione dei nervi spinali?

III. I movimenti riflessi della vescica si possono fare anche nei ganglî del simpatico, oppure hanno luogo esclusivamente nel midollo, o per mezzo del cervello?

IV. Quale influenza ha il simpatico sulle funzioni della vescica?

V. Dove passano i nervi vasomotori della vescica?

Ricordiamo che nel cane si trovano in vicinanza dell'arteria mesenterica inferiore, uno, o due ganglî che si chiamano ganglî mesenterici.

Due filamenti che scorrono in vicinanza dell'aorta e della vena cava ascendente riuniscono i ganglî mesenterici col plesso celiaco, ed altri filamenti nervosi li fanno comunicare colla parte del simpatico che corrisponde alle prime vertebre lombari. Questi ganglî danno due cordoni che vanno a riunirsi coi nervi spinali per costituire il plesso ipogastrico. I rami spinali del 3°, 4° e 5° pajo sacrali si riuniscono coi ganglî sacrali per formare il plesso sacrale. È da questo plesso che partono dei rami, i quali accompagnando le arterie e le vene si dirigono verso la vescica formando il plesso ipogastrico.

Nelle nostre esperienze abbiamo limitato quanto più era possibile in basso l'apertura dell'addome sulla linea alba, staccando i muscoli retti dalla loro inserzione sulla

([1]) Sokowin, *Beiträge zur Physiologie der Entleerung und Zurückhaltung des Harns.* Sunto di Nawrocki nei Jahresbericthe der Anatomie und Physiologie di Hofmann e Schwalbe 1878, pag. 87.

sinfisi pubica. In questo modo abbiamo scoperto la vescica e siamo pervenuti senza emorragie ed alcuna delle complicazioni che sono accennate da Budge sopra i ganglî mesenterici. Abbiamo legato entrambi i filamenti, od un solo, e dopo aver tagliato i nervi in vicinanza del ganglio, tirando leggermente il filo abbiamo isolato il nervo in modo da poterne sollevare nell'aria un pezzo lungo qualche centimetro.

Un eccitamento elettrico anche debole, e tale da potersi resistere sulla lingua, applicato sul filamento del simpatico che comunica colla vescica, produsse sempre una evidentissima contrazione di quest'organo.

Irritando il simpatico diligentemente isolato e le fibre spinali che formano il plesso ipogastrico non abbiamo trovato alcuna differenza nella forma della contrazione. Per evitare ogni errore alcune di queste esperienze vennero eseguite col midollo spinale tagliato, o distrutto.

Il simpatico è non solo un nervo motore della vescica, ma anche un nervo sensibile perchè irritando il moncone centrale ed i filamenti del medesimo che sono in rapporto col midollo si producono delle contrazioni vescicali e segni di dolore: fenomeni i quali scompaiono quando si taglia il midollo, o lo si distrugge alla regione lombare.

Estirpazione del simpatico. — Per vedere quale importanza avesse il simpatico nella produzione dei movimenti riflessi della vescica abbiamo pensato di estirpare i ganglî mesenterici ed i filamenti del simpatico che partono da questi ganglî per confondersi col plesso ipogastrico. Quest'operazione non ancora tentata da altri e che nel principio parve ardita, venne tollerata benissimo dagli animali su cui la eseguimmo. Uno solo morì al quale, per un accidente succeduto durante l'operazione, dovemmo allacciare l'arteria mesenterica inferiore, e questo soccombette per un' altra causa, che non fu l'estirpazione del simpatico.

Esperienza 1° *febbraio.* — Cane da caccia cloroformizzato; adoperando le precauzioni di cui si servono i chirurghi nelle operazioni col metodo di Lister si apre la cavità dell'addome e si escidono i filamenti del simpatico che dal ganglio mesenterico inferiore vanno alla vescica. L' esame microscopico fatto immediatamente dopo l'operazione dei pezzi di nervo esportato, ci assicura che l'operazione è riuscita bene. Si cucisce la ferita dell'addome con due serie di punti fatti con catgut. N. 3. L'una profonda abbraccia i bordi dei muscoli retti e li fa combaciare: l' altra più superficiale abbraccia solo la pelle.

La sera vomita sostanze in digestione; non si vede che abbia orinato. Si continua nella notte a tenere molto elevata la temperatura della stanza 18° o 20°.

La mattina del 2 febbraio vediamo che il cane ha vomitato ripetutamente ed emesso una volta la orina.

In tutta la giornata non orina più: mangia e si comporta discretamente bene.

3 febbraio. Il cane nella notte non ha più orinato. Sapendo che questo cane aveva l'abitudine di non spandere acqua nel laboratorio, se non veniva condotto fuori, lo mandiamo nel cortile: appena egli si trova in libertà orina immediatamente e molto.

Nel pomeriggio si rinnovano i punti di sutura più superficiali, perchè se li era strappati. Gli si applica un largo collare di bastoncini inflessibili, per evitare che egli si apra nuovamente la ferita dell'addome.

Sera, ore 7. Si conduce nuovamente il cane nel cortile, ma non orina, quantunque in tutto il giorno siamo certi che egli non ha più orinato: per maggiore precauzione noi tenevamo il cane in una gabbia col fondo di zinco, leggermente inclinato da uno dei lati in modo da poter raccogliere in un vaso l'orina che spandevasi.

Il cane mangia con buon appetito e sta bene.

4. febbraio. Al mattino verso le 8 ½ il cane viene condotto nel cortile ed orina abbondantemente. Sta benissimo.

Nei giorni successivi 5, 6, 7, 8 e 9 il cane venne sempre conservato nella gabbia dove fu messo fino dal secondo giorno dopo l'operazione. Potemmo così essere sicuri che egli non orinò mai senza essere stato condotto fuori del laboratorio, o nel cortile.

Questa esperienza dimostrò nel modo il più evidente che la vescica dopo l'estirpazione dei filamenti del simpatico, non perde nulla della sua sensibilità e dei suoi movimenti. In questo cane non solo erano conservate le sue funzioni normali, ma la stessa abitudine di emettere l'orina fuori del laboratorio non erasi punto mutata.

Giannuzzi stabilisce un centro pei movimenti riflessi della vescica nel midollo lombare (¹). — «Ciò che è degno di nota (dice Giannuzzi) e che si è prodotto costantemente « nelle prime quattro esperienze, è stato che dopo la separazione del midollo lombare « del rimanente dell'asse cerebro spinale, gli animali potevano continuare ad urinare « in certi dati intervalli, sebbene incompletamente, ora noi sappiamo dietro le esperienze « mie e di Budge che tutti i nervi sieno motori che sensitivi della vescica urinaria, « prendono origine, o per meglio dire, si trovano in comunicazione coll'asse cerebro « spinale solo per mezzo del midollo lombare. Come mai gli animali poteveno orinare, « per poco che sia, quando il midollo era tagliato nella parte superiore di detta re- « gione? Credo che ciò era prodotto per contrazione causata da azione riflessa.

« Infatti il vuotamento e quindi la contrazione della vescica solo si produceva, quando « era fortemente tesa dall'orina, e l'espulsione era sempre parziale. Si può quindi a buon « diritto ritenere, che la forte tensione dell'orina coadiuvata da qualche movimento, « che faceva il cane, irritasse i nervi sensitivi della muccosa vescicale, e causasse per « ciò de' movimenti riflessi; riflessione la quale si farebbe nel midollo spinale ».

Ricerche di Goltz. — Le ricerche di Giannuzzi riprese più tardi da Goltz (²) condussero a dei risultati così evidenti, che si deve ammettere senz'altro la possibilità di una contrazione della vescica, capace di vuotare una parte del contenuto per mezzo di un movimento riflesso anche quando venne tagliato il midollo. Goltz trovò che basta un leggero solletico nei dintorni dell'ano per destare un forte getto di orina nei cani che hanno il midollo tagliato. Per dimostrare che il centro di questi riflessi sta apparentemente nel midollo lombare, egli distrugge il midollo isolato con una sonda. L'orina incomincia tosto a sgocciolare e qualunque azione riflessa sopra la vescica diviene impossibile.

(¹) Giannuzzi, *Della tonicità degli sfinteri dell'ano e della vescica orinaria.* Accademia dei fisiocritici. Siena 9 maggio 1869, pag. 20.

(²) Goltz, *Ueber die Functionem des Lendenmarks des Hundes.* Pflügers Archiv. VIII Band 1874, pag. 474.

CAPITOLO VII.

Meccanismo dell'emissione dell'orina.

Galeno. — Crediamo utile di risalire alle prime fonti delle cognizioni attuali della fisiologia intorno a questo soggetto, perchè limitandoci all'esposizione di quanto si trova ora nei trattati, correremmo pericolo di dare come nuove delle dottrine che sono invece assai vecchie. Il meccanismo per l'emissione dell'orina quale si trova descritto nelle opere di Galeno, è rimasto fino ad oggi il concetto fondamentale di questo capitolo: e la scienza moderna aggiunse relativamente assai poco alla dottrina primitiva del fisiologo di Pergamo. Riferiamo per dimostrare la verità di questo asserto un brano della classica traduzione fatta dal Daremberg delle opere di Galeno.

« La vessie, outre qu'elle a un canal étroit, présente des fibres de toute espèce, « comme l'estomac et l'utérus. Ces viscères, en se contractant sur leur contenu, ferment « leurs orifices. Il en est de même de la vessie. Cette propriété ne se trouve pas dans « les intestins, pourvus de fibres transversales, mais aussi d'un canal suffisament large. « Ils avaient donc besoin d'un muscle pour les fermer. Mais la vessie n'a pas besoin « de grande assistance, étant capable de se fermer même sans muscle. C'est pour empê- « cher que l'urine, pénétrant, par suite du resserrement de la vessie, dans le canal si « oblique de l'urètre, ne séjournât trop longtemps dans ce canal que la nature l'a « revêtu extérieurement d'un muscle composé de fibres transversales (bulbo-caverneux?). « Ce muscle devait être aussi d'une utilité incessante pour l'occlusion de l'orifice de « la vessie.

« Ainsi, pour prévenir tout retour dans les reins de l'urine contenue dans la vessie, « la nature insère obliquement les uretères dans ce réservoir pour empêcher une émission « continuelle, et munit la vessie de fibres variées, principalement de fibres obliques [1].

« Quand vient le moment de l'expulsion, elle relâche toutes les fibres, à l'exce- « ption des transversales qu'elle tend. Elle trouve aussi à ce moment dans les muscles « un secours considérable, tandis que celui du canal de l'urètre se relâche à son point « de jonction avec la vessie, tous les muscles abdominaux sont fortement tendus de « manière à refouler, à comprimer la vessie, et le muscle du col se contractant, presse « sur l'urine qu'elle précipite dans le canal.

« Toute l'urine ne franchirait pas le canal de l'urètre avec la rapidité, la régularité « actuelle due à la compression des muscles de la vessie et de l'abdomen, si la nature « n'avait donné ce muscle (bulbo-caverneux) pour ceinture extérieure à l'urètre qui a « une direction si oblique.

[1] Oribasio si esprime in modo più esplicito di Galeno intorno al modo di chiusura degli ureteri. « Le mode d'insertion des uretères dans la vessie, et du canal cholédoque dans l'intestin, dépasse tout ce qu'il y a de plus merveilleux; en effet, les canaux, s'implantant obliquement sur les organes, et pénétrant obliquement et par un long trajet jusque dans leur cavité intérieure, détachent des parties intérieures une espèce de membrane qui est renversée et ouverte par les résidus qui s'acheminent vers l'intérieur, tandis que, pendant tout le reste du temps, elle retombe, se dresse et forme un couvercle tellement bien fait pour le conduit, qu'il est impossible, non seulement aux fluides, mais à l'air lui même de retourner en arrière » (*Oeuvres d'Oribase*, traduction de Bussemaker et Daremberg. Tom. III, p. 364).

« La première utilité de ce muscle consiste donc à ne pas laisser d'urine dans le « canal, la seconde à aider à l'occlusion de l'orifice de la vessie, la troisième à hâter « la sortie de l'urine » ([1]).

Haller — L'autorità di Galeno dominò tutto il periodo del basso impero, del medio evo e del rinascimento; cosicchè dobbiamo giungere fino ad Haller per constatare un qualche sviluppo del concetto galenico. Per spiegare come l'orina fosse trattenuta in vescica, Haller dimostrò l'esistenza di un meccanismo che in alcuni trattati recenti viene descritto e attribuito a Kohlrausch ([2]).

Ecco le parole che Haller scrisse circa un secolo prima ([3]):

« Videtur urinae modicam copiam in convexo vesicae fundo versus rectum intesti- « num, sub uretra producto, facile et absque sensu colligi: deinde sphincterem incipere « stringi, quando maior nunc lotii copia ad urethrae ostium adscendit, et eo majorem « ejus musculi laborem esse, quo altior super urethram nunc urinae columna est, suo « pondere in urethrae ostium nitentis ».

Due altri nuovi concetti si introducono nella fisiologia della vescica per opera di Haller; il primo è un momento meccanico e si riferisce alla posizione inclinata della vescica per cui si può raccogliere nel fondo della medesima una certa quantità di orina: il secondo costituisce la contrazione riflessa dello sfintere vescicale. Haller ammette cioè che lo sfintere della vescica sia un muscolo indipendente dalla volontà, e che rimanga contratto per l'eccitamento che vi produce la presenza dell'orina.

« Inclinatio enim vesicae, quae retrorsum ducit, facit, ut lotium versus intestinum « rectum potius premat, quam versus urethram. Quare etiam in cadavere, aqua in ve- « sicam per ureterem immissa, non effluit, nisi postquam multum jam vescica intumuit. « Duas ergo has potestates conjunxero, situm ipsum, qui de fundo vesicae vetat urinam « exire: et sphincterem, qui voluntati non obnoxius ex natura sua, a lotio irritatus « contrahat se, et de superiori vesica lotium non sinat exire » ([4]).

Il concetto che la pressione addominale entri come fattore nell'emissione dell'orina già così chiaramente accennato da Galeno venne svolto più chiaramente dall'Haller. Dobbiamo però notare che prima di lui verso la metà del sec. XVII Plempius aveva dato tale importanza alla contrazione dei muscoli addominali per l'emissione dell' orina, che ne aveva fatto un meccanismo capace di funzionare di per sè senza altro soccorso. « Expellitur etiam urina beneficio musculorum abdominis, qui hypogastrium premunt » ([5]).

Haller completò il concetto della pressione addominale aggiungendovi due nuovi momenti, cioè l'effetto della inspirazione e la contrazione diaframmatica· « Inspiratio « mictionem semper praecedit » ([6]).

([1]) Oeuvres de Galien traduites par Daremberg. Paris 1854. Vol. I, p. 377.
([2]) Kohlrausch, *Anatomie und Physiologie der Beckenorgane* 1854.
([3]) Haller, *Elementa physiologiae.* Lausannae 1778. Vol. VII, p. 399.
([4]) Haller, opera citata p. 398.
([5]) Plempii, *Fundamenta medicinae.* Lovanii 1664, p. 171.
([6]) Haller, opera citata p. 400.

Egli però comprese che la pressione addominale per sè sola non bastava a cacciare fuori l'orina. « Ea enim inerte et paralitica facta, frustra respirationis vires in-« tendimus nihil effecturi » (¹).

Valentin. — Nell'opera di Valentin: *De functionibus nervorum cerebralium et nervi sympatici*, al capitolo *de lotii praeparatione et excretione* noi troviamo che l'analisi di questo intricatissimo problema, fa un passo innanzi verso un concetto di cui dovremo più tardi occuparci con ricerche speciali.

« Vesicae urinariae motus reflexivi duplici ratione excitantur. Aut enim, vesica « urinaria nimis repleta, mingendi nisus sentitur; quo facto aut voluntarie aut auto-« matice vesicae exitus aperitur et vesica contrahitur. Aut voluntate nostra vesica « aperitur, quum mingendi nisus non existit. Si mingendi consilium cepimus, muscu-« lum clausorium vesicae relaxatum esse primo sentimus, tum vero intervallum longius « breviusve intrat, quo lotium nondum defluit, denique lotium ipsum ejicitur. Hoc vero « temporis intervallum, ut ita dicam, vacuum saepissime multo maius est, quam inter-« vallum inter sphincteris ani externi relaxationem et alvi deiectionem ipsam. Quod si « vesicae apertura sphincteris vesicae relaxatione fieret, quum fibrae eius cum ceteris « vesicae fibris, imprimis constrictricibus cohaereant, intervallum nullum aut fere « nullum existere deberet. Itaque rem magis complicatam esse ex is elucet ».

Giannuzzi. — Il concetto di Galeno che nell'atto con cui viene emessa la orina, vi esista un rilasciamento di una parte delle fibre della vescica e una contrazione dell'altra, è giunto senza incontrare opposizione fino a noi: cosicchè la maggioranza dei fisiologi ammette ancora oggidì che nelle pareti della vescica si possano distinguere due muscoli che stanno in antagonismo per le loro funzioni: il detrusore e lo sfintere: quando l'uno si contrae, deve rilasciarsi l'altro e viceversa. Uno dei primi che abbia combattuto sperimentalmente questa ipotesi fu Giannuzzi (²), il quale dimostrò che l'eccitazione dei nervi rachidiani e quella dei filamenti del grande simpatico non ha influenza sulla forma della contrazione della vescica, nè sul luogo dove si produce, ma solamente sopra il grado di intensità di quest'ultima e sull'eccitazione necessaria per produrla. Egli ammise, senza però darne la dimostrazione, che « la volontà interviene nell'emissione dell'orina operando sulla vescica tutta intera, « e non solamente sopra il suo collo », come credevasi generalmente. Dopo soggiunse che con ciò non voleva negare « che i muscoli dell'addome concorrano molto energica-« mente per la loro contrazione all'emissione dell'orina » e non disse altro in proposito.

Budge. — Nelle interessanti ricerche che Budge fece intorno alla innervazione della vescica, non si fermò a ricercare sperimentalmente il modo con cui viene emessa l'orina; perciò l'analisi che egli fa di questo meccanismo non riesce secondo noi a rischiarare il problema, ma lo rende più oscuro e più complicato. Ecco come egli si esprime in proposito:

« Quando la vescica per la continua secrezione dell'orina viene gradatamente diste-« sa, noi sentiamo questa distensione: e la sentiamo tanto più presto, quanto più sono

(¹) Haller, opera citata p. 401.

(²) Giannuzzi, *Recherches physiologiques sur le nerfs moteur de la vessie.* Journal de la Physiologie. Tome VI, 1863.

« eccitabili i nervi sensibili e tanto più tardi quanto più questi nervi sono ottusi.
« Questa sensazione giunge alla coscienza e si produce così un eccitamento per eseguire
« un movimento della vescica. Contemporaneamente dietro l'impulso di altre rappre-
« sentazioni ([1]) si produce subito una chiusura della vescica per mezzo del muscolo
« costrittore.

« Facendo attenzione si sente molto distinta in corrispondenza della parte mem-
« branosa dell'uretra questa forte contrazione — la quale come sappiamo per mezzo di
« uno sforzo della volontà può divenire ancora notevolmente più forte. Il tempo in cui
« viene così trattenuta l'orina dipende naturalmente dalla forza dei nervi e delle fibre
« muscolari del muscolo costrittore di ciascun individuo. Ma nelle condizioni ordinarie
« la pressione cui è sottoposto il liquido diviene finalmente così grande, che la forza
« della volontà non può più opporgli alcuna resistenza, e così l'orina può fluire dal-
« l'uretra. Incontra ancora una volta un ostacolo nel bulbo cavernoso, ma anche questo
« non può resistere a lungo. Quando s'avvicina l'istante nel quale si oppone all'influenza
« del costrittore una più grande resistenza, e si dà l'occasione di poter rivolgere la volontà
« sopra i muscoli della vescica, allora si trovano di fronte l'una all'altra due forze:
« cioè da una parte la volontà che agisce sopra il costrittore, e dall'altra i muscoli
« della vescica. Dall'opposizione di queste forze ne risulta che la volontà non è più
« in grado di impedire l'uscita dell'orina quando è vicino il momento in cui essa
« sta per spandersi » ([2]).

L'obbiezione che prima d'ogni altra viene in mente quando si legge questo meccanismo del Budge si è che questo vale solo per l'uomo e che noi dobbiamo trovarne un altro più semplice per la donna dove il muscolo costrittore è assai più debole e talora incompleto.

Oehl ([3]), *Küss* ([4]) e *Goltz* ([5]). — Poco differenti sono le idee dell'Oehl, di Küss, di Goltz ed altri che nei loro trattati e nei loro scritti parlarono con maggiore estensione di questo argomento. L'indole esclusivamente sperimentale del nostro lavoro non ci permette di estenderci nella critica di opinioni cui manca fino ad oggi la base di fatti positivamente dimostrati senza, che la novità del concetto modifichi o renda più facile la soluzione del problema. In generale si può dire che gli autori non sono ancora d'accordo sul meccanismo con cui possiamo emettere volontariamente l'orina. Secondo alcuni fisiologi, fra i quali ricordiamo Valentin, Giannuzzi e Budge, i muscoli lisci della vescica possono contrarsi direttamente sotto l'influenza della volontà. Secondo altri, e da questo lato sta forse la maggior parte dei fisiologi da Galeno ed Haller fino a Goltz, le contrazioni delle pareti vescicali si producono sempre in via riflessa.

Ecco come Goltz si esprime in proposito: « La distensione graduata della vescica per mezzo dell'orina che si raccoglie nella sua cavità produce una irritazione dei

([1]) Auf Veranlassung anderer Vorstellung.

([2]) Budge, *Ueber den Einfluss des Nervensystems auf die Bewegung der Blase. Dritte Abhandlung.* Zeitschrift für rationelle Medicin von Henle und Pfeufer. Dritte Reihe XIII Band. 1865, pag. 92.

([3]) Oehl, *Manuale di fisiologia.* 1868, parte II, pag. 416.

([4]) Küss, *Cours de physiologie* publiée par Duwal. Paris 1873, duexième édition, pag. 549 e 553.

([5]) Goltz, *Ueber die Functionen der Lendenmarkes des Hundes.* Pflüger's Archiv. 1874, p. 478.

« nervi sensibili della medesima che a sua volta diviene in via riflessa causa di un « movimento nei muscoli della vescica. Appena compaiono in causa di questa contra- « zione della vescica le prime goccie di orina nell'uretra, noi sentiamo il primo bisogno « di orinare. A questo punto ci rimangono due vie da scegliere, o possiamo lasciare « libero il corso all'emissione dell'orina destatasi in modo riflesso, oppure con un au- « mento volontario nella attività dello sfintere dell'uretra impedire l'ulteriore uscita « dell'orina. Se ci torna comodo di lasciar spandere l'orina, possiamo favorire l'attività « dei muscoli della vescica aumentando gli sforzi della pressione addominale. Altrimenti « possiamo prolungare la contrazione dello sfintere dell'uretra opponendosi così all'at- « tività della vescica fino a che i muscoli di questa siano stanchi ».

La pressione addominale non è necessaria per mingere. — Se ci riesce per un istante di sottrarsi all'autorità di tutti i fisiologi che si occuparono fino ad oggi della emissione dell'orina e ci mettiamo a considerare le varie ipotesi esposte, da un punto di vista schiettamente sperimentale, mettendo da una parte le supposizioni e dall'altra le conoscenze conseguite per mezzo di opportune esperienze, noi troviamo che i fatti positivamente dimostrati intorno alla emissione dell'orina sono relativamente assai scarsi.

Incominciamo col vedere cosa la vescica sia capace di fare da se stessa. È un fatto noto a tutti che quest'organo si può contrarre da sè anche quando è messo allo scoperto. La forza della contrazione vescicale è di gran lunga superiore a quanto possa credersi a primo aspetto. Basti il dire che in alcuni cani i quali avevano largamente aperta la cavità dell'addome osservammo che la vescica era capace di tener sollevata con una contrazione spontanea una colonna d'acqua di metri 1,50 ed anche di 2 metri d'altezza. Simili osservazioni che avemmo l'opportunità di ripetere ci dimostrano come siano poco attendibili quelle ipotesi intorno al meccanismo del mingere, dove si ammette la necessità della pressione addominale, quasi la vescica non bastasse per vincere le resistenze del canale dell'uretra e scollarne le pareti. Noi diamo molta importanza nel meccanismo per l'emissione dell'orina al fatto che la vescica può contrarsi a volontà, senza che sia necessario per questo di servirsi della pressione addominale. Agli esempi già citati a pag. 13, aggiungiamo il trac. 18, tav. VII, che rappresenta una contrazione spontanea della vescica da α in ω, senza che siasi modificata notevolmente la pressione addominale.

Che del resto la vescica sia per se sola capace di svuotarsi completamente senza il soccorso delle pareti addominali si può osservarlo facilmente negli animali curarizzati, i quali non raramente spandono l'orina con getto vigoroso quando si sospende la respirazione artificiale ed incomincia l'asfissia. Spessissimo si osserva nell'uomo e negli animali uno spandimento di orina, quando essendosi già arrestato il respiro e il movimento del cuore, non è certo più il caso di pensare ad un'aumentata pressione dell'addome.

Una prova evidentissima che la vescica può funzionare senza il sussidio della pressione addominale l'abbiamo nei tracciati 15 e 16, tav. VI, dove si vede che si può mingere senza modificare punto il respiro.

Queste esperienze vennero fatte sopra noi stessi applicando un pneumografo a molla di Marey sopra l'addome in vicinanza del pube in modo che sovrastasse alla vescica: nell'inspirazione la linea *R* si abbassa, nell'espirazione si eleva.

Per scrivere l'istante preciso in cui l'orina usciva dall'uretra ci siamo serviti di

un piccolo imbuto con un tubo di gomma alla estremità, che lo faceva comunicare con un timpano registratore. Mettevamo l'estremità del ghiande presso il fondo dell'imbuto: la prima goccia di orina che usciva dall'uretra comprimeva l'aria nel tubo dell'apparecchio e sollevando la leva del timpano faceva un segnale *m n* tracciato 15 e 16 sopra la linea che segnava i movimenti respiratorî.

L' apparecchio registratore della respirazione era talmente sensibile che nel tracciato 15, linea *R* registrava le oscillazioni del polso negativo alla superficie dell'addome. Ciò basti per assicurarci che noi eravamo in condizione di osservare tutti i più piccoli movimenti delle pareti addominali.

La maggior parte delle nostre esperienze vennero fatte il mattino, e talune anche nel pomeriggio; in quasi tutte aspettavasi di avere una certa quantità di orina nella vescica. Se erasi sentito prima il bisogno di orinare, facemmo però sempre attenzione che lo stimolo fosse completamente cessato nel momento dell'esperienza, onde rimuovere il dubbio che vi esistesse una contrazione persistente della vescica, cui si opponesse il muscolo sfintere esterno colla sua contrazione. Senza di questa precauzione lo studio dei movimenti dell'addome non avrebbe avuto alcun valore. Dai tracciati delle numerose esperienze che abbiamo fatto in proposito risulta che la comparsa delle prime goccie di liquido fuori dell'uretra, può succedere in qualsiasi punto della fase respiratoria. Nel tracciato 15, tav. VI, si vede che l'orina incomincia ad uscire in α, verso la fine di un movimento espiratorio.

Questo fatto basta per se solo a dimostrarci che l'aumento della pressione non sta in intimo nesso colla funzione del mingere, perchè in tale caso dovrebbe sempre precedere un movimento respiratorio più forte come aveva detto Haller.

Quando la vescica è distesa non si può continuare la registrazione dei movimenti addominali mentre essa va completamente svuotandosi, perchè gli strumenti registratori che si stringono intorno all'addome, o vi si applicano contro, si prestano male per scrivere un forte cambiamento nel diametro antero posteriore dell'addome.

Quantunque non fosse difficile costruire un pneumografo che seguisse le pareti addominali nel loro abbassarsi per lo svuotamento della vescica, non abbiamo creduto conveniente di arrestarci per superare questa difficoltà. Nel tracciato 15 di cui ora ci occupiamo vennero emessi 450 c. c. di orina.

Noi vediamo dopo α un arresto quasi completo del respiro, dopo che erasi già avviato lo svuotamento della vescica.

Nello stabilire i rapporti di sincronismo fra la curva della respirazione addominale e quella dell'istante in cui l'orina compare fuori dell'uretra nell'imbuto si deve tener calcolo del brevissimo ritardo che deve manifestarsi nella linea superiore del segnale, dove va perduto il tempo che impiega l'orina a percorrere l'uretra e versarsi nell'imbuto.

In alcune esperienze abbiamo voluto scrivere insieme ai movimenti dell'addome anche la respirazione toracica. Nel tracc. 16, tav. VI, la linea della respirazione addominale *A d* essendo scritta con un cardiografo di Marey si eleva durante l'inspirazione e viceversa si abbassa nella espirazione. La linea della respirazione toracica *T o r*, essendo scritta con un pneumografo a molla di Marey si abbassa nell'inspirazione. Noi vediamo dalla linea *S* scritta contemporaneamente, che quando in *m* compaiono le prime goccie di orina, non venne punto modificato in α il movimento respiratorio dell'addome

e del torace. Solo in D, D' quando si vuole interrompere l'emissione dell'orina succede una profonda inspirazione e diventano dopo più profondi i movimenti respiratorî.

Un' osservazione non meno interessante per lo studio del meccanismo con cui si svuota la vescica è la misura della pressione addominale che accompagna il fenomeno della emissione dell'orina. Le osservazioni che abbiamo fatto in proposito ci dimostrarono che si tratta qui di una leggerissima modificazione del respiro anzichè di una vera pressione addominale. Servendoci di un manometro messo in comunicazione con una vescichetta di caoutchouc, fatta con un pezzo di condom che si introduce leggermente distesa nel retto, si vede che nella grande maggioranza dei casi l'aumento della pressione addominale, quando esiste non sarebbe capace di vincere neppure le resistenze dell'uretra e degli sfinteri rilassati come potemmo misurarlo nel cadavere.

Le esperienze precedenti ci fanno ritenere come assai probabile che le modificazioni del respiro osservate, mentre viene emessa l'orina, siano da paragonarsi a quelle altre analoghe che noi osserviamo durante l'attività del cervello, e qualsiasi movimento psichico. Con altre parole noi caratterizziamo questa modificazione del respiro come un semplice fenomeno di arresto, e non come una reale funzione indirizzata ad uno scopo.

Questa dottrina per quanto possa sembrare ardita trova un grado maggiore di probabilità nel fatto che quando è avviata la contrazione della vescica, se vogliamo sospender l'uscita dell'orina facciamo nuovamente un movimento identico a quello che si eseguisce nel maggior numero dei casi per avviare la contrazione dell'orina; come abbiamo osservato nel tracciato 12, tav. VI.

Se tanto per fare uscire l'orina, come per arrestarne il suo getto noi produciamo la medesima modificazione del respiro; ciò vuol dire che questa non entra come fattore in questi due movimenti inversi ed opposti.

Un altro indizio che la pressione dell'addome non è necessaria per avviare la funzione del mingere sta nell'osservazione che tutti abbiamo fatto le mille volte sopra noi stessi, che nell'eseguire uno sforzo ed anche nel defecare malgrado le maggiori pressioni possibili non insorge il bisogno di orinare.

E notisi che in tali circostanze nessuno pensa, o si accorge di dover contrarre lo sfintere esterno per opporre un ostacolo all'uscita dell'orina. Spesso nella defecazione, o non si orina punto, o dopo aver già svuotato in parte la vescica si percepisce nuovamente il bisogno di mingere.

Questi movimenti che si compiono senza alcuna diretta partecipazione della volontà, avendo noi solo la coscienza della loro successione, sono assai interessanti per stabilire la natura ora riflessa ed ora volontaria dei movimenti che occorrono all'emissione dell'orina.

Non esiste un antagonismo fra lo sfintere ed il detrusore della vescica. — La tonicità dello sfintere della vescica è uno degli argomenti che vennero meglio studiati da coloro che ci precedettero nelle indagini sulle funzioni della vescica. È noto infatti come alcuni autori abbiano negato l'esistenza della tonacità nello sfintere della vescica, o almeno la necessità di questo tono per tener chiusa la vescica. Tale opinione poggiava sul fatto che anche dopo la morte può esercitarsi una pressione notevole sulla vescica senza che ne esca fuori l'orina. Evidentemente in questi casi non è più questione del solo sfintere vescicale, ma si comprendono sotto tale nome tutti i muscoli estrinseci e i tessuti che possono mettere ostacolo

al passaggio dell'orina nell'uretra. Furono specialmente Wittich, Lesser e Rosenthal che vollero escludere l'azione del tono per attribuire la chiusura della vescica alla elasticità del suo sfintere.

Non entreremo nei dettagli delle discussioni che vennero sollevate in seguito alle ricerche di Wittich, Lesser e Rosenthal: ricorderemo solo come dobbiamo particolarmente alle ricerche di Heidenhain e Colberg la dimostrazione del fatto che i muscoli, i quali chiudono la vescica, resistono ad una pressione assai più elevata durante la vita che non dopo la morte. Ritenendo come stabilita la dottrina del tono musculare in dipendenza dai centri nervosi e particolarmente dal midollo, restava ancora da vedersi se succeda realmente una diminuzione nel tono dello sfintere quando compare una contrazione nel detrusore. Questo problema di un' importanza capitale nello studio del meccanismo con cui si emette l'orina, venne risolto nel seguente modo. Si scoprì l'uretra in corrispondenza della parte membranosa e vi si legò una cannuccia quanto più era possibile vicino al collo della vescica. Servendoci dell'apparecchio descritto nel capitolo IV a pag. 25, per studiare la dilatazione della vescica sotto pressioni successivamente più grandi, abbiamo determinato quale era la pressione necessaria perchè l'acqua penetrasse lentamente in vescica. Le esperienze vennero fatte successivamente sopra cani normali cloroformizzati o curarizzati. Trovato il grado di pressione che era necessario per vincere la tonicità dello sfintere abbiamo prodotto una contrazione della vescica, eccitando l'animale quando non erasi prima aperta la cavità addominale: oppure applicando direttamente l'eccitazione elettrica, o meccanica sopra le pareti della vescica quando mettevasi l'organo allo scoperto. Nell'istante in cui si stabilisce una contrazione delle pareti della vescica, abbiamo osservato che è necessario di aumentare la pressione dell'acqua di fronte allo sfintere perchè l'acqua possa penetrare nella cavità della vescica.

La mancanza di antagonismo fra lo sfintere e il detrusore della vescica l'abbiamo anche resa evidente con un secondo metodo. Per la via del perineo si pone a scoperto l'uretra prostatica tagliando l'uretra fino in prossima vicinanza del collo della vescica; quindi si apre la cavità dell'addome e si scopre la vescica. Si introduce una cannula per la via di un uretere e si pone la cavità della medesima in comunicazione con una boccia di Mariotte. Si determina la pressione necessaria ad ottenere lo scolo del liquido dall'uretra; determinato questo valore si aumenta artificialmente il tono del detrusore con irritazioni fatte sul medesimo e si osserva quale è l'aumento necessario alla pressione per riprodurre l' incontinenza.

In una di queste esperienze si ebbero i seguenti risultati:

Incontinenza nello stato normale pressione	35 cent.
Dopo una irritazione meccanica del detrusore	50 cent.
Dopo applicazione del freddo sul fondo della vescica. .	44 cent.
Dopo irritazione meccanica	44 cent.
Dopo irritazione con corrente indotta	46 cent.
Aspettando pareccchi minuti la vescica ritorna allo stato normale del tono e diede incontinenza con . . .	35 cent.

Da queste esperienze abbiamo conchiuso: che quando incomincia la contrazione della vescica, non si rilascia lo sfintere della medesima,

ma diviene anzi più difficile il passaggio dell'orina a traverso lo sfintere. È solo col progredire della contrazione delle pareti vescicali, che la pressione del liquido contenuto nella cavità di quest'organo, diventa capace di superare la maggior resistenza presentata dallo sfintere della vescica e si ha l'emissione dell'orina.

Emissione involontaria dell'orina. — L'autonomia che viene rivendicata per mezzo delle nostre esperienze alla vescica nella funzione del mingere ci spiega facilmente alcuni fenomeni che rimasero fino ad ora incompresi. È noto che per lo spavento tanto l'uomo quanto gli animali possono spandere involontariamente l'orina. L'impotenza di trattenere il piscio in tali condizioni aveva indotto i fisiologi ad ammettere che si trattasse di una paralisi dello sfintere. Le nostre indagini contraddicono apertamente una simile supposizione: perchè mettendo una cannula nella porzione membranosa dell'uretra trovammo che quando si spaventa un animale con grida o con improvviso dolore devesi impiegare una pressione assai più forte per far penetrare il liquido in vescica. La resistenza dello sfintere non diminuisce dunque, ma diviene anzi maggiore: e l'orina esce dalla vescica perchè la contrazione del detrusore raggiunge tale grado di potenza da superare tutti gli ostacoli che lo sfintere e i muscoli volontari vi oppongono. Questa contrazione della vescica che insorge durante le forti emozioni è in tutto analoga alla contrazione dei vasi sanguigni che uno di noi osservò in condizioni analoghe nell'uomo. La corrispondenza nello stato dei vasi sanguigni e della vescica ci spiega egualmente il bisogno di mingere che insorge frequentissimo nelle preoccupazioni dell'animo. In varie circostanze della vita (per servirci di esempî noti, ricorderemo quanto succede agli studenti prima di presentarsi agli esami ed ai professori prima di presentarsi a far lezione davanti un pubblico numeroso) si sente un forte stimolo ad orinare, il quale si ripete anche quando abbiamo la certezza che deve essere assai piccola la quantità di orina contenuta in vescica. Questo bisogno non è dovuto a soverchio riempimento della vescica e a una distensione di quest'organo, ma solo ad uno stato persistente di contrazione analoga a quella che osservasi contemporaneamente nei vasi sanguigni.

CAPITOLO VIII.

Dottrina della pressione vescicale.

Come si senta il bisogno di orinare. — Nel precedente capitolo abbiamo veduto che la pressione addominale non è necessaria per vuotare la vescica: e che i mutamenti osservati nel respiro possono essere un fatto concomitante, anzichè un fattore essenziale di questa funzione: dobbiamo ora cercare come si produca il sentimento di pienezza della vescica, e come ne venga lo stimolo e il bisogno di vuotarla.

Rammentiamo innanzi tutto il fatto notissimo che nelle varie circostanze della vita si spandono delle quantità assai differenti di orina: e che nel maggior numero dei casi non abbiamo un giusto apprezzamento del liquido accumulatosi in vescica, se non dopo aver svuotato naturalmente quest'organo. Anche quando oriniamo senza partecipazione cosciente della volontà, come succede spesso nella defecazione, noi

ci accorgiamo che dopo aver svuotato in parte la vescica può insorgere nuovamente, e spesso assai imperioso, il bisogno di orinare. Queste ed altre osservazioni ci dimostrano come non sia necessario che si raggiunga sempre il medesimo grado nella distensione della vescica perchè nasca spontaneamente lo stimolo all'emissione dell'orina.

Da una serie di ricerche che abbiamo fatto sulla vescica per determinare come si dilatasse quest'organo sotto pressioni successivamente più grandi le quali agissero per un tempo determinato, risultò il fatto interessante che il bisogno di orinare sta in rapporto colla pressione esercitata dal liquido sulle pareti della vescica. Riferiremo alcune esperienze in proposito fatte sulla cagnetta nera del peso di kilog. 5,500 di cui si parlò già antecedentemente. Si tratta di esperienze analoghe a quelle indicate dalla formola $V\ (P\,T)$ di cui abbiamo esposto il metodo e descritto l'apparecchio nel capitolo IV, pag. 25. Nella seguente tabella sono indicate la temperatura dell'acqua e la pressione sotto cui durante uno spazio determinato di tempo penetrano nella vescica i volumi di acqua indicati nella penultima colonna. I numeri grossi indicano il momento in cui l'animale cessa di essere tranquillo, e dà segno coi movimenti del corpo e colla sua irrequietezza di voler orinare.

Le osservazioni di questa tabella dimostrano che la vescica non si dilata sempre in modo eguale per la medesima pressione. La vescica può contenere delle quantità assai differenti di orina a seconda delle condizioni in cui si trova l'animale. Il fatto più interessante è che il bisogno di orinare sorgeva costantemente in questa cagnetta ad una pressione di 20 cent. I numeri che noi abbiamo riferito in queste tabelle non hanno un valore assoluto, perchè sappiamo che la vescica si dilata lentamente sotto una pressione qualunque.

TABELLA

Osservazioni fatte per determinare la quantità di acqua che in varie condizioni penetrarono in vescica prima che si destasse una contrazione della medesima. I numeri scritti più in grosso indicano i centim. cubici che erano penetrati in vescica nel momento in cui l'animale diede segno di voler emettere l'orina.

13 aprile. Dopo aver mangiato pane e latte in abbondanza, ore 2 pom.

Pressione in centim. di acqua	Tempo in minuti	c. c. di acqua penetrata
5	4′	0
10	»	5
15	»	54
20	»	**123**
5	4′	0
10	»	3
15	»	135
20	»	**145**

14 aprile. L'animale è digiuno, ore 9 antim.

Pressione in centim. di acqua	Tempo in minuti	c. c. di acqua penetrata
5	10′	0
5	10′	3
10	»	95
15	»	175
20	»	**210**

14 aprile. Si cloroformizza l'animale; il sopore è poco profondo, ore 9,30 antim.

Pressione in centim. di acqua	Tempo in minuti	c. c. di acqua penetrata
5	10′	0
10	10″	0
15	»	95
20	»	**95**

18 aprile. Dopo aver mangiato abbondantemente, ore 2 pom.

Pressione in centim. di acqua	Tempo in minuti	c. c. di acqua penetrata
5	5′	15
10	»	85
15	»	135
20	»	**180**

18 aprile. Un' ora dopo aver amministrato un grammo di cloralio idrato. L'animale è molto irrequieto, ore 3 pom.

Pressione in centim. di acqua	Tempo in minuti	c. c. di acqua penetrata
5	5″	0
10	»	20
15	»	50
20	»	**97**

Da queste esperienze risulta che quando un cane è digiuno può tenere una quantità maggiore di acqua in vescica senza sentire il bisogno di orinare che non quando ha mangiato, che tutte le cause le quali eccitano l'animale producono un aumento di tono, e fanno sentire il bisogno di orinare quando nella vescica è contenuta una quantità relativamente piccola di orina. Che il cloralio diminuisce il tono della vescica; però l'animale addormentato orina ad una pressione minore dell'animale sveglio, e questo probabilmente per la facilità maggiore ai movimenti riflessi che si sa essere propria del sonno.

Il cloralio iniettato nel retto produce in via riflessa per l'irritazione della mucosa rettale un aumento di tono, per cui la vescica, malgrado che l'animale dorma, si lascia distendere più difficilmente che per una dose eguale di cloralio amministrata per bocca.

Riproduciamo il tracciato delle esperienze che abbiamo già esposto nel capitolo IV intorno allo studio della tensione delle pareti vescicali, da cui risultò come il bisogno di orinare in una cagnetta insorgesse sempre quando la pressione raggiungeva presso a poco il valore di 20 cent. di acqua, mentre invece le quantità di acqua contenute nella vescica variavano come 60, 120, 190. Queste esperienze ci fanno ritenere che lo stimolo a svuotare la vescica insorge in rapporto colla pressione del liquido contenuto nella medesima e non con la quantità del liquido che essa contiene.

Esperienze fatte sull'uomo e sulla donna che confermano la dottrina della pressione vescicale. — Citeremo prima un'esperienza semplicissima che tutti abbiamo fatto sopra noi stessi. Nella notte si riempie la vescica assai più di quanto succeda nel giorno senza che, fino ad una certa età, sentiamo il bisogno di emettere l'orina. La ragione dei questo fatto sta in ciò che nel sonno il tono della vescica è, come quello dei vasi sanguigni, assai diminuito: e non cresce notevolmente finchè restiamo coricati sotto il tepore delle coltri. Appena ci scopriamo, o ci alziamo succede una contrazione dei vasi alla superficie del corpo, di cui spesso ci accorgiamo, perchè sotto l'impressione dell'aria più fredda comparisce la pelle d'oca alle braccia ed alle gambe. Se mettiamo un catetere in vescica, e, quando è cessata l'emozione, ci scopre l'ammalato la contrazione della vescica è assai più forte, se la temperatura esterna è bassa, che quando siasi prima riscaldata la camera a 28° o 30°. Tutto ciò che fa restringere i vasi sanguigni produce anche una contrazione della vescica. Questo fatto ci spiega perchè solo alzandoci da letto si fa sentire il bisogno di orinare, e perchè molte persone in condizioni patologiche non riescano ad eccitare una contrazione della vescica se non quando scendono dal letto e mettono i piedi nudi sul pavimento freddo. Il bisogno di orinare insorge quando aumenta il tono della vescica. Questa dottrina che risulta come deduzione logica dai fatti osservati negli animali venne confermata pienamente dalle esperienze seguenti che noi facemmo sulla donna, introducendo dell'acqua calda, o dell'acqua fredda in vescica.

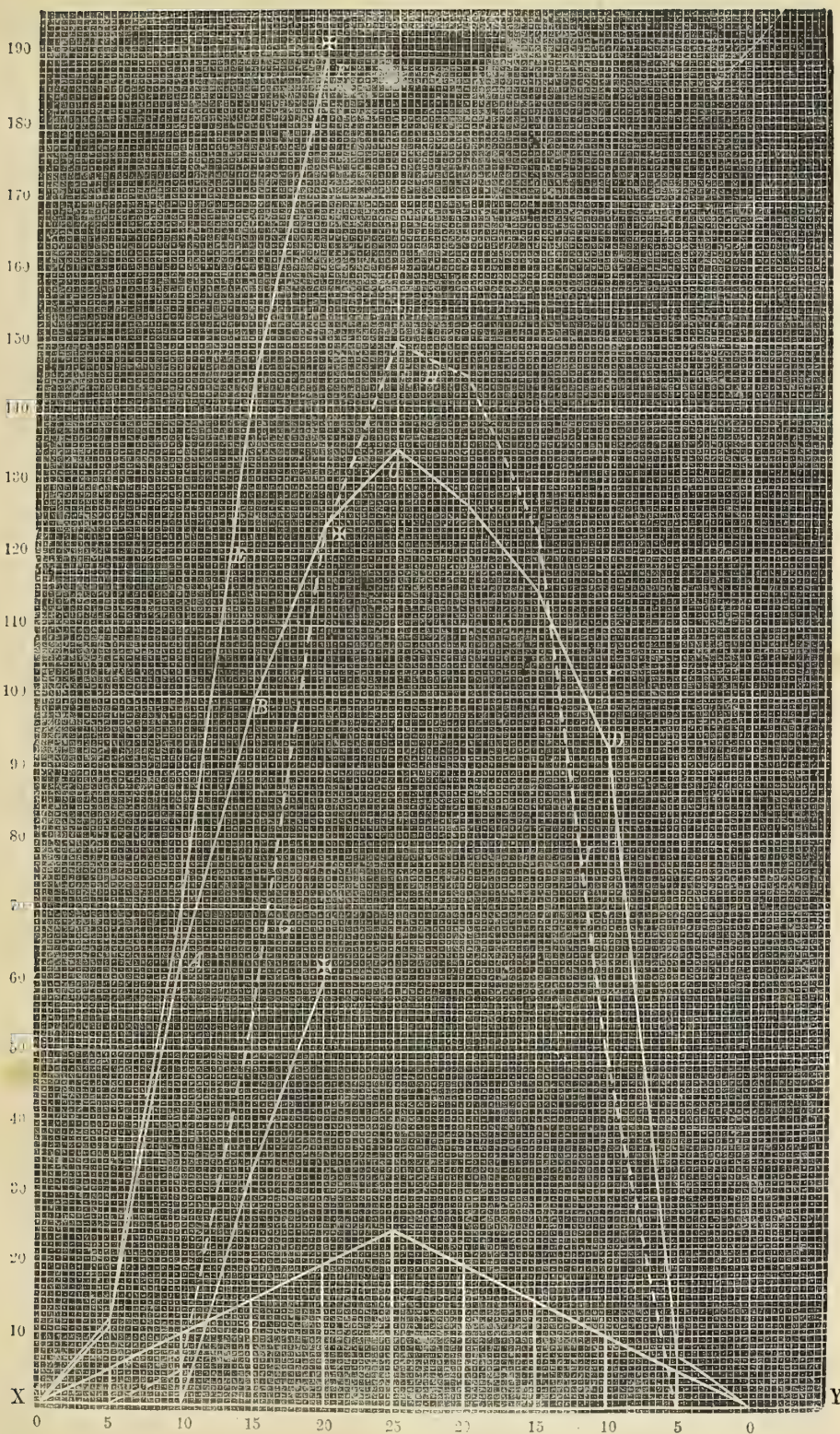
2 luglio 1881. Ragazza di 18 anni affetta da sifilide cutanea quasi completamente guarita. Ore 8 ½ antim. La paziente ci dice che orinò poco prima. Si introduce il catetere in vescica che viene messo in comunicazione coll'apparecchio descritto nel capitolo IV. L'ammalata giace sul letto colle gambe leggermente divaricate.

Per non dare una tabella troppo lunga riferiremo solo le quantità di liquido che erano penetrate in vescica nel momento in cui la ragazza sentiva il bisogno di emettere l'orina: avvertendo che la pressione dell'acqua in vescica si faceva crescere in modo uniforme, incominciando sempre da zero, e svotando prima completamente la vescica.

Temperatura dell'acqua che penetrava in vescica	Pressione in cent. di acqua	C. C. di acqua penetrati in vescica	
37°	16	10′	620
16° a 18	18	9′	480
22	18	10′	516
6°	18	8′	470
6°,5	18	13′	418

Da queste cinque esperienze fatte successivamente nella medesima ragazza risulta che per effetto delle variazioni prodotte nella temperatura dell'acqua penetrarono nella vescica delle quantità di liquido assai differenti fra loro: cioè 620 c. c. a 37° colla pressione di 16 cent.: e solo 418 c. c. a 6°,5 colla pressione di 18 cent.

La concordanza che esiste nelle quattro ultime esperienze dove lo stimolo ad emettere l'orina insorge per 4 volte di seguito alla pressione di 18 centim. mentre la quantità di liquido penetrata sotto questa pressione varia fra 516 e 418 centim. cubici ci fa ritenere: che la pressione cui sono soggette le pareti della

Fig. 11.

Curve di 4 esperienze fatte successivamente nel medesimo cane per determinare l'elasticità della vescica a digiuno e dopo il pasto. I numeri scritti a sinistra sulle ordinate rappresentano i centim. cubici di acqua penetrati in vescica in tempi eguali sotto pressioni rappresentate in centimetri di acqua, i cui valori sono scritti sull'ascissa X Y.

vescica e non il differente grado della loro distensione produca lo stimolo alla emissione dell'orina.

Come cessi la sensazione di pienezza della vescica e il bisogno di orinare. — Dopo aver cercato il modo con cui si genera il sentimento di pienezza della vescica, ci siamo occupati di vedere come esso scompaia, quando si trattiene l'orina. Le esperienze in tale riguardo furono semplicissime. Quando producevasi negli animali una forte contrazione della vescica, ed essi dimostravano colla grande irrequietezza di voler emettere l'orina, abbiamo chiuso la via di scarico, comprimendo colle dita il tubo di gomma che faceva comunicare il catetere cogli apparecchi. Nei cani che avevano una cannuccia legata nell'uretra membranosa, venne sollevata la buretta fino a tale altezza da impedire che gli sforzi dell'animale potessero riuscire a cacciar fuori dalla medesima l'orina. In queste condizioni abbiamo veduto che dopo breve tempo la contrazione della vescica cessava, e constatammo una notevole diminuzione nel tono della medesima, per cui portando la buretta a zero per determinare la pressione del liquido contenuto in vescica, trovammo una pressione inferiore a quella che esisteva nel momento in cui incominciò la contrazione. Il bisogno di orinare scompare dunque perchè diminuisce la pressione nella vescica. Questo fatto venne da noi osservato ripetutamente nella donna. Se si aggiunge dell'acqua in vescica si trova presto quel grado di pressione che eccita il senso di pienezza; a questo punto si chiude il tubo di gomma che fa comunicare il catetere colla buretta dell'apparecchio descritto a pag. 25: e si fa parlare l'ammalata, cercando di distrarla. Il bisogno di orinare cessa in breve tempo. Appena sia scomparso, se si apre nuovamente il tubo di comunicazione colla buretta noi troviamo che la pressione nella vescica è minore di prima.

Questo meccanismo con cui scompare il bisogno di emettere l'orina, quando la contrazione dello sfintere esterno impedisce il conato della contrazione del muscolo detrusore è una nuova conferma della nostra dottrina. Infatti in questi casi malgrado che la distensione delle pareti vescicali sia divenuta maggiore, scompare in lunghi periodi il sentimento di pienezza della vescica, come lo sappiamo dall'esperienza di tutti i giorni. La scomparsa di questo bisogno sta dunque in rapporto col senso della pressione del liquido contenuto in vescica, non colla distensione delle pareti di quest'organo.

Ricerche di Dubois intorno alla pressione nella vescica. — Nel 1876 Dubois [1] in un lavoro fatto sotto la direzione del prof. Quincke misurò la pressione vescicale in differenti persone nello stato normale e patologico. Il metodo adoperato era lo stesso di cui erasi già servito Schatz per lo studio della pressione addominale [2].

Un catetere metallico veniva introdotto nella vescica e per mezzo di un tubo di gomma veniva messo in comunicazione con un tubo di vetro lungo circa 150 cm. Una misura metrica di cui lo zero stava all'altezza della sinfisi del pube indicava la pressione sotto cui trovavasi l'orina nella vescica.

Siccome però la vescica riempiendosi, il suo vertice si solleva e le misure prese

(¹) P. Dubois, *Ueber den Druck in der Harnblase.* Deutsches Archiv. für klinische Medicin XVII, B. II und III Heft. 1876, pag. 148.

(²) Schatz, *Die Druckverhältnisse im Unterleib des nicht belasteten und die Bauchpresse nicht willkürlich anstrengenden Menschen.* Leipzig, 1872.

alla sinfisi del pube devono subire delle correzioni, egli fece un esperimento sul cadavere dal quale stabilì che il vertice della vescica superava

la sinfisi a 500 di 1 cm.
» » 700 » 2 »
» » 900 » 3 »

Per mezzo di questi numeri, facendo le opportune correzioni, giunse egli a conchiudere che la pressione nella vescica è approssimativamente costante, e disse che i risultati di circa 50 esperimenti sono riusciti poco discordanti l'uno dall'altro.

Le determinazioni erano fatte come dice Dubois immediatamente dopo l'introduzione del catetere in vescica. Questo fatto è causa di una grave complicazione perchè stando alle nostre esperienze, si devono aspettare dei valori molto più elevati per lo stimolo alla contrazione, che produce un corpo estraneo introdotto nell'uretra. Per conoscere il valore della pressione si deve aspettare che la sensazione molesta sia cessata, e ciò richiede un certo tempo. Così noi spieghiamo perchè nelle ricerche di Dubois dovesse trovarsi una pressione quasi eguale in tutti; perchè in quasi tutti sentivasi lo stimolo all'emissione dell'orina per l'introduzione del catetere nella vescica.

Dubois dicendo che la pressione nella vescica *ist annähernd ein constanter* intende con ciò di stabilire dei limiti abbastanza vasti tra i 13 e 15 cm. come media, lasciando sotto silenzio alcuni casi dove ottenne dei valori assai disparati. Dalla prima tabella delle osservazioni fatte nello stato normale, o dietro passeggiera ritenzione ricaviamo il valore delle determinazioni fatte in posizione orizzontale, tralasciando le altre che vennero fatte sopra persone ammalate o sopra persone sane ma che erano sedute o stavano in piedi.

Pressione da	cent.	cubici	Pressione da	cent.	cubici
14 a 16	cent.	250 cubici.	14 a 16	cent.	100 cubici.
» 12 a 13	»	600 »	» 11 a 15	»	500 »
» 11 a 13	»	600 »	» 10 a 13	»	400 »
» 12 a 13	»	600 »	» 10 a 13	»	300 »
» 13	»	400 »	» 9 a 12	»	200 »
» 12	»	300 »	» 10 a 13	»	100 »
» 11	»	200 »			

Noi troviamo che per delle pressioni di 14 a 16 si può avere 100 c. c. di orina in vescica: mentre se ne possono avere 600 con una pressione di 11 a 13. Facendovi le correzioni indicate le differenze diventano anche maggiori.

I risultati del Dubois non si accordano quindi completamente colla sua conclusione, che la pressione nella vescica sia approssimativamente costante. Noi osserviamo anzi in molti casi un difetto di corrispondenza fra la pressione ed il contenuto che si accorda con quanto venne da noi stabilito, studiando il tono della vescica in circostanze differenti negli animali e nell'uomo.

I casi che si accordano fra di loro e che stanno più vicini alla media di 13 a 15 sono quelli, secondo le nostre esperienze, nei quali la vescica erasi riempita tanto da destare la voglia di mingere e nei quali eravi stato una ritenzione di breve durata; negli altri mancava questo bisogno la vescica non essendo ancora abbastanza distesa, rimanendo però leggermente contratta in seguito allo stimolo del catetere introdotto recentemente nella vescica.

CAPITOLO IX.

Influenza della respirazione sui movimenti della vescica.

Arresto dei movimenti respiratorî. — La facilità grandissima con cui si produce una contrazione della vescica tutte le volte che succede un mutamento psichico ci rendeva certi che avremmo osservato un movimento della vescica ad ogni cambiamento volontario del respiro. Nello studio dell'influenza che i movimenti respiratorî possono avere sulla tonicità delle pareti vescicali la nostra attenzione doveva rivolgersi particolarmente a tre differenti ordini di fenomeni, cioè:

1° alla compressione meccanica che abbiamo studiato nel secondo capitolo col nome di movimenti passivi;

2° ai fenomeni di contrazione che dipendono dai fatti psichici; e di questi ci siamo pure occupati nel secondo capitolo;

3° ai cambiamenti di tono, cioè alla contrazione ed al rilassamento che possono succedere per l'influenza che una differente proporzione dei gas contenuti nel sangue esercita sui muscoli della vescica.

Per distinguere fra di loro i fenomeni che appartengono a questi due ultimi gruppi abbiamo pensato di paragonare fra di loro i tracciati che si ottengono dalla vescica per due fatti psichici: durante i quali in uno vi fosse solamente l'effetto dell'attenzione e nel secondo oltre all'attenzione anche un mutamento determinato nel ritmo e nella profondità dei movimenti respiratorî.

Ad una ragazza, di professione cuoca, nel mattino del 30 giugno si introduce un catetere in vescica e si mette la cavità di quest'organo in comunicazione col pletismografo sotto una pressione di 8 centim. di acqua. Dopo circa 16 minuti quando dalla regolarità del tracciato ci accorgiamo che la ragazza è profondamente tranquilla, uno di noi le rivolge la parola spiegandole lo scopo dell'esperienza che si tratta di fare.

Si dice cioè, che le si toccherà il naso, premendo leggermente colle dita in modo da chiuderle le narici: e che lei deve trattenere il respiro senza fare alcun sforzo fino a che le si farà cenno di respirare nuovamente. Durante questo discorso la vescica subì una contrazione notevole, con due elevazioni successive. Non riproduciamo per brevità questo tracciato che non differisce per l'altezza e la forma delle ondulazioni da quelli rappresentati nella tavola I, e veniamo subito all'istante in cui la ragazza sospese per 18 secondi il respiro. Passato l'effetto del primo mutamento psichico, appena la vescica è ritornata al volume di prima, si chiude, durante il tratto *A*, tracc. 19, tav. VII, il naso alla ragazza. Essa non arresta completamente il respiro; ma fa col medesimo ritmo di prima 6 movimenti superficialissimi del torace. L'arresto del respiro produce dopo 10 secondi una rapida contrazione della vescica, per cui escono dalla medesima circa 19 centim. cubici di acqua. Appena si aprono le narici succede una profonda inspirazione, e la vescica si dilata.

Avvertiamo di fissare l'attenzione sul fatto che il livello delle pareti addominali non è cambiato nel tratto *A'*, mentre la vescica eseguiva la sua forte contrazione, perchè non si creda che questo svuotarsi della vescica potesse dipendere da un aumento nella pressione addominale durante l'arresto del respiro.

In altri casi per vedere l'influenza che un arresto del respiro esercita sopra le pareti vescicali per l'accumularsi dell'acido carbonico nel sangue indipendentemente dal fatto psichico, o dai movimenti passivi trasmessi dalle pareti addominali abbiamo eccitato una forte contrazione della vescica per l'attività cerebrale e quando ci parve che fosse raggiunto il massimo della contrazione per il fatto psichico della emozione abbiamo arrestato il respiro e si ottenne ancora una contrazione più forte. Queste esperienze di cui crediamo inutile riferire i tracciati confermano il fatto che ogni arresto del respiro produce una contrazione della vescica.

Crediamo egualmente inutile dopo il tracciato 19, tav. VII, di insistere con altri esempî per dimostrare che la contrazione raggiungeva dei gradi sempre maggiori, fino a cacciare fuori 35 cent. cubici di orina, quando lo sforzo per trattenere il respiro veniva spinto dall'ammalata fino all'estremo limite possibile.

Facendo l'esperienza in un cane al quale si chiudeva la trachea dopo aver aperto largamente l'addome ed esserci assicurati tenendo lontani i muscoli addominali che non era possibile un movimento passivo, abbiamo ottenuto delle contrazioni talmente forti della vescica che in alcuni casi non basterebbe l'altezza delle tavole di questa Memoria per riprodurne intera la figura nella scala dei precedenti tracciati.

Per distinguere in queste esperienze ciò che era dovuto all'influenza dell'acido carbonico, o per meglio dire del sangue asfittico sopra gli elementi della vescica e ciò che devesi attribuire all'azione dei centri per l'incipiente asfissia si pensò di tagliare il midollo alla regione lombare (¹). Il risultato di queste esperienze fu una costante contrazione della vescica. Il tracciato 20, tav. VII, ottenuto l'8 aprile 1881 ci dimostra il decorso della contrazione vescicale quale essa producesi in un cane col midollo tagliato alla regione lombare quando si chiude la trachea. La linea sottostante del tempo ci indica come tale contrazione duri circa un minuto primo. Alla contrazione succede un rilassamento delle pareti vescicali. La pressione di circa 6 centim. di acqua cui resisteva la vesciva malgrado il taglio del midollo è ora superiore alla sua tonicità e le pareti della vescica si sfiancano.

Osservando questa contrazione può nascere il dubbio che essa non dipenda realmente da una asfissia locale della vescica, o dall'influenza che il sangue asfittico esercita direttamente sulle pareti della vescica, ma che sia piuttosto un'azione riflessa, ossia una contrazione che dipende da uno stimolo partito dai centri del midollo irritati dalla asfissia. Per risolvere questo dubbio abbiamo distrutto per mezzo di un grosso filo metallico flessibile che veniva introdotto nello speco vertebrale, tutto il midollo dalla regione lombare fino alla estremità del sacro. In queste condizioni si produsse eziandio una contrazione della vescica chiudendo la trachea; donde noi ne concludiamo che: L'asfissia produce una contrazione della vescica anche quando il midollo è tagliato, o distrutto.

Contrazione della vescica per arresto del cuore. — Dopo la contrazione che producesi nella vescica per l'arresto del respiro, quando si chiude la trachea, ne suc-

(¹) Sokowin che si era già occupato di tale problema nella Memoria sopra citata conchiuse che: « Veränderungen des Blutkeislaufs in den Wänden der Harnblase vermittelst Inhibirung der Athmung, « Verblutung, Compression der Bauchaorta, bewirken bei curarisirten Thieren selbst dann (wenn auch « schwache) Zusammenziehung der Blase, wenn zovor alle Nerven durchschnitten waren ».

cede una seconda quando nell'ultimo periodo dell'agonia si arresta il cuore: e finalmente una terza ed ultima, quando alcune ore dopo l'arresto del cuore si manifesta la rigidità cadaverica nei muscoli della vescica.

Il tracciato 21 rappresenta la seconda contrazione che producesi nella morte per asfissia quando si arresta il cuore. Si tratta del medesimo cane ucciso il 16 febbraio 1881 di cui venne riferita una serie di esperienze nel capitolo III con vescica ampiamente scoperta. Si era chiusa 10 minuti prima la trachea (vedi cap. III) ed erasi ottenuta una forte contrazione vescicale. Siccome questa esperienza venne scritta sulla carta continua del chimografo del Ludwig abbiamo dovuto ridurre la figura raccorciandola e conservando la medesima altezza per riguardo alle ordinate. Il tempo segnato sotto in secondi ci mostra come una tale contrazione sia molto più lenta di tutte le contrazioni che abbiamo studiato fin quì.

Ma ancora più lenta di questa è la contrazione per rigidità cadaverica.

In altri cani abbiamo veduto succedere una prima forte contrazione della vescica nel momento in cui si distrusse il midollo allungato per mezzo di un punteruolo, cui seguì una rapida diminuzione di tono della vescica.

Si noti che in questi casi succedeva una diminuzione di tono sotto il valore normale, quantunque la pressione si conservasse molto elevata. Questo fatto è interessante per dimostrare che la tonicità della vescica non sta sempre in immediato rapporto collo stato dei vasi.

Quando vi sono nell'organismo delle condizioni capaci di far contrarre i vasi sanguigni e di eccitare i centri della respirazione, queste fanno contrarre nello stesso tempo le pareti muscolari della vescica. — Per dimostrare che nella vescica possono esistervi delle contrazioni e dei rilassamenti periodici i quali corrispondono alle ondulazioni (respiratorische Schwankungen) che Traube aveva già osservato nei vasi sanguigni, riferiremo un tracciato preso da un cane curarizzato. L'animale aveva ricevuto una piccola dose di curaro circa 20 minuti prima. Malgrado la respirazione artificiale esso eseguiva di quando in quando una leggera inspirazione. Non pare che questi movimenti respiratorî, i quali insorgono spontaneamente, possano produrre degli effetti meccanici ed una compressione passiva della vescica, perchè dopo alcuni minuti potemmo assicurarci che delle inspirazioni più profonde non avevano un effetto notevole sul tracciato della vescica.

Il fatto che colpisce più la nostra attenzione nel tracciato 17, tav. VI, e la serie di ondulazioni presentate dalla pressione sanguigna mentre che la respirazione artificiale procede colla più grande regolarità essendo il soffietto mosso da una macchina a gas Langen e Wolff. Quando la pressione sanguigna diminuisce, la vescica essa pure si dilata; e quando nel periodo successivo i vasi si contraggono, succede nello stesso mentre una contrazione della vescica. Il rapporto che passa tra queste ondulazioni e l'eccitamento dei centri nervosi per l'accumularsi probabile dell'acido carbonico ci viene indicato dal fatto, che corrisponde un leggero conato di inspirazione ad ogni dilatazione successiva della vescica ed abbassamento della pressione.

L'osservazione essendosi continuata per circa tre quarti d'ora, in ultimo si trovò che questi movimenti ondulatorî della vescica erano divenuti molto più deboli, mentre che le ondulazioni nel sistema dei vasi erano alquanto più forti. Noi crediamo che

tale diminuzione nella contrattilità delle pareti vescicali sia dovuta al raffreddamento e ai danni che soffrì quest'organo per l'esposizione troppo prolungata all'azione dell'aria atmosferica.

Influenza di una profonda inspirazione e dell' apnea sul tono della vescica. — Il tracciato 22, tav. VII, venne preso sopra una ragazza di professione cuoca di cui abbiamo già riferito precedentemente altre esperienze. Poco dopo aver scritto il tracciato 19 nel quale vedemmo l'effetto di un arresto del respiro, le diciamo che essa deve eseguire una profonda inspirazione quando vedrà che uno di noi le farà un cenno colla mano. Appena è cessato l'effetto psichico di tale avvertimento, la respirazione riprende il suo tipo normale e il tracciato della vescica decorre quasi orizzontale, come si vede nella linea *V D* trac. 22. In *D* le si fa cenno di eseguire una profonda inspirazione. Durante l'abbassamento del diaframma incomincia a manifestarsi una elevazione della curva che si continua nella espirazione successiva fino in *L*.

Quindi succede un breve arresto del respiro durante il quale la curva della vescica scende rapidamente. La dilatazione della vescica giunge fino in *M* scendendo notevolmente al disotto del livello primitivo *V D* quantunque le pareti addominali abbiano in *Q* la stessa posizione che avevano prima di eseguire la profonda inspirazione.

Questa esperienza dimostra che: *una profonda inspirazione indipendentemente dall'effetto psichico, e da ogni azione meccanica produce una diminuzione di tonicità nelle pareti vescicali.*

Il tracciato 23 può considerarsi come la continuazione del precedente, perchè venne scritto cinque minuti dopo. In esso è rappresentata l'influenza che una serie di profondi movimenti respiratorî esercitano sulla tonicità della vescica.

Per evitare il dubbio che le forti inspirazioni potessero colla loro azione meccanica alterare i risultati, abbiamo adoperato la precauzione di chiudere colle dita il tubo che fa comunicare la vescica col pletismografo nell'istante in cui facevasi cenno alla ragazza di incominciare una serie di forti respirazioni. È per questa ragione che il tratto *VA* appare come una linea orizzontale, mentre si eseguiscono dei forti movimenti respiratorî. Quando in *A'* si fa cenno alla ragazza di arrestarsi, si apre contemporaneamente il tubo di comunicazione colla vescica e noi vediamo che si è prodotto una notevole diminuzione nella tonicità della vescica: perchè la vescica si dilata quantunque la pressione sia rimasta costante e la linea *A B* viene ad intersecare il tracciato della respirazione addominale. Noi conchiudiamo che *l'apnea produce una diminuzione nel tono della vescica.* Questo fatto diventerà più interessante quando se ne terrà conto studiando le cause complicatissime che producono un abbassamento della pressione sanguigna durante l'apnea.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Tracciato 1. Movimenti della vescica di un cane per fatti psichici. In *G* entra una persona nella stanza. In *P* la persona che sorreggeva la testa dell'animale cambia di posizione. Le oscillazioni *a*, *b*, *c*, ecc. indicano i movimenti respiratorî passivi della vescica.

Tracciato 2. Movimenti della vescica di un altro cane. La velocità del cilindro è minore. In *A* si tocca la coda all'animale. In *B* gli si tocca leggermente lo scroto.

Tracciato 3. Movimenti della vescica nella donna. In *T* le si tocca la mano. In *C* sente un rumore. In *P* le si rivolge la parola. In *R* parla. La linea *T* segna il tempo in secondi.

Tracciato 4. Movimenti della vescica nella donna. In *A* le si dice di darle un pizzico. In *N* si dice una facezia. *R* Movimenti del respiro scritti contemporaneamente.

Tracciato 5. Contrazione della vescica che si produsse mentre si moltiplicò a mente 7 × 12.

Tracciato 6. Altra contrazione della vescica scritta sulla medesima ragazza mentre moltiplicava mentalmente 13 × 12.

Tavola II.

Tracciato 7. Contrazione volontaria della vescica prodottasi in seguito ad un cenno che viene fatto alla ragazza nel punto *α*. In *ω* si dice di sospendere la contrazione. *R* Movimenti del respiro scritti contemporaneamente. *T* Misura del tempo in secondi.

I tracciati 8, 9, 10, 11, 12 rappresentano le varie fasi di una esperienza fatta sopra un cane per studiare i rapporti della respirazione e della pressione sanguigna coi movimenti della vescica. In *B* mentre la cavità dell'addome era aperta succede una contrazione della vescica di cui non conosciamo la causa. La linea *T* in questo e nei successivi tracciati segna il tempo in secondi.

Tavola III.

Tracciato 9. Le contrazioni *F G H* dipendono esse pure da cause che ci sono sconosciute.

Tracciato 10. Contraz. della vescica in *L* durante un abbassamento della pressione sanguigna in *I K*.

Tavola IV.

Tracciato 11. In *A* e in *D* si grida forte vicino all'animale.

Tracciato 12. In *B* si batte colla nocca del dito indice sul tavolo, dove era legato l'animale. In *T* gli si toccano le gambe.

Tavola V.

Cambiamenti di tono della vescica durante il sonno prodotto dall' idrato di cloralio.

Tavola VI.

Tracciato 15. Dimostra che la pressione addominale non è necessaria per emettere l'orina. Infatti la linea *R* che segna i movimenti respiratorî dell'addome non presenta alcuna variazione prima che esca l'orina in *M* nella linea *V*.

Tracciato 16. Si scrive contemporaneamente la respirazione addominale e toracica. In *α* incomincia l'emissione dell'orina segnata in *M*, linea *S*. In *C* si fa cenno di arrestare l'emissione dell'orina.

Tracciato 17. Oscillazioni respiratorie della pressione sanguigna, linea *P*: e contrazioni corrispondenti della vescica, linea *V*. La respirazione artificiale nell'animale curarizzato è scritta colla linea *R*.

Tavola VII.

Tracciato 18. Contrazione spontanea della vescica da *α* in *ω*, prodottasi in una donna senza modificazione notevole della pressione addominale *R*.

Tracciato 19. Contrazione della vescica durante una breve sospensione del respiro nella donna.

Tracciato 20. Contraz. della vescica per asfissia in un cane col midollo tagliato alla regione lombare.

Tracciato 21. Contrazione prodottasi quando si arrestano i battiti del cuore nell'ultimo periodo dell'agonia.

Tracciato 22. Diminuzione del tono vescicale nella donna in seguito ad una profonda inspirazione.

Tracciato 23. Dilatazione della vescica in seguito ad una serie di profonde inspirazioni.

G a b c

A

T C

T

A B

R

R 7 × 12

S 13 × 12

Torino, Lit. F.^{lli} Doyen.

Torino, Lit. F.lli Doyen.

T
T
V
α
α'
R
R
C
P
D
V
A
B
T

Torino, Lit. F.lli Doyen.

Tracc.º 9

R F

P F

V E F G H

T

Tracc.º 10

R

P I K

V L M

T

Torino, Lit. F.lli Doyen

T

R
F

P
F

V
E
F

T

R

P
I

K
M

V
L

T

G

H

Torino, Lit. F.lli Doyen

Trac.ᵉ 13
R
C
D
E
R'
I
II
B
T
Trac.ᵉ 14
R
S
III
VI
G
H
I
N
IV
M'
M
F
V
T
Torino. Lit. F.lli Doyen

C
R
I
II
B
T
III
VI
G
IV
N
V
T

Torino Lit. F.lli Doyen

Trac^to 13

R C D I II B E R' T

Trac^to 14

R S III VI H G I IV N M' M V F T

Torino Lit. F.lli Doyen

Tr
R
P
V
A
T
Tr
R
P
V
B
T

Torino, Lit. Fˡˡⁱ Doyen

Torino, Lit. Fli Doyen

V m n

R

S m n

d

Ad. c

Tor. C' D

R f g h

V a b

P m n o

T

B
6
i
l
d
e
p
q
r
Torino. Lit. F.lli Doyen.

Torino. Lit. F.lli Doyen.

Tracᵗᵒ 18
ω
V
α
R
S
T
Tracᵗᵒ 20
V
C
α
P
T
Tracᵗᵒ 22
L
V
D
M
N
D'
R
P
Q
T

Mosso e Pellacani — Funzioni della Vescica —— TAV. VII
Tracᵗᵒ. 19
V
A
N
R
A'
T
Tracᵗᵒ. 21
V
M
0
10"
20"
30"
40"
50
60"
70"
80"
90"
100"
110"
120"
130"
140"
150"
160"
Tracᵗᵒ. 23
V
A
A'
B
R
Torino. Lit. F.lli Doyen.

Studî geologici e paleontologici sul cretaceo medio dell'Italia meridionale.

Memoria del prof. G. SEGUENZA

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 3 febbraio 1878.

Premiata al Concorso Accademico istituito dal Ministero di Agricoltura, Industria e Commercio col r. Decreto 6 febbraio 1876.

(Con ventuno tavole)

PREFAZIONE

Tempo già fu non lungi dal nostro, in cui estese rocce, diversissime per litologica costituzione, per condizioni topografiche e stratigrafiche, per età e per ogni altra maniera di caratteri, venivano associate insieme in Italia sotto la comune caratteristica di *Formazione cretacea,* descritte siccome spettanti a tale epoca nei trattati generali e nelle speciali memorie, e così indicate nelle carte geologiche e negli spaccati, senza che l'età loro venisse dimostrata nè dai fatti stratigrafici, nè dai valevolissimi caratteri paleontologici, sovente del tutto mancanti ed in vastissimi depositi, spesso anco malamente interpetrati.

Di tal guisa ne risultavano quindi le più bizzarre associazioni, i più strani anacronismi; ed al vero cretaceo raro e poco esteso in Italia, si annettevano vaste e potenti formazioni terziarie spettanti a varî periodi e non sempre dei più antichi.

Oggi, grazie agli odierni progressi, alle accurate investigazioni stratigrafiche e paleontologiche, non più si ripetono tali mostruose associazioni; dobbiamo specialmente alle sagaci investigazioni del celebre Murchison, al suo classico lavoro sulle Alpi, gli Appennini e i Carpazî (¹) l'essersi fatta la luce intorno all'età della formazione nummulitica ed ai suoi rapporti sincronici, l'essersi risoluto così uno dei più importanti problemi della geologia europea. Tale definizione venne mano mano sanzionata dalle numerose scoperte posteriori, e dall'assenso universale, e mise un argine contro ogni ulteriore confusione dei terreni terziarî coi cretacei.

Ne seguirono quindi accurati confronti delle serie stratigrafiche delle varie regioni d'Italia con quelle classiche di tante parti d'Europa, numerose e crescenti scoperte paleontologiche, che valsero a stabilire e distinguere ogni membro del cretaceo da tutte le formazioni di età terziaria.

Oggi sono ben rari i casi in cui si presentano dei dubbî intorno a tale distinzione e soltanto il completo difetto di fossili, può indurre delle incertezze; e mentre la carta del Collegno assegnava vasta superficie al cretaceo dell'Italia meridionale e

(¹) R. Murchison, *Memoria sulla struttura geologica delle Alpi, degli Appennini e dei Carpazî.*

specialmente della Sicilia, la futura carta geologica non registrerà che limitati e sparsi affioramenti di terreni degli ultimi periodi della grande era mesozoica.

Il cretaceo medio dell'Italia meridionale, di cui imprendo la trattazione in questo mio lavoro, costituisce qua e là degli affioramenti poco estesi, che per l'uniformità perfetta dei loro caratteri, per l'abbondanza e la conservazione dei fossili caratteristici che racchiudono si riconoscono colla massima agevolezza, e non possono dar luogo giammai a dubbî od equivoci relativi alla loro età.

Dopochè il chiarissimo prof. Meneghini richiamava l'attenzione dei paleontologi sul cretaceo di Sicilia colla descrizione di alcune ostree ad esso spettanti, io ebbi l'agio di scoprire in molti luoghi siciliani e calabresi la formazione medesima ed in una serie di note ne annunciai la ricognizione, ne ricordai i caratteri, ne enumerai e descrissi i fossili più comuni.

Trascorsi ormai oltre tre lustri dalla prima scoperta, ed in questo lungo periodo avendo seguìto con perseveranza le ricerche sul cretaceo si sono moltiplicate le scoperte, le indagini indefesse mi hanno somministrato una serie di documenti importanti, ed una ricca messe di fossili. Era tempo ormai che a brevi ed incomplete pubblicazioni seguisse un lavoro generale, accurato, minuzioso, che comprendesse e comparasse tutti i dati topografici, litologici, stratigrafici e paleontologici dei varî lembi del cretaceo medio italiano e delle varie contrade dove esso presentasi, che riunisse insieme in bell'ordine i fatti che furono già annunciati e quelli ancor più numerosi che non furono sinora pubblicati; che offrisse delle vedute generali ed esponesse i rapporti del nostro col cretaceo delle altre regioni.

È questo appunto il lavoro che io presento oggi al pubblico scientifico, dopochè per lunghe ricerche ed assidue ho raccolto i documenti necessarî per tale trattazione. In essa insieme alla esposizione dei caratteri litologici e stratigrafici avranno posto le quistioni relative ai limiti ed alla partizione del cretaceo medio, questioni riferentisi ai caratteri che lo distinguono dai terreni che ad esso per topografica e stratigrafica distribuzione si connettono e che moltissimo gli somigliano per la costituzione litologica.

Siffatto argomento conduce alla quistione, non mai trattata abbastanza, delle argille scagliose, cotanto importante per la geologia italiana, e porta alla dimostrazione e conclusione delle varie età di siffatta roccia.

La monografia del cretaceo medio dell'Italia meridionale che presento oggi, viene divisa in due parti: nella prima tratto le questioni geologiche, la seconda è destinata esclusivamente alle notizie paleontologiche.

Ho creduto essere affatto indispensabile corredare il mio lavoro con due frammenti di carta geologica i quali fossero atti a dimostrare la estensione del cenomaziano nel Reggiano e nel Messinese, la sua topografica distribuzione, nonchè i rapporti relativi che esso serva costantemente coi terreni sottostanti e coi successivi.

Talune sezioni importantissime che fanno seguito alle carte suddette valgono a rischiarare viemmeglio tali rapporti ed a dimostrare anco la stratigrafica costituzione del cretaceo stesso.

Una serie di tavole succedono quindi ad illustrare la parte paleontologica, rappresentando le nuove specie di fossili e talune varietà sconosciute di specie note.

PARTE PRIMA

GEOLOGIA DEL CRETACEO MEDIO DELLE PROVINCIE MERIDIONALI D'ITALIA.

CAPO PRIMO

Notizie storiche.

§ 1. *Scrittori antichi.*

Sarebbero vani ed inutili sforzi quelli che volessero adoperarsi a riconoscere la scoperta della formazione cretacea, non dico nei libri di scrittori che precessero il nostro secolo, ma benanco in mezzo a quella variata serie di rocce e di strati secondarî e terziarî confusamente associati insieme e descritti in quei lavori variamente estesi, che trattarono della geologia dell'Italia meridionale nella prima metà dell'attuale secolo, nei quali una tale accozzaglia di terreni vien presentata sotto unica categoria e sovente colla denominazione di cretaceo. Cosifatta associazione eterogenea, e sovente di un completo anacronismo, più che attribuirsi alla poca dottrina e perspicacia degli osservatori, devesi riferire alle gravi difficoltà inerenti alla costituzione di siffatti terreni, la cui distinzione talvolta riesce pressochè impossibile; anzi, bisogna pur confessarlo, l'Italia meridionale venne perlustrata in varî tempi da dotti stranieri, i quali se non pervennero a districare intieramente la intralciata serie dei terreni, ci danno prova evidentissima della difficoltà del compito, annunciandoci ancora una volta, che la stratigrafia di un paese non si perviene a conoscerla bene così di leggieri, ma che bisognano lunghe, reiterate e perseveranti ricerche.

Oltrechè gli studî e le teoriche stratigrafiche cominciavano appena ad iniziarsi in quel grande progresso che doveano raggiungere più tardi, due fatti sopratutto hanno formato il massimo ostacolo alla ricognizione e distinzione cronologica degli strati, che associavansi insieme in unica zona, che denominavasi cretaceo. Il difetto di fossili che nella maggior parte di tali rocce, e sopra vastissime estensioni sperimentavasi da un canto, e d' altro lato l' idea predominante, già più volte cennata, fondata sopra erronee osservazioni, che il nummulitico si fosse il rappresentante della creta, formavano un argine insormontabile al vero progresso stratigrafico.

Il fatto sicuro poi si è quello che il cretaceo medio che nell'Italia meridionale affiora sotto forma di brevissimi lembi, sporgendo fuori da sotto ingente massa di terreni terziarî antichi, che gli sovrastano immediatamente, e ricchissimo come è dovunque di fossili numerosi, non fu peranco osservato da nessuno di quei geologi, che nei primi otto lustri del nostro secolo perlustrarono il suolo dell'Italia meridionale, essi non potevano trascurare un fatto paleontologico di alto momento, che intanto non ricordano menomamente, quello che colpisce a prima giunta sinanco l'uomo volgare, che caratterizza a meraviglia qualunque lembo di siffatto cretaceo; *la grande profusione di ostreidi sparsi alla superficie del suolo*; mentre poi vedonsi comunemente ricordate le rocce ippuritiche del cretaceo superiore; quindi se quegli antichi

scrittori non ricordarono questo terreno con profusissime e variatissime Ostriche è ben sicuro che non lo videro, che non conobbero affatto perciò il cretaceo medio.

Tale scoperta quindi si cerca invano nei lavori pubblicati dal Daubeny, dal Constant Prévost, dal Decken, dall'Hoffmann, dall'Elia de Beaumont, dal Pilla, dal Gemmellaro (Carlo), dal Tchihatckeff, dal Collegno, dal Philippi e da altri.

Il primo scrittore che abbia parlato delle Ostriche del cretaceo medio d'Italia si fu il prof. Pietro Calcara da Palermo, il quale le scopriva presso Caltavuturo [1], e rapportando le più comuni forme a distinte varietà della *Gryphaea arcuata* Lamarck, riferì conseguentemente il terreno che le racchiude alla formazione liassica, credendolo sottostante alla potente massa calcarea del giurassico delle Madonie. In quel lavoro il Calcara descrive pel primo il cretaceo medio, quantunque s'inganna sulla determinazione dei fossili e quindi anco sul conto dell'età geologica.

Più tardi lo stesso scrittore ritornando sulla determinazione specifica delle Ostriche di Scillato e Caltavuturo la riconoseeva erronea [2], ed alle tre forme più comuni imponeva dei nomi, che quindi non poterono per varie ragioni adottarsi. La sua *Gryphaea affinis* è l'*Exogyra africana* Lamarck; la *Gryphaea plicata minor* è, a mio credere, l'*Exogyra flabellata* Lamarck [3]; e la *Gryphaea plicata major* l'*Exogyra oxyntas* Coquand.

Di poi il Calcara pubblicando le sue ricerche geognostiche sulle Madonie [4] riguarda tuttavia il cretaceo di Scillato presso Caltavuturo, sempre siccome di età liassica, e quindi, secondo lui, formante la base di tutte le altre formazioni, il più antico terreno di quella regione.

§ 2. *Ricerche moderne.*

Il cretaceo medio fu dunque sconosciuto affatto nell'Italia meridionale per tutta quanta la prima metà del secolo corrente, e più ancora; la scoperta del Calcara quantunque riguardasse tale formazione, e l'autore avesse descritto il terreno ed alcuni fossili, pure non fu riconosciuta, nè rettificata, e per lunghi anni non ebbe seguito di sorta. Bisognò che trascorresse oltre un ventennio, cioè sino a quando il professore G. Meneghini ricevendo dalla Sicilia, alcune di quelle comunissime Ostriche cretacee, e propriamente da quella regione dove il Calcara l'avea raccolto, si fe' a pubblicare un suo lavoro paleontologico, presentato alla Società italiana di scienze naturali nella sessione del 26 giugno 1864, e che poi comparve nell' ottobre [5]. Dalla definizione specifica di tali fossili il prof. Meneghini emetteva il dubbio, se da unica zona del cretaceo, ovvero dal medio e dal superiore, quelle Ostriche provenissero.

[1] *Memorie geognostiche e mineralogiche. — Oss. geogn. sopra Caltavuturo e Sclafani.* Palermo 1845.

[2] *Cenni sui molluschi viventi e fossili della Sicilia.* Palermo 1845.

[3] Il Coquand riguarda la *Gryphaea plicata minor* Calcara siccome l'*O. Overwegei*, ma la breve descrizione dell'autore non risponde ai caratteri di questa specie, nè può credersi che il Calcara abbia imposto due nomi alla specie medesima (Vedi: H. Coquand, *Monographie du genre Ostrea. Terrain crétacé* pag. 140). Nell'ultima pubblicazione la riferisce all'*O. oxyntas.*

[4] *Ricerche geognostiche sulle Madonie.* 16.° Palermo 1851.

[5] *Studî paleontologici sulle Ostriche cretacee di Sicilia* (Atti della Società italiana di scienze naturali, vol. VI).

Fu a quell'epoca appunto che io possedeva già sin da quasi due anni varî fossili cretacei delle Calabrie, di cui la maggior parte spettante agli *Ostreidi*, raccolti presso Brancaleone e Bova nella provincia di Reggio. Ma lo studio dei terreni terziarî, di cui mi occupava allora, fecemi trascurare l' esame dei fossili cretacei, al quale fui quindi indotto dal lavoro del prof. Meneghini, e riconoscendo in essi gl'identici delle Madonie, ed una fauna che ha l'uguale nella provincia di Costantina in Africa, presentai i risultamenti del mio studio alla Società italiana di scienze naturali nella seduta del 30 luglio 1865, che vennero quindi inseriti nelle Memorie della Società medesima [1].

Il prof. H. Coquand, l' egregio esploratore dell' africana geologia, fu anch' egli riscosso dal lavoro del Meneghini, riconoscendo dovere esistere in Sicilia un cretaceo medio al tutto identico a quello africano, e bentosto vi si condusse, e dopo avere esaminato i miei fossili calabresi, che lo sorpresero per la completa somiglianza con quelli d'Africa, andò a visitare i luoghi dove erano state raccolte le Ostriche descritte dal Meneghini, cioè alle Madonie nell'ex-feudo Cava e S. Giovannello presso Scillato, ed a Piombino tra Caltavuturo e Polizzi; e nella sessione ordinaria della Società geologica di Francia del 9 aprile 1866 egli presentava una relazione dei suoi studî fatti in Sicilia, che veniva quindi pubblicata nel Bollettino della Società, fascicolo di settembre dello stesso anno [2].

Verso quel tempo continuando le mie ricerche geologiche nella provincia di Messina, il 25 dicembre del 1866 io scopriva la stessa formazione presso Barcellona nella valle di Lando, e ne dava bentosto un annuncio [3].

Nel febbraio del seguente anno fui a visitare le contrade di Bova e di Brancaleone nella provincia di Reggio, e vi studiai la posizione stratigrafica e le condizioni tutte di quel cretaceo medio, ricco di una fauna variata, delle cui spoglie feci abbondante raccolta.

Ritornato in Sicilia mi fu dato di scoprire un altro piccolo lembo della stessa formazione, sul versante orientale dei monti Peloritani, al piano di Casso nelle colline che sovrastano a Pezzolo, scoperta che annunciava in una breve nota (1867) [4].

Quindi negli Atti della Società italiana di scienze naturali, in una lettera diretta ai membri di quell'illustre Sodalizio, io riassumeva quanto conoscevasi a quell'epoca sul cretaceo medio dell'Italia meridionale, comparando le faune dei varî luoghi con quella della provincia di Costantina (1867) [5].

E reiterando i miei studî e le mie ricerche mi venne fatto di scoprire nel Messinese un luogo del cretaceo medio, il più ricco di fossili di quanti ne esiste in tale provincia. La contrada Magliardo nel territorio di Castroreale ci offre un'angusta valle,

[1] *Sulle importanti relazioni paleontologiche di talune rocce cretacee della Calabria, con alcuni terreni di Sicilia e dell'Africa settentrionale* (Mem. della Società italiana di scienze nat. vol. II).

[2] *Sur la formation crétacée de Sicile* (Bull. de la Société géologique de France).

[3] *Breve nota intorno al cretaceo della provincia di Messina* (Eco del Longano n. 3, 30 dic. 1866).

[4] *Poche parole sulla formazione cretacea dei territorî di Barcellona e di Castroreale* (Eco del Longano 10 marzo 1867).

[5] *Sul cretaceo medio dell'Italia meridionale*. Lettera alla Soc. ital. di sc. nat. (Atti della Soc. ital. di sc. nat. vol. X, n. 2).

il cui fondo è ripieno dagli strati ad *Exogyra oxynthas*, ricchi di varî fossili, e che sopportano strati dell'antico terziario, mentre tutto all'intorno alti monti di gneiss cingono quella depressione. Un breve cenno di quest'altra scoperta fu dato negli Atti della Società ital. di sc. nat. (1869) (1).

Contemporaneamente il prof. Saverio Ciofalo da Termini-Imerese pubblicando taluni fossili di quel territorio ricordava le Ostriche cretacee di S. Giovannello vicino Scillato e di Piombino tra Caltavuturo e Polizzi, le contrade dove il Calcara scopriva per la prima volta il cretaceo medio in Sicilia, ed enumerava ancora le specie medesime rinvenute a S. Giovanni di Caccamo, annunciando così la scoperta di un nuovo lembo del cretaceo in quell'altro territorio (1869) (2).

L'ingente lavoro pubblicato recentemente dal Coquand, la Monografia delle Ostriche cretacee, racchiude anch'esso i dati della distribuzione geografica delle più comuni specie siciliane e calabresi (1869) (3).

In un riassunto sulle conoscenze stratigrafiche del secondario messinese io ho recentemente riprodotto in breve sunto quanto avea scoperto intorno all' ultima epoca mesozoica (1871) (4).

Un nuovo ricordo del cretaceo e dei varî terreni che l'accompagnano, nelle colline che si distendono tra Brancaleone e la spiaggia, ho dato in una recente e breve nota (1873) (5).

Il prof. S. Ciofalo avendo raccolto in varie epoche dei fossili cretacei presso Scillato e Caltavuturo possiede ormai un' importante collezione del cretaceo medio, che essendo stata da me visitata in sul finire del 1875, ho voluto pubblicare un elenco delle specie che vi riconobbi (1876) (6).

Posteriormente un analogo elenco venne pubblicato dal prof. S. Ciofalo (1876) (7).

In seguito il prof. Ciofalo dava alla luce la pubblicazione di talune nuove specie cretacee raccolte presso Caltavuturo, e faceva precedere le descrizioni di esse dall'elenco precedentemente pubblicato, apportandovi talune aggiunzioni e modifiche (1877) (8).

Nei prolegomeni della geologia terziaria del Reggiano io ho ricordato ancora recentissimamente il cretaceo medio delle Calabrie (9), che quantunque poco esteso è pure tanto importante per la fauna che racchiude (1877).

(1) *Scoperta di un lembo di terreno cretaceo assai fossilifero nella provincia di Messina* (Nota di G. Seguenza) (Atti della Società italiana di sc. nat. vol. XII).

(2) *Descrizione dei fossili di Termini-Imerese e suoi dintorni.*

(3) *Monographie du genre Ostrea. Terrain crétacé.*

(4) *Contribuzione alla geologia della Provincia di Messina. Terreni secondarî* (Boll. del r. Comitato geologico 1871).

(5) *Una visita geologica a Brancaleone di Calabria* (La scienza contemporanea. Anno I, fasc. VI).

(6) *I fossili del Cenomaniano di Caltavuturo nella prov. di Palermo* (Rendiconto della r. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli; fasc. I, gennaio 1876).

(7) *Note sul cretaceo medio di Caltavuturo* (Annuario della Società dei Naturalisti di Modena. Serie II, anno X, fasc. I. 1876).

(8) *Su di alcune nuove specie fossili del cretaceo medio di Caltavuturo.* Lettera alla Società dei Naturalisti di Modena (Annuario della Società dei Naturalisti di Modena. Anno XI, fasc. I).

(9) *Brevissimi cenni intorno le formazioni terziarie della provincia di Reggio* (*Calabria*). Messina 31 maggio 1877.

Il prof. Coquand aggiungeva recentemente ai suoi precedenti lavori sulla geologia dell'Algeria un bel volume in cui sono descritte nuove e molto importanti ricchezze paleontologiche, accennando anco l'Italia per talune specie già conosciute nel suo cretaceo medio (1880) [1].

Così ancora nel vasto lavoro sul terziario della Calabria meridionale [2] ho accennato anco il cretaceo di quella regione enumerandone i fossili più comuni (1880).

§ 3. *Nuove e più importanti scoperte.*

La storica enumerazione dei lavori riguardanti in qualunque modo il cretaceo medio delle provincie meridionali d'Italia, ci ha fatto conoscere da un canto come le scoperte intorno a tale formazione sono andate sempre crescendo, e d'altro lato ci apprende che le pubblicazioni che hanno veduto la luce sinora non sono che semplici annunci o brevi note, che offrono l'enumerazione di pochi fossili, ovvero la descrizione di qualche nuova specie, o ricordano in riassunto le precedenti scoperte, nessun lavoro generale, comparativo, che mettesse in raffronto il nostro cretaceo con quello delle altre regioni europee e ne stabilisse con esattezza il sincronismo.

Nuove più estese e perseveranti ricerche nel Messinese come nel Reggiano, mi hanno condotto alla scoperta di altre contrade dove il cretaceo si estende ancor più vastamente dei luoghi sinora conosciuti. Così un lembo spianasi alle falde dei monti cristallini tra Pozzo-di-Gotto e S.ª Lucia del Mela nel Messinese; altro frammento notasi presso Barcellona alla contrada S. Paolo; un altro esteso affioramento, importantissimo pegli abbondanti fossili, io lo scopriva ad ovest di Ferruzzano nelle Calabrie meridionali, ed una più vasta contrada cretacea verso oriente, par che si colleghi colla predetta, quantunque disgiunta da quella per breve tratto di sovrapposti depositi terziarî.

Taluni fossili raccolti in altri luoghi delle provincie di Reggio, di Messina, di Catania annunciano chiaramente, che restano ancora senza dubbio nell'Italia meridionale ben altre contrade da scoprire, nelle quali il cretaceo medio estende i suoi depositi.

Le reiterate investigazioni paleontologiche fatte nelle località del cretaceo da recente scoperte, nonchè nelle altre già note, mi hanno somministrato una messe di fossili assai ragguardevole, la quale esaminata con cura mi ha fornito un numero di specie triplo di quelle sinora conosciute, con un buon dato di forme affatto nuove.

Il cumulo di tante, sì variate ed importanti novità mi ha spinto a compiere un lavoro generale, il quale aggiungendo ai fatti, alle località, ai fossili già conosciuti, una raccolta di nuovi e più importanti documenti, permette una comparazione sopra più vasta scala, e dà l'agio quindi a vedute e conclusioni più generali e di maggior valore.

[1] H. Coquand, *Études supplémentaires sur la paléontologie algerienne* 1880.

[2] *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio* (*Calabria*). (Memorie della r. Accademia dei Lincei 1880).

CAPO SECONDO

Costituzione geologica.

§ 1. *Distribuzione topografica.*

Il cretaceo medio nell'Italia meridionale presentasi con una disposizione topografica veramente eccezionale, esso non costituisce delle vaste estensioni di suolo, ovvero delle colline o dei monti disposti in serie che occupino estensioni più o meno grandi, come d'ordinario accade delle formazioni mesozoiche, siccome delle cenozoiche, ma invece esso presentasi sempre sotto forma di lembi piccolissimi, ovvero di brevi affioramenti che compariscono qua e là sparsi con una distribuzione che sembrerebbe irregolare.

Nelle due regioni dove io ho studiato il cretaceo medio, cioè nella provincia di Messina ed in quella di Reggio, i varî lembi sono disposti alle falde dei ripidi monti cristallini dei quali par che ne circoscrivano i contorni con estesissime interruzioni, ed in talune contrade soltanto, il terreno cretaceo penetra benanco nelle sinuosità delle profonde valli, che s'insinuano in mezzo agli alti picchi di gneiss.

I due frammenti di carta geologica che corredano questo lavoro danno chiara idea della disposizione di cui io parlo. Vi si vedono nel territorio di Castroreale le contrade Saittone, S. Paolo, Valle di Lando, Magliardo ecc. che offrono i lembi del cretaceo alle falde dei monti cristallini; parimenti nei territorî di Brancaleone e di Bruzzano tale formazione appare alle contrade S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà.

Un fatto ben rimarchevole si è quello che il cretaceo medio non vedesi mai in connessione col cretaceo inferiore nè col cretaceo superiore; anzi nelle provincie di Messina e di Reggio le due cennate formazioni mancano affatto nei territorî dove il cretaceo medio si manifesta. Difatti nel Messinese questo terreno occupa la porzione mediana del lato settentrionale della provincia, ed invece il solo neocomiano, che tra i varî altri piani del cretaceo ho scoperto in questa regione, trovasi verso gli estremi occidentale e meridionale, cioè presso S. Agata di Militello caratterizzato dall'*Aptychus Seranonis* Coq. ed ai Giardini presso Taormina dal *Belemnites latus* Blainv [1]. Il cretaceo superiore manca completamente, mentre poi conoscesi in molti luoghi di Sicilia come nella provincia di Palermo, al Monte Pellegrino, a Castel-Brocato, a Termini-Imerese ecc. [2], nella provincia di Catania, nei monti Iudica e Torcisi ed al Capo Pachino. Nella provincia di Reggio poi non conoscesi affatto nè il cretaceo superiore nè l'inferiore, e solo nella provincia di Catanzaro il prof. Lovisato, a quel che pare, vi ha scoperto recentemente il calcare ippuritico.

Io non ho potuto visitare il cretaceo medio della provincia di Palermo, ma da quanto si conosce esso non trovasi ivi alla base di monti cristallini, invece in

(1) *Contribuzione alla geologia della provincia di Messina.* Breve nota intorno le formazioni primarie e secondarie (Boll. del r. Com. geol. Anno 1871).

(2) Vedi: G. G. Gemmellaro, *Monografia delle Caprinellidi, dell'Ippuritico dei dintorni di Palermo ed altri lavori*; S. Ciofalo, *Descrizione dei fossili di Termini-Imerese e suoi dintorni.*

seno ai calcari giurassici, che in gran parte spettano alla formazione titonica, la quale sopporta in taluni luoghi i calcari neocomiani; tali fatti possono far credere che il cretaceo nella regione delle Madonie giaccia nel suo vero posto stratigrafico, ma a render certo un tale asserto bisognano nuove ricerche, che sinoggi non mi è stato agevole di compiere.

Dovunque poi il cretaceo medio mostrasi cinto da depositi potentissimi di arenarie e di argille, che spettano agli antichi periodi delle formazioni cenozoiche, e d'ordinario per la denudazione di tali rocce il cretaceo affiora qua e là, e basta a chicchessia il visitare una qualunque di quelle contrade dove esso manifestasi per acquistare la convinzione che il cretaceo medio si estende vastamente, ma viene occultato dai potenti depositi posteriori, ed è al certo come io precedentemente accennava che dalla grande denudazione che hanno subìto quest'ultimi, una minima parte del cretaceo è stata scoperta, e mèssa in evidenza sotto forma di brevissimi lembi, o meglio di affioramenti.

Passo ora a dare una rassegna dei luoghi, dove sinora fu riconosciuto il cretaceo medio nelle provincie meridionali d'Italia, offrendo per ciascuna contrada un cenno topografico-geologico.

Le provincie di Messina, di Palermo e di Reggio soltanto sono riconosciuti sinora i depositarî di questa formazione, dalla provincia di Catania mi ebbi anco recentemente taluni fossili che accennano con certezza l'esistenza del cretaceo medio anco in quel territorio. Nel Messinese e nel Reggiano i varî lembi di questo terreno furono da me scoperti e studiati assiduamente.

Provincia di Messina.

Quasi tutto il Cenomaniano del Messinese si dispone intorno a quei ripidi monti cristallini che da S. Lucia del Mela si diriggono verso Rodì e s'incurvano quindi a formare il capo Tindaro; esso si manifesta a frammenti sparsi alle falde, associati ad arenarie ed argille dell'eoceno superiore e del mioceno, sotto le quali rocce esso giace sepolto costituendo una cintura al cristallino.

I primi due piccoli lembi che io veniva scoprendo nel Messinese sono quelli che vedonsi nella valle di Lando presso Barcellona, dove io mi recai per la prima volta il 25 dicembre del 1866; essi sono ristrettissimi e poco ricchi di specie fossili, tra le quali sono rimarchevoli e più comuni l'*Exogyra ratisbonensis* e la *Gryphaea vesiculosa*, che insieme ad altre specie formano uno strato intieramente ripieno di tali spoglie.

Qui il cretaceo da un lato confina col Laurenziano, nel resto è cinto e sottoposto all'eoceno superiore ed alle varie altre formazioni cenozoiche più recenti.

Il Cenomaniano di Magliardo mi venne fatto di scoprirlo il 28 settembre del 1868, esso forma il lembo più importante conosciuto nella provincia, dacchè i suoi strati sono ricchi di belli e conservati fossili. Strati di argille scagliose alternanti con piccoli strati calcarei lo costituiscono, esso poggia sullo gneiss, che lo cinge da ogni lato formando alti e ripidi monti, dimodochè il cretaceo riempie il fondo di una profonda valle, chiusa quasi completamente da ogni lato. Brevi lembi di argille con istraterelli di calcare nummulitico del Liguriano lo ricuoprono in parte. A tali rocce

succedono dei calcari a fucoidi bianchicci o verdicci intercalati a marne scagliose, quindi delle argille verdi scagliose, e finalmente un frammento dell'arenaria silicea, le quali rocce tutte insieme spettano al Tongriano.

Gli Ostreidi sono sparsi in questo luogo con grande profusione ed in bellissimi esemplari, come la maggior parte dei molti fossili che vi si raccolgono, tra i quali un bel *Pecten* molto affine al *P. punctato-striatus*, e qualche frammento di ammonite, il solo cefalopodo scoperto sinora nel Cenomaniano messinese.

Un altro lembo ben piccolo giace nella valle di S. Paolo accanto al cristallino ed in mezzo agli schisti bituminosi ed alle argille rosse del Tongriano. Io lo visitava il 2 ottobre del 1874 e vi raccoglieva qualche raro fossile, essendo questo il più piccolo ed il più povero tra i lembi del nostro cretaceo.

Due giorni dopo, cioè il giorno 4 dello stesso ottobre, andai a studiare il più esteso lembo di cretaceo che è nel Messinese alla contrada Saittone presso Barcellona. Dal lato dei monti esso si approssima verso quelli elevati e ripidi della formazione cristallina, quali sono quelli di Lando e di S.ª Lucia del Mela, ma vi s'interpongono alcuni lembi dell'eoceno e del mioceno, che lo cingono anche dagli altri lati. Questo lembo si estende con lieve declivio verso la fiumara di S.ª Lucia cingendo una collina di arenarie langhiane. In questo luogo i fossili vi sono poco abbondanti ma ben conservati.

Finalmente il lembo minimo del cretaceo messinese giace lungi dai descritti, sul versante orientale dei monti Peloritani, al piano di Casso sopra Pezzolo, dove io lo scopriva il 28 febbraio del 1867. In seno alla vasta formazione cristallina si associa come altrove al Tongriano, al quale sovrastano gli strati dell'Acquitaniano e del Langhiano. I fossili raccolti sono ben pochi per la estrema limitazione della roccia che li racchiude.

Taluni *Ostreidi* delle comunissime del nostro Cenomaniano di unita ad una *Trigonia* e ad una *Radiolites* furono raccolte nel territorio di Alì ed accennano perciò anco ivi all'esistenza di un lembo del cretaceo medio, ma le indagini sinora adoperate per iscoprirlo non sono valse a nulla.

Il cretaceo medio del Messinese, sinora conosciuto, occupa come bene appare dalla carta annessa una superficie ben limitata, la quale può valutarsi a circa 800,000 metri quadrati.

Provincia di Reggio.

Il Cenomaniano prende maggiore sviluppo nella provincia di Reggio, dove sinora io ne ho esplorato quattro lembi.

Il 14 febbraio del 1867 io visitava in quella provincia una prima volta, un piccolo lembo del cretaceo sul lato meridionale, nella valle di Vrica, territorio di Bova. Ivi il nostro terreno fossilifero giace da un canto sotto uno strato di calcare con residui di echinidi spettanti al mioceno acquitaniano, e d'altro lato sottostà alle argille variegate del Tongriano, sulle rocce dei quali piani poggiano gli strati di varî altri periodi, sino al plioceno ed al quaternario, dimodochè da sotto l'ingente massa di tante formazioni, il cretaceo affiora per breve tratto offrendo limitato numero di fossili, tra i quali bisogna ricordare che fu scoperto l'unico frammento che sinora possiedo dell'*Acanthoceras Rothomagensis.*

Qualche giorno dopo aver visitato il cretaceo di Bova, andai ad esplorare il giacimento più ricco, pei numerosi e variati fossili che vi si raccolgono, il quale giace nelle collinette che si estendono da sotto Brancaleone sino alla spiaggia, e propriamente costituisce quelle che dalla contrada S. Giorgio si abbassano grado grado insino al mare, e s' inoltrano sin presso i ripidi monti di arenaria eocenica sui quali ergesi Brancaleone. Le argille scagliose del Liguriano, caratterizzate assai bene dagli strati calcarei, con alveoline, piccole nummuliti, ed *Orbitoides dispansa*, cingono da ogni lato il Cenomaniano. Le argille rosse e verdi del Tongriano si estendono quindi vastamente ricche di arnioni, concrezioni e straterelli di siderosio litoide, spesso trasformato in limonite, e ad esse sovrasta potente massa di arenaria puramente silicea, che si sviluppa sotto forma di ripide colline, allineate parallelamente alla spiaggia, e presso ad essa.

In questa contrada i fossili più comuni sono, come dapertutto, gli Ostreidi, ma ad esse vi si associano numerosi modelli di bivalvi varie, che giacciono principalmente negli strati calcareo-marnosi superiori, tra esse predominano le Arche, le Crassatelle, le Veneri, i Cardii ecc.

Nel Messinese non fu trovato sinora che un frammento di Ammonitide, qual rappresentante dei Cefalopodi, ed invece presso Brancaleone questa classe si presenta con varî gruppi di specie. Alcuni frammenti di Belemniti sono in cattivo stato, specificamente mal determinabili, varî Nautilii tra i quali il più comune si è il *N. triangularis* Montf., diversi Ammonitidi, tra i quali le due varietà dell'*A. Mantelli* Sow. quattro specie di *Turriliti*, tra le quali specialmente il *T. scheuchzerianus* Bosq. tanto caratteristico.

Ricordo di questo luogo una importante roccia calcarea, poco estesa, che poggia sulle argille scagliose cretacee, in un poggetto che si approssima alla spiaggia. Spetta ancor essa al Cenomaniano e risulta dall'accumulo di enorme quantità d' individui della *Cypricardia Calabra* (Crassatella) Seguenza, alla quale si associano in abbondanza una *Plicatula*, una *Lima*, un'*Astarte*, non ancora descritte e diversi *Ostreidi.*

Tre chilometri e mezzo a nord di Ferruzzano, cioè alla Portella di Falcò, giace un altro lembo del cretaceo medio, che io scopriva il 22 aprile del 1874, e che sinora non è stato annunciato. Esso costituito sempre al medesimo modo, sporge di mezzo alle argille dell'eoceno superiore, che formano una stretta zona, che lo cinge da ogni dove, e questa alla sua volta è circondata dalle argille scagliose del Tongriano, che occupano vasta superficie dilatandosi sino alla spiaggia, e sono sormontate dall'arenaria silicea, la quale si estende qui amplamente ed a considerevole elevazione, formando tutte le alture tra la portella di Falcò, Bruzzano e Ferruzzano. In qualche luogo, come presso Schrisà, il Tongriano presentasi con regolarissima stratificazione, e completasi nelle zone inferiori per la comparsa, sotto le argille scagliose, degli schisti bituminosi e dei calcari bianchicci a fucoidi alternanti con marne scagliose. Il Tongriano dal lato meridionale confina colle arenarie e i conglomerati del Bartoniano, mentre dal lato settentrionale poggia con un' alta barriera della formazione cristallina, che ha per punto culminante il Piano di Arioso.

L'eoceno medio stesso è cinto più all'esterno dal cristallino.

Il cretaceo della portella di Falcò è ricco di fossili, e come quello di S. Giorgio

racchiude molti modelli di bivalvi ed Ammoniti e Turriliti, tra i quali raccolsi l'unico esemplare del *T. Puzosianus* D'Orb.

Una terza porzione del cretaceo giace a nord-ovest di Ferruzzano, alla contrada Guttà ed è ancor più estesa della precedente formandovi quasi la continuazione, essendochè questi due lembi sono disgiunti da breve tratto di strati terziarî. Le condizioni di giacimento sono per quest'ultimo tratto affatto identiche a quelle del precedente, soltanto il Liguriano par che qui manchi.

L'otto maggio del 1875 io percorreva quella contrada, sinora inesplorata, raccogliendo i fossili, che vi sono poco abbondanti e meno variati, tra i quali non è da ricordarne qui veruno speciale.

Senza dubbio in continuazione dei lembi sinora ricordati, alle falde dei monti cristallini, altre porzioni di cretaceo si andranno rinvenendo, e ne sono prova evidentissima alcuni fossili cretacei, che provengono da contrade che stanno ai piedi dei monti del Laurenziano. Così alcuni esemplari dell'*Alectryonia syphax* Coq., dell'*Exogyra oxyntas* Coq. e d'altre specie, furono raccolti alla contrada D'Anconi nel territorio di Bovalino; una *Coquandia italica* n. sp. e qualche altro fossile provengono da Cirella.

Da questo rapido cenno topografico intorno al Cenomaniano del lato orientale della provincia di Reggio si può conchiudere che la formazione cristallina costituendo un largo seno tra Bianco e Brancaleone, lasciava all'epoca del cretaceo medio, una larga valle cinta da monti alpestri ed elevati, quali Rocca di Gallo, Cerasia, Petralcina, Monte Scapparone, Piano d'Arioso, Monte Sollaro, Monte Palecastro, Monte Rudinì ecc.

Questo largo seno accoglieva dapprima i depositi del cretaceo, che si accumularono alle falde del Laurenziano, siccome nel Messinese. Quindi si costituivano i grandi depositi di arenaria e di conglomerati del Bartoniano, di cui oggi non restano che lembi isolati, e finalmente quella grande valle veniva riempita dalle argille scagliose del Liguriano e del Tongriano, colle altre rocce subordinate, e specialmente è notevole l'ultima arenaria, di cui una grande massa in posto, non denudata, di circa quattro chilometri quadrati, occupa attualmente il centro di questo antico seno di mare, e su di essa giace Ferruzzano. In vicinanza della spiaggia, ma soltanto ai fianchi della valle, si vedono depositi cenozoici più recenti.

Nel Reggiano il cretaceo medio conosciuto occupa una superficie di molto superiore a quella occupata nel Messinese, tale estensione credo che possa valutarsi circa a 4,500,000 metri quadrati.

Provincia di Palermo.

È in questa provincia come si disse che fu scoperto dal Calcara il primo lembo del nostro Cenomaniano, più tardi il prof. Meneghini ne descrivea le Ostriche, quindi il Coquand fecesi a visitare quelle contrade e pubblicò nel Bullettino della Società geologica di Francia i risultamenti delle sue ricerche, e finalmente il prof. Saverio Ciofalo in una sua pubblicazione paleontologica enumerava talune delle specie fossili del cretaceo palermitano, ma nessuno di quest' ultimi scrittori parlò della natura della roccia, che racchiude i fossili del cretaceo medio, nè tampoco delle formazioni

sovrastanti [1]. Solamente il Calcara [2] ricorda che gli Ostreidi da lui descritti giacciono in un calcare marnoso bigio. Io non ho potuto visitare il cretaceo medio del Palermitano, ma a giudicarne dai fossili che mi furono gentilmente favoriti dal prof. Coquand e dal mio egregio amico prof. Saverio Ciofalo, e dalle rocce che vi aderiscono, sembra evidentissimo che la costituzione di quei lembi di Cenomaniano sia affatto identica a quella del terreno coetaneo del Messinese e del Reggiano. Difatti i modelli calcarei sono identicissimi a quelli raccolti in quest'ultime provincie, le Ostriche col loro solito colorito portano aderenti le argille scagliose grigio-brune, quindi gli strati calcarei devono alternare colle argille come altrove.

Le località sinora conosciute si raggruppano sul lato settentrionale delle Madonie, cioè nell'antico feudo Cava, in quello di S. Giovannello presso Scillato, ed a Piombino tra Caltavuture e Polizzi. Una sola se ne allontana, trovandosi a S. Giovanni presso Caccamo, della quale furono annunciati taluni fossili dal prof. Saverio Ciofalo, il quale più tardi si procurò molte altre specie raccolte nelle precedenti località.

Alti monti e scoscesi, talvolta a guisa di gigantesche muraglie, costituiti di calcari giurassici, per la maggior parte di epoca titonica, talvolta sormontati dalle rocce neocomiane, cingono il Cenomaniano delle Madonie, il quale si collega, come altrove, colle argille e le arenarie del Liguriano e del Tongriano, tanto estesamente sviluppate in quelle regioni.

È da sperarsi che uno studio stratigrafico delle formazioni mesozoiche di quei luoghi, che tuttavia manca intieramente, possa farci vedere la serie completa dei piani cretacei, essendochè anco le zone superiori sono sviluppate nel Palermitano, e potrebbesi in qualche luogo trovare anco il Cenomaniano al posto stratigrafico che gli è proprio, lo che manca affatto nelle altre provincie, siccome abbiamo veduto.

Mi mancano in fine i dati per indicare l'estensione che occupa il cretaceo medio nelle provincie di Palermo.

Provincia di Catania.

Devo alla gentilezza dell'amico ingegnere sig. A. De Leo alcuni esemplari dell'*Exogyra oxyntas* Coq. e dell'*E. flabellata* Lamarck raccolti presso Borgonovo sotto Troina, cioè assai presso al limite della provincia di Catania colla provincia di Messina.

Questi soli fossili sono ben sufficienti per dimostrare che in quel luogo esiste un lembo del Cenomaniano. Conosco bene d'altronde, per mio proprio studio, come in quelle contrade si estendono vastamente le argille variegate del Liguriano e del Tongriano coi calcari nummulitici e le arenarie subordinate, le quali rocce tutte si connettono al certo col cretaceo, come altrove, e lo cingono da ogni lato.

§ 2. *Aspetto generale e costituzione litologica del cretaceo medio.*

Le condizioni litologiche di un terreno essendo precipuamente quelle dalle quali esso ritrae la sua generale apparenza, la conformazione sua e i suoi più importanti caratteri, ne consegue necessariamente che mantenendosi inalterata la sua costituzione

[1] Vedi innanzi: *Notizie storiche.*

[2] *Ricerche geognostiche sulle Madonie.* Palermo 1851.

petrografica, come talvolta suole avvenire sopra vastissima estensione, gli strati di una data epoca saranno riconosciuti in tal caso a prima giunta, da chi ne ha acquistato speciale pratica, essi avranno una fisonomia loro propria che li distingue, essi saranno dapertutto forniti dei medesimi caratteri. Tale si presenta nelle provincie meridionali d'Italia la formazione cretacea di cui voglio qui parlare; essa costituisce uno di quei terreni, che si presentano con una uniformità sorprendente dovunque s' incontrano, dimanierachè anco a grandi distanze riesce agevole riconoscerlo, direi quasi a prima giunta, dal suo aspetto e dalla sua litologica costituzione; questo importante fatto ho potuto constatarlo in tutti i luoghi da me visitati, in Calabria siccome in Sicilia, dovunque affiora un lembo della formazione di cui discorro.

Si cercherebbe invano il cretaceo medio in quei monti che si estollono alti e ripidi, in quei calcari ed in quelle dolomiti mesozoiche che ergonsi gigantesche a formare rocce elevate e rovinose, ovvero colossali muraglie; esso invece non costituisce che dimesse collinette ed arrotondate, le quali presentano lieve declivio sui fianchi e fanno così graduatissimo passaggio alle prossime pianure, che sovente sono costituite dalla formazione medesima.

È la natura minerale degli strati che costituiscono questo terreno, come ben si capisce, la precipua causa della particolare conformazione dello stesso; difatti sono delle vere argille scagliose di color grigio-scuro o grigio-bruno che formano la massa principale del terreno, esse cedendo all'azione delle piogge da un canto, si lasciano erodere alla superficie, che tende ad arrotondarsi ad appianarsi, e le acque che scorrono sul suolo producono, sui fianchi delle colline, dei solchi, che si allargano e si profondano in basso, talvolta considerevolmente; d'altro lato il rammollimento della massa argillosa fa che succedano delle depressioni, produce anch'esso dei ribassamenti, che tendono a deprimere sempre più il suolo cretaceo, il quale per tutte queste azioni insieme assume quella forma e quell' aspetto che ho accennato di sopra. Il rammollimento della roccia induce inoltre degli effetti, che si manifestano in tutta la massa delle argille scagliose, specialmente è da ricordare quello della frattura e sconnessione degli strati, dimanierachè quelle rocce studiate nella loro costituzione sovente si offrono siccome un ammasso caotico, anzichè una sedimentaria formazione regolarmente stratificata nella sua origine, siccome si presenta in tanti luoghi dove per circostanze locali il rammollimento della roccia non potè produrre un tale effetto. Infatti la superficie del suolo si offre dovunque all'osservatore sparsa di frammenti d'ogni grossezza degli strati più resistenti misti al detrito argilloso, e un tal fatto non è d'ordinario superficiale, ma invade tutta quanta la massa della roccia, ed in tal caso là dove le acque hanno prodotto delle erosioni, alcune volte abbastanza profonde, vedonsi le argille commiste irregolarmente a frammenti varî e di varia mole. Così presso Barcellona nella valle di Lando, alla contrada Guttà, presso Ferruzzano ed altrove riesce agevole osservare il terreno così sconvolto. Nel caso più ordinario poi, dove è messa a nudo l'intima costituzione del terreno vi si osserva con evidenza la stratificazione, appunto siccome in qualunque altro terreno sedimentario; ma anco in questo caso tutto annuncia che il terreno ha subìto dei movimenti, degli scoscendimenti, che ha ceduto a pressioni varie e variamente dirette, percui gli strati, quantunque mantengonsi distinti, sono contorti, ripiegati, fratturati in mille

modi e talvolta anzi sovente spostati, sconnessi e dislocati; pure non mancano dei luoghi dove la stratificazione, quantunque inclinata, non si presenta tormentata nel modo suddetto. Così alla contrada S. Giorgio presso Brancaleone, Falcò presso Ferruzzano, Magliardo presso Castroreale vedonsi delle sezioni dove possono notarsi i fatti stratigrafici enumerati.

Le argille scagliose non costituiscono da se sole la massa del cretaceo medio, esse si associano a marne grigie, anch'esse scagliose, ed a strati calcarei poco spessi, che alternano cogli strati più potenti delle altre due rocce. Queste tre diverse rocce costituiscono dovunque il nostro Cenomaniano, il quale risulta perciò in tutti i luoghi formato al medesimo modo. Tali rocce, quantunque ben distinte negli strati che formano, presentano pure delle vere transizioni dall'una all'altra per la variabile quantità di calcite che si mescola alla sostanza argillosa. Varî altri minerali s'incontrano in questa formazione, ma sono di poca importanza perchè sparsi d'ordinario in forma di arnioni ed in quantità ben piccola, ciò non pertanto la loro presenza bisogna che sia segnalata, dovendosi più in là stabilire la differenza tra le argille scagliose del cretaceo e quelle delle varie epoche cenozoiche.

Le argille scagliose di questa formazione non sono in fondo diverse da quelle di altre età, esse sono di tale natura che si sgretolano facilmente tra le dita dividendosi in isquamette, scaglie o irregolari lamelle, le quali poi constano di finissima sostanza polverosa, che si stempra nell'acqua allorquando s'immergono in essa e si continua a strofinarle fortemente tra le dita, non danno effervescenza alcuna cogli acidi, e subiscono rammollimento per l'azione continuata delle piogge, e disgregazione per l'azione complessa degli agenti atmosferici.

Eccoci dunque in presenza di *vere argille scagliose*, non di età terziaria, ma di epoca cretacea, spettanti alla formazione cenomaniana; siccome dimostrasi pegli abbondanti fossili.

Il colorito di questa roccia è costante, in qualunque luogo si esamini essa si presenta grigio-scura o grigio-bruna, quasi esattamente uniforme, ed è caso di rarissima eccezione il vederla in qualche luogo ben limitato assumere un colorito rosso-bruno.

Oltrechè l'argilla scagliosa del cretaceo medio si presenta facile a disgregarsi tra le dita in isquamette, come dicemmo, la massa tutta della roccia si offre all'osservatore siccome costituita da un ammasso di scaglie poco coerenti, le quali servano tra loro quasi un certo parallelismo, e permettono un facilissimo disgregamento della roccia, la quale per azione delle acque e del prosciugamento scoscende colla più grande facilità.

Tutti questi caratteri, non meno che il colorito, ravvicinano talmente le argille scagliose del cretaceo a talune del terziario e specialmente del Liguriano e del Tongriano, che sarebbe facilissimo confondere le une colle altre, se non venissero in aiuto ben altri caratteri e più rilevanti di quelli litologici.

L'argilla si mescola, come dissi, a quantità varie di calcite e forma una marna che poco differisce per l'aspetto dall'argilla stessa. Il colorito è poco più chiaro e sempre uniforme, la facilità di disgregarsi tra le dita diminuisce col crescere la proporzione della calcite, insomma v' ha una graduata transizione dalle argille alle marne ricche di calcite. Le argille trovansi dapertutto alla base della formazione

cretacea che esamino, e ne costituiscono d'ordinario la parte principale, le marne invece, ne formano la parte superiore, e par che siano tanto più ricche di calcare quanto più elevate nella serie stratigrafica, di modo che gli strati più alti sono più chiari di colorito.

Il calcare poi di color bianchiccio e più raramente brunastro, grigiastro o gialliccio si presenta sotto forma di strati poco spessi cioè da uno a quattro decimetri, e come per eccezione, in qualche luogo d'una maggiore potenza, che alternano con molta regolarità con istrati molto più potenti di marna o di argilla. Il calcare è compatto più o meno duro secondo il grado della purezza e fa passaggio al marnoso, siccome sovente in direzioni variissime presenta delle vene spatiche d' uno spessore che varia da alcuni millimetri ad alcuni centimetri. Gli strati di calcite dunque sono subordinati alle argille od alle marne costituendo una piccola parte della formazione, essi sono regolarissimi e nel caso più ordinario si presentano flessuosi, ripiegati, rotti, spostati, di unita agli strati marnosi ed argillosi, tra i quali essi risaltano per la loro compattezza e pel colorito più chiaro. Talvolta poi gli strati calcarei si presentano sotto forma di frammenti di volume estremamente vario, che risultarono dai movimenti ripetuti che subì la roccia, pei quali gli strati furono non solamente frantumati, ma spostati, confusi e rimestati; percui essi presentansi sul suolo cretaceo sparsi irregolarmente ed in varia quantità secondo i diversi luoghi.

Fra i tanti frammenti di strati calcarei alcuni se ne incontra di aspetto e di struttura ben diversi dai comuni; essi sono poco spessi non oltrepassando i sei centimetri, di color bianco o bruniccio, in forma di lastre colle due superficie pressocchè parallele ed appianate, ma di cui una si presenta pressochè mammellonata, mentre l'altra irregolare e scabra è sparsa sovente di frammenti di fossili e più comunemente dei frammenti d' una pinna. Tutti questi caratteri insieme dimostrano che questi come gli altri sono frammenti di strati, quantunque la loro struttura non sia compatta come in quelli. Difatti essi offrono un vario grado di traslucidezza nelle piccole schegge, la loro struttura è cristallina, la frattura fibrosa o bacillare perpendicolarmente alle due superficie parallele, in modo che a prima giunta si crederebbe arragonite, e probabilmente questa varietà di calcare è stata forse più volte riguardata come tale, ma studiando più accuratamente la struttura si riconosce che obliquamente alle due superficie parallele ed alle fibre stesse si manifestano più o meno distinte le faccette di clivaggio spatico, perlochè questi frammenti non possono rapportarsi all'arragonite ma bisogna che si riferiscano alla calcite. In tutti i giacimenti del cretaceo raccogliesi questa varietà di calcite cristallina, e quasi sempre su d'una superficie vi aderiscono i frammenti d'una pinna.

Altre lastre, alle precedenti somiglianti, presentano pure taluni caratteri che le distinguono; in esse la struttura fibrosa è meno marcata perchè le fibre sono più sottili, d' ordinario non perpendicolari alle superficie appianate dei frammenti ma radianti da varî centri disposti sulle superficie suddette, quindi le fibre non sono parallele ma divergono partendo da varî centri oppostamente disposti. Da questa costituzione deriva che percuotendo tali pezzi calcarei si rompono in frammenti, che tendono ad offrire una forma conica, colla superficie segnata da rugosità trasversali in forma d'intagli o di minimi ed irregolari gradini, dimodochè questa particolare frattura ricorda proprio la rarissima frattura conoidale. Il minerale inoltre presentasi

opaco e non già traslucido come il precedente. Siffatti caratteri mi fanno credere che tale calcare debba rapportarsi alla specie Arragonite.

Il calcare si presenta inoltre molto comunemente sotto forma di lamelle spesse da due a quattro millimetri, bianchicce, sparse alla superficie del suolo in grande abbondanza in certe località e rare in altre, colla struttura spatica e talvolta fibroso-spatica. Queste lamelle derivano da vene calcaree che si costituirono allo stato cristallino nelle fenditure e screpolature della roccia argillosa e marnosa, come riesce agevole di riconoscere là dove il terreno si presenta sezionato. È probabile che tali vene non sieno contemporanee alla sedimentazione, esse non hanno alcun rapporto colla stratificazione, invece intersecano la roccia in tutte le direzioni, accennando evidentemente ad un processo di secrezione delle particelle calcaree, ovvero ad una concentrazione cristallina.

Tra i minerali accidentali che incontransi in questa formazione cretacea ricorderò dapprima la pirite di ferro, che sotto forma varia di arnioni arrotondati, depressi, ovvero a superficie mammellonare vi s'incontra raramente, e talvolta già trasformata in idrossido di ferro.

Raccogliesi nelle argille, nelle marne, nel calcare di quasi tutte le contrade, e par che spetti talvolta alla Sperkisa, alcune volte alla pirite cubica presentando in quest'ultimo caso alla superficie dei cristallini esaedrici, pentagonododecaedrici o dei derivati.

In S. Giorgio presso Brancaleone mi occorse di raccogliere varî arnioni di Baritina, colla superficie mammellonata, e i mammelloni assai scabri perchè irti di punte cristalline. Il colorito degli arnioni è bruniccio tendente al verdastro.

Nel calcare di Magliardo si osservano talvolta delle concrezioni irregolari di Acerdesio di color bruno-nero.

Occorre anco di raccogliere talvolta dei cristalli di Gesso, come ricordo essermi accaduto presso la portella di Falcò nel territorio di Ferruzzano.

Sento anco necessario nell'enumerazione dei caratteri litologici del cretaceo di cui tratto, di aggiungervi due caratteri negativi, i quali di unita a quelli enumerati, potranno talvolta invocarsi a distinguere le argille scagliose del cretaceo, da quelle di taluni piani cenozoici.

In alcuni di quest' ultimi infatti la piromaca e l' ossidrato di ferro in arnioni ovvero in concrezioni si incontrano comunemente, laddove nella nostra formazione cretacea mancano affatto, e soltanto raramente l' idrato ferrico vi si vede sotto la forma giallo-rossastra e terrosa dipendente dall' ossidazione della pirite.

Ai varî caratteri litologici passati in esame fa d'uopo infine aggiungervi il fatto della presenza dei fossili, che per se stesso importantissimo, diviene nel caso nostro per varie ragioni, di alto momento e di sommo interesse. Difatti mentre dovunque le argille scagliose in Italia sono prive di fossili, o per vera eccezione ne contengono dei rarissimi, qualunque sia l'età geologica cui esse spettano, qualunque la vasta estensione che occupano, e par che sieno state proprio letali ai viventi; nell'Italia meridionale invece è rimarchevolissimo che le argille scagliose cenomaniane sono oltremodo ricche di grossi fossili, che si offrono allo studioso dovunque affiora anco un minimo lembo di quel terreno, dimodochè esso fa contrasto assai notevole colle argille scagliose liguriane, tongriane ed altre, le quali accompagnandolo dovunque nelle stesse provincie

meridionali, non hanno mai offerto un resto organico, se ne togli i fucoidi, che giacciono negli strati calcarei o marnosi subordinati, e le nummuliti ed altri rizopodi, che d'altronde giacciono, come i precedenti, in istrati calcarei interposti e ben rari.

Gli strati argillosi siccome le marne ed i calcari del cretaceo adunque sono doviziosamente ripieni di fossili, in modo che la roccia talvolta ne è quasi intieramente costituita. La disgregazione operata dall'azione incessante degli agenti atmosferici mette a nudo siffatti resti animali, taluni dei quali conservano tuttavia il guscio intatto, in perfettissimo stato e sempre di color nero-bruno; molte specie poi non si offrono che allo stato di modelli calcarei, essendo stata distrutta la conchiglia.

D'ordinario adunque un lembo del cretaceo medio si riconosce agevolmente da chicchessia nell'Italia meridionale, alla grande quantità di grossi fossili di color quasi nero, d' una conservazione perfettissima, spettanti pel maggior numero alla grande famiglia degli Ostreidi che ripuliti per azione delle acque dalla roccia che vi aderiva, trovansi profusamente sparsi alla superficie del suolo. Ed è veramente rimarchevole che le argille scagliose ricche di Ostreidi non danno sovente il menomo indizio di effervescenza allorchè vengono trattate cogli acidi. È pur vero che talvolta incontransi dei lembi estesi di tale terreno in cui nessun fossile appare, ma se si ricercherà con cura si perverrà a rinvenire un qualche cantuccio dove i fossili abbondano.

In tal modo al completo difetto di caratteri paleontologici nelle argille scagliose dei varî periodi cenozoici, quelle del cretaceo medio delle provincie meridionali di Italia contrappongono qual loro valevolissima caratteristica la costante presenza, anzi l'abbondanza e la profusione di numerose specie di fossili.

E qui nel por termine alla trattazione della litologia del cretaceo non posso trasandare dal ripetere come la costituzione di questo terreno è completamente identica in tutti i lembi sinora scoperti, di maniera che la descrizione data si applica esattamente a ciascuno di essi, sicchè lo studio d' una località è sufficiente a far nota la costituzione del Cenomaniano in Sicilia come in Calabria.

§ 3. *Dei limiti cronologici da assegnare al cretaceo medio italiano.*

Sono molti i luoghi nelle provincie siciliane e calabresi dove la serie terziaria trovasi sviluppata con una regolarità sorprendente, ed ogni periodo ha la speciale zona che lo rappresenta, e tutte le zone si succedono in ordine cronologico senza interruzione; così senza moltiplicar gli esempî io ricorderò nella provincia di Messina la pianura tra Giardini, Calatabiano e Piedimonte di unita alle colline che le fanno corona; la lunga valle tra Monforte e Sampiero; e nella provincia di Reggio la valle dello Stilaro che percorre i territorî di Stilo e di Monosterace.

Nella prima delle ricordate località il centro della pianura è occupato dai depositi quaternarî, che sono cinti dalle varie zone del plioceno; queste alla loro volta vengono circuite dalle formazioni mioceniche, le quali non formano che poggetti arrotondati di poca elevazione, e quindi succedono più all'esterno calcari nummulitici e argille scagliose, ed arenarie e conglomerati che si elevano a formare i monti circostanti e rappresentano i diversi periodi dell'eoceno, ed in fondo alle valli un calcare a grosse nummuliti che costituisce il membro più antico del nostro cenozoico. Parimenti nelle due valli ricordate di sopra, andando dalla spiaggia a monte si traversano,

nella estensione circa di dodici chilometri, tutte le zone terziarie dalle più recenti alle più antiche.

La formazione giurassica di Sicilia, quantunque reclami ancora nuove e più minuziose ricerche, pare, da quanto si conosce, che debba finalmente offrirci in varî luoghi completa la serie dei terreni, che rappresentano i suoi diversi periodi dal Retico al Titonico; così par che debba essere presso Taormina e presso S. Agata nel Messinese e forse in varî luoghi nel Palermitano.

Non così accade pel cretaceo, il quale invece, da quanto si conosce, non si presenta che sotto forma di lembi isolati, spettanti a varî periodi di questa grande epoca geologica, i terreni rappresentanti i quali non si sono trovati sinora, nell'Italia meridionale, collegati insieme in ordine cronologico, anzi ordinariamente i lembi di periodi differenti trovansi in luoghi tra loro molto distanti, siccome ho fatto notare precedentemente. Così a Taormina ed a S. Agata di Militello trovasi il Neocomiano e verun altro membro dei periodi seguenti. Nel Palermitano il Neocomiano ed il cretaceo superiore in varî luoghi compariscono isolati, pure è forse ivi che potrà un giorno scoprirsi qualche luogo dove la serie cretacea è completa; ma tuttavia siamo ben lungi da una tale scoperta, dapertutto tra noi è sconosciuta affatto la serie cretacea completa o almeno cronologicamente ordinata, siccome lo sono il giurassico ed il terziario.

Il Cenomaniano poi nel Messinese come nel Reggiano in tutti i luoghi ove fu da me scoperto, e con cura esplorato, si offre costantemente in connessione con rocce di ben altra età che quella di periodi cretacei, perlochè resta stratigraficamente isolato, e se per caso mancassero i fossili sarebbe proprio impossibile determinare l'epoca geologica che rappresenta. Difatti nè il neocomiano, nè altri strati cretacei vedonsi mai alla sua base; esso invece poggia sopra rocce di più antica data. I varî suoi lembi sporgono sempre di mezzo a rocce cenozoiche, nè mai connessi col cretaceo superiore, che non fu scoperto sinora nè nella provincia di Messina, nè in quella di Reggio.

Nel difetto completo in cui ci troviamo di ogni dato stratigrafico, bisogna adunque poggiare le deduzioni cronologiche sui soli caratteri paleontologici.

Questi invero sono concludentissimi come accade ordinariamente. Sopra oltre 223 specie di Pesci, Articolati, Molluschi, Briozoi, Echinidi, Coralli, Spongiarî e Rizopodi raccolti sinora, e che saranno descritte nella seconda parte di questo lavoro, sonvi 119 specie note, che furono perciò raccolte in varî luoghi ed in terreni di età ben determinata. L'esame di tali specie conduce facilmente ad una non dubbia conchiusione; esse appartengono al cretaceo medio e propriamente al Cenomaniano del D'Orbigny, come puossi apprezzare dalle specie qui enumerate, che sono le più comuni dei varî gruppi; *Nautilus triangularis* Montf., *Turrilites Scheuchzerianus* Bosq., *Crassatella Baudeti* Coquand., *Cardium Pauli* Coq., *C. regulare* Coq., *Trigonia distans* Coq., *Arca Delettrei* Coq., *A. Moutoniana* D' Orb., *A. thevestensis* Coq., *A. parallela* Coq., *Janira quadricostata* Sow., *Plicatula Fournelii* Coq., *Ostrea Delettrei* Coq., *Exogyra flabellata* Lamarck., *E. Africana* Lamarck., *E. oxyntas* Coq., *E. Ratisbonensis* Schlott., *Gryphaea Baylei* Guer., *Hemiaster Coquandi* Seg. ecc.

Queste e le altre specie note sono state raccolte nel Cenomaniano di Francia,

d'Inghilterra, di Svizzera, di Germania, d'Africa, quindi determinano con precisione il nostro cretaceo, il quale già, come dicemmo, era stato determinato per questi stessi irrefragabili documenti.

Intanto associate alle specie cenomaniane se ne raccolgono talune in numero assai minore che spettano al Turoniano del D'Orbigny. Così io posso ricordare siccome più comuni e più importanti le seguenti specie: *Dosinia Delettrei* (Coq.), *Trigonia scabra* Lamarck., *Avicula gravida* Coq., *A. atra* Coq., *Hemiaster batnensis* Coq., *H. Desvauxii* Coq. ecc. Queste specie accennano evidentemente agli strati turoniani; e quindi il cretaceo nostro pare che annetta alla formazione cenomaniana gli strati turoniani.

Qualche specie intanto di età diversa si frammischia alle numerose altre e richiama la nostra attenzione.

Dirò prima di qualche specie conosciuta sinora in terreni di età anteriore al Cenomaniano.

Nella contrada portella di Falcò presso Ferruzzano tra i varî esemplari del *Turrilites Scheuchzerianus* Bosc. trovai un frammento del *T. Puzosianus* D' Orb., specie propria della formazione albiana. L'esemplare quantunque non sia in ottimo stato di conservazione, pure non lascia dubbio di sorta quanto alla specie cui appartiene, la quale è stata segnalata in Francia ed in Savoia dal D'Orbigny, in Inghilterra dal Sharpe, in Isvizzera a molti luoghi dallo Studer, dai sigg. Pictet e Campiche, nella provincia di Costantina in Africa dal Coquand e sempre dapertutto nel Gault.

Quanto al giacimento di questa specie sono d' accordo tutti gli scrittori, e i sigg. Pictet e Campiche dicono che essa giace negli strati situati sui limiti dell'Albiano e del Cenomaniano, senza oltrepassare in alto i limiti del primo, ed in basso quelli dell'Albiano superiore.

Con una fauna cenomaniana distintissima e senza alcuna altra specie propria del Gault, io credo potersi ben conchiudere che il *T. Puzosianus* raccolto a Falcò è cenomaniano anch'esso, e non proviene da strati albiani, che potrebbero ivi esistere, ma che io non ho mai riconosciuto. Quindi è da credere più tosto che questa specie vissuta in tutta Europa ed in Africa in sul finire dell'epoca albiana, abbia protratto ancora la sua vita sino al periodo cenomaniano.

Tra le altre specie, in una mia Nota sul cretaceo, ho ricordato il *Pecten striato-punctatus* Roemer [1], sul quale mi è d'uopo rivenire. Questo fossile che fu da me raccolto in belli esemplari, dapprima alla contrada Magliardo, e quindi a Lando presso Barcellona, a Bova, a s. Giorgio presso Brancaleone, alla portella di Falcò, cioè nelle principali località del cretaceo medio, trovasi costantemente associato alle *Exogyra oxyntas* Coq., *E. digitata* Geinitz, *E. africana* Lamk., *Crassatella Baudeti* Coq., *Cypricardia Calabra* Seg., *Plicatula Fourneli* Coq. ecc. e perciò non v' ha dubbio di sorta che esso sia del Cenomaniano anzi del piano rotomagiano del Coquand. Ma il *P. striato-punctatus* fu dal suo scopritore raccolto nel cretaceo inferiore, e venne quindi trovato dal D' Orbigny nell'Aptiano, se pur trattasi della

[1] *Scoperta di un lembo di terreno cretaceo assai fossilifero nella provincia di Messina.* Nota di G. Seguenza (Atti della Società italiana di sc. nat. vol. XII, fasc. I. 1869).

medesima specie, come bene osservano i sigg. Pictet e Campiche ([1]). Or sarebbe veramente strano, che la specie medesima si trovasse benanco nel cretaceo medio. Siffatta considerazione mi ha impegnato ad un esame rigoroso del fossile che avea caratterizzato siccome *P. striato-punctatus*, e studiati quanti materiali possiedo, ho dovuto conchiudere che la nostra specie, quantunque tanto affine a quella alla quale l'avea rapportato, da trarre in inganno facilissimamente, pure essa deve andar disgiunta per alcuni particolari che costantemente la distinguono, e quindi l'ho nomata *P. dicotomus*.

Quanto a specie che si possano riferire ad epoca più recente del Cenomaniano e del Turoniano, io non posso citarne alcuna con sicurezza, solamente ricordo un solo esemplare in cattivo stato di una *Voluta*, che par si debba rapportare alla *V. Baylei* Coq. del cretaceo superiore, che il suo autore dice provenire dal piano campaniano, ma il nostro fu raccolto in una roccia che è l'impasto di varie bivalvi non descritte ancora, ma che trovansi altrove associate all'*Exogyra oxyntas* ([2]).

Sonvi ancora talune specie, che furono citate in varî piani del cretaceo, e delle quali bisogna ancora dire qualche parola.

E primieramente il *Corax falcatus* Agassiz di cui un dente incompleto fu raccolto in un calcare grigio del nostro cretaceo, alla contrada s. Paolo, associato alla *Gryphaea Baylei* Gueranger. Questa specie dei Selacei è stata segnalata dal suo scopritore e poscia dal sig. Reuss nel cretaceo superiore, e quindi conoscesi nella creta superiore bianca d'Inghilterra, e nella creta marnosa (plaener) di Strehlen e di Quedlimbourg. Più recentemente i sigg. Pictet e Campiche l'hanno riconosciuto nell'Albiano superiore di Sainte-Croix ([3]). Quindi se realmente fa d'uopo riferire alla medesima specie i denti raccolti in questi varî piani, il nostro non fa che colmare una laguna, perchè raccolto in un piano intermedio quale si è il Cenomaniano.

Una seconda specie di Squalido fu raccolta di unita alla precedente; essa rapportasi alla *Odontaspis gracilis* Agassiz, la quale fu trovata dal suo scopritore nel Neocomiano di Neuchatel. Quindi dai sigg. Pictet e Campiche vi furono riferiti numerosi denti del Mont Salève (marne neocomiane), ed altri molti raccolti a Sainte-Croix nel Neocomiano, nell'Aptiano, nell'Albiano inferiore e più abbondantemente nell'Albiano superiore. L'unico dente che io vi rapporto fu trovato di unita al *Corax falcatus* Agassiz ed alla *Gryphaca Baylei* Gueranger, esso per la forma risponde benissimo alle figure date dall'Agassiz, la radice è conformata esattamente come in quelle, intanto si associa agli esemplari di Sainte-Croix per le strie di cui è ornata verso la base la faccia interna, carattere molto variabile siccome dimostrarono i sigg. Pictet e Campiche. Parmi inverosimile la conchiusione che tale specie sia sopravvissuta dal Neocomiano inferiore sino al Cenomaniano, ma da quanto ho detto non può trarsi altra conseguenza, d'altronde nell'Albiano superiore tale

([1]) *Description des fossiles du terrain crétacé de Sainte-Croix.*

([2]) L'unico esemplare di cui parlo, è un modello in sì cattivo stato che potrebbe appartenere anco alla *V. Renauxiana* D'Orb. che spetta al Turoniano.

([3]) *Description des fossiles du terrain crétacé de Sainte-Croix.* 2e série, 5° fascicolo, pag. 80.

specie fu trovata abbondante e quindi è ben naturale che essa abbia potuto sopravvivere sino all'apoca cenomaniana.

Un'altra specie infine che viene riferita a varî periodi del cretaceo si è la *Serpula filiformis* Sow. che scoperta nell'Aptiano d'Inghilterra, di Svizzera, di Spagna, di Costantina, viene rapportata da varie parti della Germania dal Goldfuss, che la riferisce inesattamente alla *S. Gordialis* Schlotheim, riguardandola siccome varietà, laddove quest'ultima specie è propria del Devoniano.

Il Goldfuss, il Reuss ed altri par che l'abbiano anco raccolta nel cretaceo superiore e medio. Gli esemplari che vi riferisco furono raccolti associati ad una varietà dell'*Exogyra oxyntas* Coquand, ed alla *Radiolites Nicaisei* Coq. quindi essi sono senza dubbio cenomaniani.

Da quanto ho esposto bisogna necessariamente ritenere che il *Pecten* altra volta riferito al *punctato-striatus* è specie distinta e propria del Cenomaniano, che il *Corax falcatus*, l' *Odontaspis gracilis*, la *Voluta Baylei?*, la *Serpula filiformis* raccolti di unita a specie caratteristiche del Cenomaniano, non provengono che da questa formazione, nella quale bisogna credere che giacesse anco l'unico esemplare del *Turrilites Puzosianus*.

Dalla precedente discussione quindi, e da oltre un centinaio di specie cenomaniane e turoniane, che il nostro cretaceo medio racchiude, bisogna conchiudere:

1° Che il cretaceo medio dell'Italia meridionale, a giudicare dai fossili, spetta ai periodi Cenomaniano e Turoniano;

2° Che esso trovasi affatto isolato dagli altri membri del cretaceo, essendochè vi mancano compiutamente gli strati riferibili ad altro periodo anteriore al Cenomaniano ovvero posteriore al Turoniano;

3° Che esso rappresenta perciò il solo cretaceo medio, dal quale anzi viene escluso il periodo più antico, cioè l'Albiano, del quale racchiude soltanto qualche specie sopravvissuta sino al periodo seguente.

§ 4. *Partizione del cretaceo medio dell' Italia meridionale.*

La conformazione del suolo cretaceo appianato affatto, ovvero sotto forma di pogetti arrotondati ed a lieve declivio, che rarissimamente presentano degli spaccati naturali, che valgano ad offrire allo studioso sezionati gli strati di cui è costituito il terreno; gli sconvolgimenti a cui andarono soggetti tali strati, siccome precedentemente dicemmo, sono gravissimi ostacoli al compimento d'un esame stratigrafico minuzioso ed accurato, istituito a determinare specialmente quali partizioni possa ammettere un tal terreno, cioè in quanti periodi la formazione possa venire divisa.

Ed invero bisognerebbe in tal caso determinare dettagliatamente l'ordinamento stratigrafico di quelle rocce, raccogliere separatamente i fossili di ciascuno strato, o di ciascuna sezione, e dallo studio comparativo di queste varie faune ricavarne i criterî che devono guidare nella partizione. Sgraziatamente per ciò che fu detto il nostro cretaceo non si presta ad un tale minuto esame, e se in qualche luogo ci viene dato di vedere una serie di strati, non ci si permette poi di raccogliere i fossili che racchiudono, essendochè nel maggior numero dei casi non vale il martello del geologo per estrarneli, essi si rompono, si sfogliano in modo orribile, e le due

porzioni della roccia ne asportano ciascuna una parte, che è impossibile poi di staccare; ciò avviene sopratutto cogli *Ostreidi*, colle *Plicatule*, coi *Pecten* e con tanti altri generi affini, di manierachè bisogna pur contentarsi in tutti i luoghi di fare le raccolte paleontologiche razzolando alla superficie del suolo, e raccogliendo quanto s' incontra. Ivi i fossili si trovano sparsi con grande profusione, d'una conservazione sorprendente, e completamente ripuliti dalla roccia che l' includeva. Il lungo e continuato lavorio degli agenti atmosferici disgrega la roccia e la erode incessantemente lasciando intatti i fossili, i quali alla fin fine sparsi sul suolo trovansi insieme commisti, qualunque sia la loro provenienza, dal calcare, dalle marne o dalle argille, dagli strati superiori o dagl' inferiori. Più sovente quindi i fossili così commisti trovansi gli uni disgiunti dagli altri, ma occorre spesso ancora di trovare varie specie associate insieme in frammenti di strati calcarei, i quali non furono ancora disgregati completamente, e perciò ci danno agio di vedere varie associazioni specifiche più o meno istruttive.

Io non credo impossibile uno studio stratigrafico particolareggiato del nostro cretaceo medio, ma devo confessare che per reiterate ricerche mi è stato sinora impossibile di ottenere risultamenti molto soddisfacenti. Esporrò quindi quanto mi è riuscito di conoscere intorno all'associazione delle più comuni specie, e quanto ho potuto ricavare dalle incomplete sezioni naturali che potei esaminare.

Poca varietà di strati interviene a costituire il nostro cretaceo medio, come già dissi, le argille scagliose, che ne formano la massa principale, le marne ed i calcari. Le prime sono sviluppatissime alla base e formano da se sole una zona inferiore abbastanza potente, come vedesi nei burroni di S. Giorgio sotto Brancaleone, e di Magliardo.

Non riesce possibile di scandagliare lo spessore di tali argille, le quali a S. Giorgio sporgono fuori con una potenza di oltre trenta metri. Le marne occupano ordinariamente la parte superiore, e mal si distinguono dalle stesse argille alle quali fanno transizione, mentre in alto acquistando molta calcite fanno passaggio ai calcari e divengono biancastre. I calcari, in istrati di piccolo spessore (da un decimetro a otto, e per eccezione locale anco più) alternano colle marne ed anco colle argille nelle assise superiori, e si distinguono agevolmente pel colorito più chiaro e pella struttura diversa.

La sezione migliore, perchè più profonda, vedesi in un burrone alla contrada S. Giorgio, ivi le argille scagliose grigie in basso sono prive di strati calcarei e ricche di numerosi ostreidi, che sono conservatissimi, e per la facilità colla quale si disgrega e scoscende la roccia possono estrarsi assai facilmente; l' *Exogyra oxyntas* Coq., è quella che più abbonda, viene in seguito l'*Alectryonia syphax* Coq., l' *Exogyra Africana* Lamk., l'*Ostrea Delettrei* Coq. ecc. Gli strati superiori divengono sempre più marnosi e calcarei e la serie si termina con uno strato di alcuni metri calcareo-marnoso e bianco, che contrasta col colore grigio-scuro delle argille. In esso i fossili sono numerosi, e col suo disfacimento vengono fuori e rotolano giù nel burrone mischiandosi a quelli degli strati sottostanti; il maggior numero di essi si raccoglie sotto forma di modelli ben conservati.

Fra le specie più comuni di questi strati superiori io ricorderò le seguenti:

Nautilus triangularis Montg., *Acanthoceras Mantelli* (Sow.), *Turrilites Scheuchzerianus* Bosq., *Arca Delettrei* Coq., *A. Moutoniana* D'Orb., *Janira quadricostata* Coq., *Exogyra oxyntas* (Coq.,) *E. flabellata* (Lamarck) ecc.

Bastano queste poche specie enumerate tanto dell'argilla, quanto degli strati superiori marnoso-calcarei per conchiudere che gli strati tutti di questa sezione sono Cenomaniani. E dapertutto dove sono delle sezioni, come a Magliardo a Falcò ecc., par che si ripetano i medesimi fatti, e i varî strati rapportansi perciò al Cenomaniano.

Dirò soltanto qualche parola intorno alla piccola sezione di Magliardo in Sicilia: Anco ivi le argille formano da se sole la porzione inferiore, e contengono *Exogyra oxyntas* Coq., ed *Alectryonia syphax* Coq., gli strati superiori sono un' alternanza di argille e di straterelli calcarei, entrambi pieni zeppi dei medesimi ostreidi, ai quali si aggiungono, l' *Exogyra africana* Lamk., l' *E. flabellata* Lamk. ecc.

Bisogna quindi conchiudere che le sezioni esaminate non ci danno alcuno elemento di suddivisione perchè esse non ci offrono che strati spettanti al Cenomaniano. Interroghiamo i fossili e primieramente vediamo quali partizioni sono state accettate o proposte intorno al cretaceo che ci occupa.

Il D'Orbigny, che dapprima ne faceva di questo periodo unico piano lo suddivise poi in Cenomaniano e Turoniano, ed è questa divisione appunto che viene tuttavia adottata generalmente, e i nostri fossili come dicemmo precedentemente accennano ad ambi questi periodi con circa quindici specie del Turoniano ed oltre ottanta del Cenomaniano.

Ma il prof. H. Coquand, l'egregio ed accurato esploratore del cretaceo di Francia, di Spagna, d'Algeria, ha proposto una nuova divisione a molti piani di tutto il cretaceo, così nel suo sistema il Turoniano del D'Orbigny verrebbe ripartito in quattro piani ed il Cenomaniano in due (¹).

Volendo riscontrare tali piani nel nostro cretaceo medio, e mal prestandosi la stratigrafia interroghiamo i fossili.

Esaminando le specie note e con sicurezza determinate, io ottengo i seguenti risultamenti. Il Rotomagiano del Coquand vi è rappresentato da più di una sessantina di specie, delle quali ricorderò le seguenti:

Acanthoceras Rothomagensis (Sow.)	*Cyprina trapezoidalis* Coq.
» *Mantellii* (Sow.)	*Cardium Pauli* Coq.
Turrilites Scheuchzerianus Bosq.	» *auressense* Coq.
» *Gravesianus* D'Orb.	» *regulare* Coq.
Strombus incertus D'Orb.	*Isocardia aquilina* Coq.
Mactra Didonis Coq.	» *numida* Coq.
Venus plana Sow.	*Trigonia distans* Coq.
» *Dutrugei* Coq.	*Arca Delettrei* Coq.
Crassatella Baudeti Coq.	» *Moutoniana* D'Orb.
» *Tenuclensis* Coq.	» *thevestensis* Coq.

(¹) Vedi: H. Coquand, *Géologie et paléontologie de la prov. de Constantine.* — Monographie du genre Ostrea. Terrain crétacé. Introduction. 1879.

Arca parallela Coq.
» *pholadiformis* D'Orb.
Pinna Galliennei D'Orb.
Janira quadricostata (Sow.)
Pecten Desvauxii Coq.
Plicatula Fournelii Coq.
» *auressensis* Coq.
Alectryonia Syphax (Coq.)
Exogyra haliotidea (Geinitz.)
» *Africana* Lamk.
Exogyra canaliculata (Sow.)
» *oxyntas* (Coq.)
» *digitata* (Geinitz.)
Gryphaea vexiculosa (Gueranger.)
Ostrea Delettrei Coq.
Radiolites Nicaisei Coq.
Epiaster Villei Coq.
Hemiaster Coquandi (Seg.)
» *Homalensis* Coq.

Tutte queste specie, e le molte altre ancora, accennano come il Rotomagiano del Coquand forma la parte principalissima del nostro cretaceo medio, e difatti tutti quegli strati, che potei esaminare nelle due sezioni di S. Giorgio e di Magliardo spettano a tale piano, siccome nelle altre sezioni, essendochè i fossili lo dimostrano ad evidenza.

Il Carentoniano, che forma parte del Cenomaniano del D'Orbigny, ha anch'esso i suoi rappresentanti trai nostri fossili. Una diecina delle specie note con sicurezza spettano a questo piano del Coquand, tra esse ricordo le seguenti:

Nautilus triangularis Montf.
Strombus inornatus D'Orb.
Cardita Forgemolli Coq.
Exogyra flabellata Lamk.
Exogyra Olisoponensis (Coq.)
» *ratisbonensis* Schlott.
Gryphaea Baylei Gueranger.
Hemiaster africanus Coq.

Ed un fatto stratigrafico par che venga in appoggio alla distinzione di un tal membro.

Quasi in tutte le località da me esaminate, ho incontrato sempre alla parte superiore della formazione, o più esattamente, alla superficie del suolo, i frammenti di uno strato poco spesso (ordinariamente alcuni decimetri) costituito di calcare marnoso grigio-scuro, o di argille, il quale risulta dall'accumulo di un' enorme quantità di piccoli ostreidi, riferibili alla *Gryphaea Baylei* Gueranger ed all'*Exogyra ratisbonensis* Schlott., alle quali specie se ne associano altre con rarità.

In pari modo trovansi strati marnosi costituiti quasi completamente dall'*Exogyra flabellata* Lamk., e sovente questa specie vedesi ammassata in gran quantità in frammenti di strati calcarei sparsi alla superficie del suolo.

Ma varî fatti poi dicono in vero contro tale distinzione, dappoichè ci dimostrano insieme associate le specie carentoniane con altre rotomagiane.

Nella parte più bassa della sezione presso S. Giorgio (vedi fig. 5ª) le argille scagliose grigie sono ripiene di *Exogyra oxyntas* Coq., e di altre specie, ma quel che fa pel caso nostro si è che in uno straterello soprastante, in basso della serie, ad un ammasso di *E. oxyntas*, vi trovai ravvicinate insieme e disposte nel medesimo piano di stratificazione l'*E. flabellata* Lamk., che il Coquand riguarda siccome carentoniana, di unita all'*A. Syphax* Coq., ed all'*O. Delletrei* Coq., ambedue rotomagiane. Esaminando poi tutti gli strati di quella sezione ho dovuto convincermi che l'*E. oxyntas* e l'*E. flabellata* trovansi dapertutto ed a tutti i livelli, sebbene quella vadi diminuendo dal basso all'alto, e questa invece divenga sempre più abbondante.

Negli strati inferiori come nei superiori marnoso-calcarei di questa sezione, la fauna predominante è dapertutto rotomagiana, siccome già avea detto, quindi bisogna pur conchiudere che l'*E. flabellata*, una tra le più comuni specie del nostro cretaceo, nell' Italia meridionale trovasi associata alle specie carentoniane ed insieme ad una ricca fauna rotomagiana.

Accennerò ancora di avere osservato spesso sull'ombone dell'*E. flabellata* l' impronta del *Cardium regulare* su cui essa si fissò, e questa specie è rotomagiana.

Così ancora l' ho trovata associata e fissata talvolta sull'ombone della *Janira quadricostata* Sow. sul *Pecten dichotomus* n. sp. e sopra altre specie rotomagiane per eccellenza.

Di simili associazioni potrebbero citarsene un gran numero tra specie carentoniane e rotomagiane secondo Coquand. Così la *Gryphaea Baylei* colla *G. vexiculosa* coll'*Exogyra africana* ecc.; l'*E. columba* colla *Janira quadricostata* coll'*Arca Delettrei*; l'*E. Olisoponensis* col *Cardium regulare* e così via. Dapertutto poi e con tutte le specie si associa il più comune rappresentante del Rotomagiano l'*E. oxyntas.*

Bisogna quindi conchiudere, che quantunque taluni strati speciali superiori si trovano assai ricchi delle specie proprie del Carentoniano, pure queste associandosi alle specie del Rotomagiano, e talune penetrando sin negli strati più antichi di esso, ne risulta dapertutto una fauna mista, la quale necessariamente dà poca importanza nell' Italia meridionale alla divisione del Cenomaniano del D' Orbigny in due distinti piani.

Quanto alle specie che ho detto precedentemente appartenere al Turoniano del D'Orbigny, spettano tutte, secondo il Coquand ([1]), al suo piano Mornasiano.

Difatti veruna specie io conosco sinora, che si riferisca al piano Angumiano del Coquand.

Invece ne conosco circa quattordici del piano Mornasiano, le quali si trovano sparse con molta parsimonia. Ricorderò qui le più importanti.

Lavignon Marcuti Coq.	*Avicula gravida* Coq.
Dosinia Delettrei (*Venus*) Coq.	» *atra* Coq.
Venus Cherbonnaui Coq.	*Hemiaster Batnensis* Coq.
Trigonia scabra Lamk.	» *Desvauxii* Coq.
Modiola indifferens Coq.	

Veruno strato, veruna roccia, verun frammento io conosco sinora in cui abbia osservato queste specie insieme associate, ma ciò dee attribuirsi alla distruzione avvenuta degli strati superiori, per lo scivolamento delle argille e per l'erosione. Pure le specie di questo periodo annunciano chiaramente che esso è rappresentato, sebbene con molta limitazione, tra gli strati del nostro cretaceo. Le località di S. Giorgio, Portella di Falcò in Calabria, e Magliardo in Sicilia sono qualle che somministrano più sovente queste specie.

Verun fossile s'incontra poi che spetti ai piani più recenti del Coquand.

Da questo esame e dai fatti tutti che ci offre il nostro cretaceo medio bisogna conchiudere:

([1]) Vedi: *Géologie et paléontologie de la prov. de Constantine.*

1° Che la parte principalissima di esso spetta al piano cenomaniano, e propriamente a quel membro inferiore che il Coquand ha distinto col nome di Rotomagiano.

2° Che le specie del Rotomagiano fanno passaggio negli strati superiori, che dovrebbero riferirsi al Carentoniano, e talune riguardate siccome caratteristiche di questo periodo trovansi sin negli strati più antichi del precedente. Tali fatti rendono poco importante e poco distinta in Italia la partizione del Cenomaniano in due diversi piani.

3° I pochi fossili del Mornasiano, che sarebbero i soli che rappresentano il Turoniano del D' Orbigny, annunciano che anco questo periodo vi è rappresentato, sebbene poco estesamente, e bisogna tuttavia scoprire gli strati che li racchiudono. Siccome poi veruna specie ricorda l'esistenza degli altri tre piani del cretaceo medio secondo Coquand, il Turoniano del D' Orbigny risponde presso noi al Mornasiano soltanto.

4° Quindi a me sembra che il cretaceo medio dell'Italia meridionale si affà meglio alla semplicità di divisione proposta dal D'Orbigny in Cenomaniano e Turoniano, anzichè alla multipla divisione del Coquand, all'applicazione della quale evidentemente mal si presta.

§ 5. *Rocce sulle quali poggia il nostro cretaceo medio.*

Ho precedentemente esposto come il cretaceo medio sia affatto isolato dai membri inferiori e superiori della grande epoca cretacea, che anzi esso manca ancora del suo più antico membro l'Albiano, perlochè dapertutto esso va a poggiare sopra rocce giurassiche o più antiche, ed è ricoperto sempre da rocce terziarie.

Nel Messinese esso poggia costantemente sulle rocce cristalline, spettanti alla formazione laurenziana (gneiss, schisti amfibolici, schisti micacei, calcari cristallini ecc.). Difatti i varî lembi nel territorio di Barcellona sono disposti sul margine della formazione cristallina, da S. Lucia del Mela, insino presso Castroreale, formando probabilmente una zona non interrotta, ma qua e là ricoperta dai terreni più recenti. Il lembo paleontologicamente più importante trovasi alla contrada Magliardo in fondo ad una profonda ma elevata valle, circuita da alti monti cristallini. Parimenti sul lato orientale dei monti Peloritani, al piano di Casso sopra Pezzolo, un piccolo lembo giace in seno a vasta formazione cristallina.

Nei territorî di Brancaleone e di Ferruzzano il cretaceo di unita alle potenti masse terziarie, che lo ricuoprono, sono cinti da alti monti cristallini, e quindi è evidente che anco nel Reggiano la nostra formazione giace sullo gneiss. Ma a S. Giorgio presso Brancaleone poco discoste dal cretaceo, siccome presso Motticella, sporgono fuori delle rocche giurassiche, cioè dei calcari brecciati ad encrini, colorati in rossiccio o in gialliccio e di età indeterminata. Tal fatto ripetesi al Capo di Bova, percui è presumibile che porzione del cretaceo calabrese poggi sopra un tal calcare.

Nella provincia di Palermo il cretaceo medio conoscesi, come dissi, ai fianchi dei monti di calcare titonico, che costituiscono la vasta regione delle Madonie, e quindi par che debba poggiare sugli strati dell'ultimo periodo giurassico, così presso Scillato e Caltavuturo e così presso S. Giovanni di Caccamo; ma in taluni luoghi

del Palermitano sul calcare titonico si presentano gli strati del Neocomiano, e quindi è probabile che in qualche luogo di quella regione il cretaceo medio poggi sul cretaceo inferiore.

Sembra chiaro da quanto ho detto che nelle diverse regioni è diverso il terreno su cui poggia il nostro cretaceo.

Passiamo ora all'esame delle rocce che lo ricuoprono.

§ 6. *Terreni che immediatamente si sovrappongono al cretaceo medio.*

Il cretaceo superiore manca in tutti i luoghi da me esplorati, e quindi sugli strati del Cenomaniano e del presunto Turoniano sviluppasi più o meno completa la serie terziaria.

Lo studio dei terreni che sovrastano al cretaceo medio riesce di alto interesse per la distinzione, essendochè taluni strati, per la loro costituzione, somigliano siffattamente al cretaceo stesso, che allorquando trovansi con esso in contatto, sovente sembra che ne siano la continuazione, e si confondono facilmente con esso, come è accaduto a me stesso di fare nel principio delle ricerche, che vado esponendo in questo lavoro. Bisogna quindi che sieno ben noti i caratteri tutti di tali rocce perchè non si abbiano a confondere cogli strati sottostanti.

Le rocce più antiche che fiancheggiano ordinariamente quei lembi di cretaceo medio sono i conglomerati e le arenarie dell' antico eoceno, rappresentanti il piano bartoniano, le quali presentandosi sempre con una grande potenza si elevano in monti ripidi e scoscesi, che fanno un contrasto meraviglioso colle forme dimesse, appianate o tondeggianti dei poggetti del cretaceo. D'ordinario rocce di più recente data interponendosi occultano la linea di contatto tra il cretaceo e l'eoceno e ne mascherano la immediata sovrapposizione. I grossi strati di arenaria sono disgiunti sovente da argille scagliose di color grigio più o meno chiaro, che in taluni luoghi si sviluppano grandemente, ma nel Messinese e nel Reggiano sono prive d'ogni specie di fossili. Ciò non pertanto la loro età è ormai ben definita dal calcare a *Nummulites perforata* D'Orb. *N. distans* Desh. ecc., che sottostà ad esse nella provincia di Messina, siccome da fossili che presso Termini-Imerese contengono esse stesse in abbondanza (¹).

Le località del cretaceo presso Brancaleone e Ferruzzano, siccome talune presso Barcellona in Sicilia sono cinte da colline e da monti delle arenarie eoceniche suddette. Ma le rocce che si vedono sovrapposte al cretaceo immediatamente ed in tutti i luoghi sono ben altre, e sono ad esso molto somiglianti per la natura litologica, ed inoltre si appoggiano, s'innestano, s'insinuano e quasi si confondono in modo che riesce assai difficile segnarne i confini.

Argille scagliose di un secondo periodo dell'eoceno sono quelle che si manifestano d'ordinario sovrapposte al cretaceo, esse hanno colori variati, che si manifestano a macchie, a zone irregolari e con isfumature varie, quindi se ne vedono di verdi, di rosse, di rosso-brune, di grige, di biancastre ecc. Straterelli calcarei, di colori chiari ma variati, a struttura compatta o cristallina, marnosi o no alternano cogli strati

(¹) Vedi: G. Seguenza, *Brevissimi cenni intorno la serie terziaria della provincia di Messina.* (Bollettino del r. Comitato geologico. Anno 1873).

argillosi, e per lo sconvolgimento di questi, e pel loro scivolamento gli strati calcarei si sono frantumati, si sono ridotti in lastre di variissime dimensioni, che sparse alla superficie del suolo caratterizzano questo periodo delle argille scagliose.

Questa zona dell'eoceno poggia sopra tutti i lembi del cretaceo medio del Messinese e del Reggiano e forse anco delle Madonie, ma senza offrire indizio di fossili. Presso Termini-Imerese, Mistretta, Stilo, Brancaleone taluni straterelli calcarei interposti alle argille sono ricchi di Nummuliti e di Orbitoidi, fra le quali ricorderò la *Nummulites Tchihatcheffi* D'Arch., l'*Orbitoides dispansa* Gumbel., l'*O. stellata* D'Arch.ecc.[1] che caratterizzano bene questa zona.

L'eoceno superiore che presso Termini-Imerese, Cesarò ed altrove si termina con un calcare a nummuliti ed alveoline molto sviluppato in potenza ed estensione offre soltanto uno strato poco potente di tale roccia nei luoghi del cretaceo, e bene spesso vi s'incontra soltanto sotto forma di frammenti o di massi di vario volume. Le specie che vi sono contenute più abbondantemente sono: *Nummulites striata* D'Orb., *N. variolaria* Sow., *Operculina ammonea* Leym., *Alveolina oblonga* Desh., *A. ovoidea* D'Orb.[2].

In tal modo le argille scagliose di questa zona, di unita ai calcari nummulitici interposti ed allo strato sovrastante costituiscono il piano liguriano, che è quello che più comunemente vedesi a contatto col cretaceo.

Gli scoscendimenti, la erosione, il decadimento delle argille scagliose del cretaceo come dell'eoceno mettendo a nudo i frammenti di strati calcarei di ambe le formazioni, e fratturando il calcare nummulitico, fanno sì che tutte queste rocce si uniscano insieme e coi fossili del cretaceo, là dove limitano le due formazioni, e specialmente dove il suolo si profonda in burrone; dimodochè i calcari secondarî si confondono cogli eocenici, i fossili cretacei colle nummuliti. Ciò si osserva bene a S. Giorgio presso Brancaleone, alla portella di Falcò presso Ferruzzano, a Lando e Magliardo presso Barcellona.

Ma bisogna ancora considerare altre argille scagliose. A quelle dell'eoceno ed al calcare nummulitico succedono nuove formazioui con nuove argille scagliose in tutte le località.

È questa la serie di strati che io rapporto al Tongriano e che offresi sovente incompleta. Essa costa dal basso all'alto dei seguenti membri:

1° Straterelli calcarei compatti, con vene spatiche, di color bianchiccio o verdastro con fucoidi e talvolta con piromaca, che alternano con marne scagliose di color biancastro e grigiastro.

2° Schisti bituminosi talvolta ricchi di cristallini di gesso, che si dispongono nei piani di stratificazione aggruppandosi attorno a varî centri.

3° Argille scagliose di colore ben marcato ed uniforme, verde, rosso, o grigioscuro, le quali racchiudono straterelli di limonite, e di siderosio litoide, le quali sostanze vi sono sparse anco sotto forma di arnioni e di concrezioni variate, che d'ordinario misti ai frantumi di strati ricuoprono il suolo.

4° Potenti strati di arenaria bianca, giallastra o rossa costituita da granelli di

[1] Vedi: G. Seguenza, *Brevisssimi cenni intorno la serie terziaria della provincia di Messina.*
[2] Vedi: G. Seguenza, op. citata.

quarzo ialino, talvolta fortemente coerenti, ed in altri casi pochissimo, di modo che diviene friabile.

Siffatta arenaria costituisce un ottimo orizzonte geologico per essere facilmente riconoscibile distinguendosi da quelle di altre età, e dalla bartoniana specialmente, perchè non è micacea, ma costa esclusivamente di granelli di quarzo ialino.

Questa roccia alterna in istraterelli colle argille scagliose nella porzione superiore della terza zona, ed in taluni luoghi diviene brunastra, acquista grande tenacità perchè i granelli si sono direi quasi compenetrati, e perciò la frattura è proprio quella d'una quarzite; e lucida ne è la superficie degli strati e delle fenditure, splendentissima per innumerevoli cristallini di quarzo.

La serie completa testè descritta può bene osservarsi al di là della portella di Falcò, tre chilometri e mezzo ad occidente di Ferruzzano. Presso S. Giorgio la serie par che manchi degli schisti bituminosi, siccome a Magliardo nel territorio di Castroreale, la quale roccia ricomparisce a S. Paolo presso Barcellona.

Le argille scagliose alternanti con arenaria silicea variano di colorito da luogo a luogo; sono rosso-scure e talora verdi nei territorî di Brancaleone e di Ferruzzano; verdi a Magliardo ed in altri luoghi; divengono poi grige o grigio-rossastre alle Caronie ed alle Madonie dove prendono un grande sviluppo.

In tutta questa serie di strati i fossili mancano completamente tanto nel Messinese quanto nel Reggiano, ma alle Madonie vedonsi nelle argille taluni Gasteropodi i cui modelli ora sono di limonite bruna ed ora di arenaria. Mi basta ricordare il *Cerithium Meneguzzoi* Fuchs., il *Turbo Asmodei* Brongn., la *Natica auriculata* Grat. Negli strati marnoso-calcarei subordinati presso Isnello vedonsi immensi banchi di coralli, spettanti a forme che caratterizzano il Tongriano del Vicentino, delle quali ricordo qualche specie.

Hydnophora venusta (Cat.)
Latimeandra dedalea Reuss.
Stylocoenia lobato-rotundata Mich.
Phyllocoenia irradians Edw. et H.
Heliastraea Lucasana (Defr.)
» *immersa* Reuss.
Astreopora decaphylla Reuss. (¹).
ecc.

Il breve lembo di cretaceo che osservai presso la marina di Bova sottostà immediatamente a strati ancor più recenti di quelli esaminati sinora. Essi costano d'uno straterello di calcare a Briozoi sormontato d'una massa di argille grige quasi scagliose, sparse d'una considerevole quantità di squamette calcaree, che imprimono alla formazione un aspetto che la fa rassomigliare alquanto alle argille scagliose del cretaceo. Questi strati spettano al mioceno medio e i fossili che li caratterizzano raccolgonsi nel Messinese e presso Stilo (²).

Tralascio di discorrere delle formazioni più recenti, come quelle che possono confondersi meno col cretaceo, dal quale terreno trovansi sempre più discoste di quanto lo sono le formazioni precedenti.

Dalle cose esposte in questo paragrafo risulta chiarissimamente, quanto alla

(¹) Vedi: G. Seguenza, *Brevissimi cenni intorno la serie terziaria della provincia di Messina*. — *Dell'Oligoceno in Sicilia.*

(²) Vedi. *Brevissimi cenni* ec. pag. 15 e 16. — *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio.*

successione stratigrafica delle rocce ed alla loro cronologia, confirmate pienamente dai dati paleontologici, che *le argille scagliose nell'Italia meridionale non formano il materiale esclusivo d'un sol periodo geologico, ma che invece esse si manifestano nel cretaceo medio, nel Bartoniano, nel Liguriano, nel Tongriano e sin nel Langhiano.*

Di tal maniera che riesce vano anzi erroneo invocare la loro natura per caratterizzare, distinguere o riconoscere un periodo geologico qualunque. Risultamento che va in perfetto accordo, coi dettati generali della moderna geologia, i quali ricusano ai caratteri litologici delle rocce quella importanza che si accordava loro altra volta, ed appena, per le formazioni terziarie specialmente, li annoverano tra i distintivi locali e meno importanti.

Ma questa importanza locale è veramente considerevole, bisogna pur confessarlo, la fisonomia geognostica di un paese dipende dalla litologica costituzione dei suoi terreni, la quale in certi limiti topografici diviene un'ottima guida per la distinzione stratigrafica e cronologica delle rocce, e quindi di un soccorso valevolissimo per le ricerche che non eccedono certi limiti di spazio.

Bisogna quindi che sieno studiati minuziosamente i caratteri petrografici di un luogo, perchè se ne tragga tutto l'utile di cui sono capaci. Difatti le argille scagliose di diverse età, tanto somiglianti tra loro sino a confondersi a scambiarsi ci offrono pure distintivi valevolissimi allorchè vengono esaminati con cura.

E già lo abbiamo veduto, anco tralasciando la grande abbondanza dei fossili, che in nessun caso vien meno a caratterizzare il nostro cretaceo medio, ed a fare un meraviglioso contrasto col difetto completo che ci offrono le argille di tutte le altre età, quelle del cretaceo sono grigio-scure, uniformi, sparse di straterelli calcarei bianchicci, che spargono il suolo dei loro varî frammenti.

Le argille scagliose dell'eoceno bartoniano sono meno distintamente scagliose delle precedenti, di color grigio e per rarissima eccezione rossastre, senza strati calcarei e senza minerali accidentali.

Il Liguriano ci offre argille scagliose variegate, nelle quali i colori rosso, verde, grigio, bianchiccio, brunastro ecc. sono sparse a macchie irregolari e di grandezza varia, con straterelli calcarei di varî colori e strutture, i frammenti dei quali ricuoprono il suolo.

Le argille del Tongriano per la costituzione e pei vivi coloriti sono come le precedenti, ma presentano per considerevoli estensioni colorito uniforme, mancano di straterelli calcarei, alternano sovente con istrati d'arenaria, e racchiudono, arnioni, concrezioni e straterelli di sideriosio litoide di color bruno, sovente mutato in limonite, che ridotti in frammenti spesso ricuoprono il suolo.

Il Langhiano infine presenta argille meno scagliose, grige, sparse sovente di squamette calcaree.

Quantunque dai caratteri esposti non riesca troppo difficile distinguere le argille scagliose delle diverse età, pure la loro successione stratigrafica, gli scoscendimenti e gli scivolamenti a cui vanno soggette, pei quali quelle di una età vanno a mischiarsi e confondersi colle altre, fanno credere ad un passaggio graduale pei caratteri misti che presentano presso i piani di contatto, e quindi, per chi non ha lungamente esplorato tali terreni, la confusione riesce facilissima, passandosi quasi per

gradi da un terreno all'altro, sieno anco le argille del cretaceo medio che si connettano, come spessissimo accade, con quelle del Tongriano.

Ad una tale confusione vi concorre e molto una particolare e costante disposizione topografica dei varî membri stratigrafici che trovansi a contatto. Le arenarie ed i conglomerati dell'eoceno bartoniano si ergono in monti ripidi ed elevati come già dissi cingendo ad una certa distanza i luoghi dove affiora il cretaceo sotto forma di poggetti o di falsi piani, ed è veramente rimarchevole come a questo costantemente colle medesime forme dimesse si connettono le argille dell'eoceno liguriano e del tongriano ricuoprendolo immediatamente, senza che le potenti arenarie del bartoniano vi s'interponessero; dimanierachè dovunque affiora il cretaceo di cui parlo, le argille scagliose delle tre formazioni si trovano successivamente in contatto, il loro rammollimento ed il decadimento ne scancellano i confini e quindi ne succede d'ordinario una gran confusione.

In sul principio delle mie ricerche sul cretaceo, da questa naturale connessione delle varie argille, che pone tanto ostacolo a riconoscere la vera successione stratigrafica, dal difetto, quasi abituale, degli straterelli di calcare nummulitico del Liguriano, che ancora non avea scoperto, fui anch' io tratto in inganno e riguardai le argille eoceniche e del mioceno inferiore siccome connesse col cretaceo, e nelle mie prime note assegnai alle argille scagliose di quest'ultimo il carattere di variegate, che non appartiene loro per verun conto, e che invece spetta alle prime.

In questa serie di fatti di alto interesse stratigrafico, che è stata la causa di tanti erronei apprezzamenti e di tanti dubbî, a me pare che si appalesi con evidenza la cagione erronea che indusse il sig. C. Montagna a credere che in Calabria sopra strati con carbone e denti di Antracoterio, vi giacciano strati con ammoniti ed altri fossili secondarî ([1]). Difatti il carbone di Agnana e di Antonimina di cui egli parla giace interstratificato nelle arenarie, che per la loro posizione stratigrafica e pei fossili che racchiudono bisogna riferire ad un membro superiore del Tongriano, col quale si connettono argille scagliose e schisti varî del medesimo piano, alcuni sovrastanti ed altri sottostanti. Or se per poco avendo raccolto dei fossili cretacei, e quindi anco delle ammoniti, a Brancaleone o altrove, si sono credute coetanee le argille scagliose cenozoiche, per le apparenze e le circostanze ingannatrici di sopra esposte, tostochè s'incontrano quest'ultime si crede colla massima sicurezza che sono le argille dalle ammoniti, quantunque queste non vi si sieno trovate, come non potevano trovarvisi, e si proclama quindi che ci sono strati ad ammoniti soprastanti e perciò superiori agli strati a combustibile di Agnana.

Così a mio giudizio è accaduto l'equivoco in cui è incorso il sig. Montagna, e con tale spiegazione evidentissima, perchè appoggiata da tutti i fatti positivi che quelle rocce hanno fornito recentemente ([2]), spariscono tutte le eccezioni stratigrafiche e paleontologiche, tutte le strane conseguenze alle quali il sig. Montagna venne

([1]) Vedi C. Montagna, *Giacitura e condizioni del terreno carbonifero di Agnana e dintorni* 1857. — *Generazione della terra* ecc.

([2]) Vedi: G. Seguenza, *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio* (Calabria). — Piano tongriano. 1880.

da esse indotto, tuttociò che minacciava, a parer suo, la rovina del sistema stratigrafico e paleontologico universalmente adottato, fondato dopo tanti e sì perseveranti studî, e confirmato da tutte le posteriori ricerche, e dagli accuratissimi studî odierni.

La distinzione delle argille scagliose di variate epoche dimostrata ad evidenza, parmi che abbia ancora altro utile risultamento, quello cioè di mettere in accordo le varie opinioni emesse a riguardo dell'età geologica delle argille scagliose italiane.

Così l'epoca cretacea di talune argille scagliose dell'Italia media intraveduta e preconizzata forse le tante volte, ed ormai chiaramente riconosciuta dal prof. Capellini [1], trova già un'eco sonora nell'Italia meridionale, dove per la profusione dei fossili cretacei ognuno può convincersi a suo bell'agio.

La scoperta di argille scagliose di epoca miocenica, pubblicata recentemente dal prof. Bianconi di cui sene deplora la perdita [2], è anch'esso un fatto che trova esatto riscontro nelle provincie siciliane e calabresi, dove le argille scagliose del Tongriano, sovente di colore rosso, somigliano grandemente alle argille scagliose rosse mioceniche descritte dal suddetto professore, e probabilmente sono a quelle coetanee.

Non credo però che vengano confirmate nel mezzogiorno d'Italia le idee tutte dal prof. Mantovani emesse recentemente in un suo lavoro sulle argille scagliose [3]. E tralasciando, perchè altri dica con profitto, della origine del materiale di cui risultano le argille scagliose, farò rimarcare che tali rocce sono sedimentarie per eccellenza nell'Italia meridionale, dove se in molti casi non riesce possibile vederle stratificate, in molti altri non solo la loro regolare stratificazione è evidente, ma benanco si finisce per convincersi in quest'ultimi, che il rammollimento, lo scivolamento, gli sconvolgimenti tutti posteriori alla sedimentazione, sono quelli che distrussero ovvero mascherarono la stratificazione della roccia là dove non si manifesta; ed inoltre ci apprendono che quegl' innumerevoli frammenti, di calcari, di marne, di siderosio, di limonite, di rocce a nummuliti, e schistose e cristalline e compatte e di variati colori non sono che frantumi di straterelli interposti alle argille, che in taluni luoghi mostransi intatti e quindi nella posizione originaria alternanti colle argille stesse. Non voglio con ciò presumere che sia lo stesso delle argille scagliose dell'Italia media, le molte descrizioni che si sono fatte d'ordinario negano ogni stratificazione a quelle rocce, ma non mancano scrittori che discorrendo di esse parlarono di strati e di stratificazione [4].

Quanto poi all'età si conosce bene oggigiorno come essa varia, e l'Italia meridionale lo dimostra ad evidenza siccome già abbiamo veduto, e tra le argille scagliose delle diverse epoche, sono davvero rimarchevolissime le cenomaniane ridondanti d'una ricca fauna cretacea, la quale in gran parte trovasi proprio nelle argille, e parte negli strati calcarei e marnosi interposti.

(1) Vedi T. Fuchs, *Relazione di un viaggio geologico in Italia* (Bollettino del r. Comitato geologico 1875).

(2) *Intorno alle argille scagliose di origine miocenica.*

(3) *Delle argille scagliose e di alcuni ammoniti dell'Appennino dell'Emilia* (Atti della Società italiana di scienze naturali vol. XVIII fasc. 1).

(4) Vedi: Emilio Stohr, *Alcune osservazioni intorno alla Storia naturale delle argille scagliose.* Lettera al prof. G. Canestrini.

Ma sento il bisogno di prevenire un'obiezione. Le argille scagliose di diverse età che trovansi in questa regione meridionale d'Italia sono esse e tutte delle vere argille scagliose? Con tutta asseveranza sì; esse ne presentano la composizione, la struttura e tutti i caratteri, e a dippiù esse offrono quella serie di minerali accidentali che presentano nell'Italia media, così i calcari e le marne a fucoidi o no, di diversa struttura e colorito, le arenarie, il calcare spatico, l'arragonite, la selenite, il siderosio, arnioni di pirite, di baritina, di calcite, di limonite, di piromaco; concrezioni varie di acerdisio, limonite, siderosio ecc. ecc.

Bisogna pur convenire che le argille scagliose sono somigliantissime in tutta Italia, e chi li osservò nelle diverse regioni è ben convinto di un tal vero ([1]).

Fa d'uopo conchiudere da ultimo che le argille scagliose non sono che una speciale natura di roccia, la quale a somiglianza del calcare, delle arenarie, delle marne e di tutte le altre rocce sedimentarie, non rappresenta un periodo geologico speciale, ma che invece nell'Italia meridionale riesce ben dimostrato, che ci sono argille scagliose cretacee, bartoniane, liguriane, tongriane, e langhiane.

§ 7. *Rapporti paleontologici del Cenomaniano d'Italia con quello d'altri luoghi d'Europa, d'Africa e d'Asia.*

« Dalla somiglianza predetta si dee conchiudere che tale terreno in Italia ed « in Africa si depositava in mari in cui si riunivano le medesime condizioni fisico- « chimiche, che perciò davano origine a depositi somigliantissimi, mentre alimen- « tavano i medesimi organismi. Ora tanta e sì compiuta somiglianza nelle con- « dizioni fisiche e biologiche non potea meglio avverarsi se non per la continuità « del mare in cui quelle rocce si costituivano. Quindi a mio giudizio nell'epoca « del cretaceo medio un mare si estendeva dall'Italia all'Africa ».

Così io conchiudeva in una mia Nota intorno al Cenomaniano di Sicilia e di Calabria pubblicata al 1867 ([2]) alloraquando appena i fossili raccolti ascendevano al tenue numero di circa quaranta specie, eppure la conchiusione non poteva essere più veritiera e più esatta, quantunque allora non si conoscevano che metà delle località cretacee attualmente note, quelle che offrono i lembi più ristretti di tale formazione, e dei fossili meno di un quinto delle specie scoperte sin oggi.

Così i caratteri paleontologici ci mostravano allora siccome oggi ci confermano esattamente, i più grandi rapporti di somiglianza tra i varî lembi del nostro cretaceo ed il terreno coetaneo che si estende nella provincia di Costantina in Africa.

Siffatto nostro terreno ha delle specie comuni con terreni sincronici di numerosi ed anco ben lontani luoghi, come vedremo, ma i suoi maggiori rapporti di somiglianza restano immutati ed immutabili colle rocce coetanee dell'Africa settentrionale, che d'altronde geograficamente è la regione alla nostra più vicina.

([1]) Il sig. T. Fuchs chiamò recentemente *vere argille scagliose* quelle dell'Italia meridionale. (Vedi: *Sulla relazione di un viaggio geologico in Italia*. Bull. del r. Comitato geologico d' Italia. Vol. VI. n. 1 e 2, 1875). Il prof. P. Mantovani, che tanto bene conosce le argille scagliose dell'Italia media, riconobbe recentemente come tali quelle della provincia di Reggio.

([2]) G. Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia meridionale*. Lettera alla Società italiana di sc. nat. (Vol. X, fasc. II degli Atti della Società suddetta).

Sarebbe vano e direi quasi inutile affatto andare rintracciando le somiglianze petrografiche che il Cenomaniano dei varî luoghi offre alloraquando viene comparato al nostro, essendochè i caratteri litologici d'ordinario variati in contrade lontane sono una pessima guida nella ricognizione dei terreni. Ma non è possibile di trasandare taluni fatti di somiglianza completissima che sono talvolta di valevole aiuto per chi ne ha acquistato la pratica necessaria. Difatti siccome precedentemente ho esposto tutti i lembi del nostro cretaceo si legano insieme litologicamente per una somiglianza la più perfetta tra tutti i caratteri che distinguono le rocce che lo costituiscono, e quel che più sorprende si è che tale completa somiglianza, si estende ancora alle rocce del cretaceo medio dell'Algeria, dimodochè comparando tra loro gli Ostreidi, che sono i fossili più comuni, nonchè gli altri molluschi e gli echinidi, riesce affatto impossibile di distinguere quelli che provengono dalle diverse località, siccome non si può in verun caso riconoscere quali sieno gli esemplari africani e quali gl'italiani, tanta e così completa è la somiglianza loro nel colorito della conchiglia e nei caratteri tutti della roccia che vi aderisce.

Se ci facciamo poi a comparare la fauna del cretaceo medio d'Italia colle faune coetanee delle varie regioni del globo, noi troveremo dapertutto in Europa ed in Africa dei terreni che racchiudono delle specie comuni col nostro, ma in proporzioni variissime, come riesce agevole prevedere, tenendo conto dei numerosi dati che concorrono nel vario grado di somiglianza tra le faune, ed a norma principale delle distanze che si frappongono.

I risultamenti di un tale confronto s'intende bene che devono essere in intimo rapporto col grado di progresso che hanno fatto le ricerche paleontologiche nei varî paesi, ma è ben sicuro ancora che il cretaceo della maggior parte dei paesi europei è stato assai bene esplorato, e se taluni di essi ci offrono un numero considerevole di specie comuni al cretaceo italiano ed altri un piccol numero, come la Germania ed il Belgio, possiamo essere sicuri che tali sono i rapporti tra la fauna del nostro cretaceo e quella di paesi sì bene esplorati.

Il seguente riassunto, tratto dai quadri sinottici che sono alla fine dell'opera, indica il numero di specie che sono comuni tra i varî paesi nominati ed il cretaceo medio dell'Italia meridionale, nel quale ho raccolto, in tutte le località insieme, 223 specie, di cui circa una metà non ancora descritte.

Algeria	Specie	89	Belgio	Specie	5
Francia	»	50	Sinai	»	5
Inghilterra . . .	»	27	Portogallo . . .	»	2
Svizzera	»	18	Tripoli	»	2
Germania . . .	»	18	Libano	»	2
Palestina	»	8	Tunisi	»	1
Deserto arabico [1]	»	7	Egitto	»	1
Spagna	»	6			

[1] Il chiarissimo prof. Zittel da un suo viaggio in Asia e nell'Africa settentrionale ha riportato tra le grandi ricchezze paleontologiche abbondantissimi fossili del Cenomaniano che vastamente estendesi nel deserto arabico racchiudendo una fauna al tutto identica a quella dell'Italia meridionale,

Da questi risultamenti vedesi a prima giunta quanto è grande la somiglianza del nostro cretaceo con quello che si estende in Algeria ed in modo speciale nella provincia di Costantina, lo che è in perfetto accordo con ciò che ho detto precedentemente intorno alla completissima somiglianza dei fossili e delle rocce che l'includono.

La Francia tra tutti gli altri paesi è quella che ci offre ancora un numero di specie comuni col nostro cretaceo abbastanza considerevole, ma che oltrepassa di poco la metà di quelle comuni coll'Algeria; questa cene porge 89 specie, lo che importa circa due quinti del totale delle specie italiane, e quella invece 50 soltanto, che raggiunge la proporzione di oltre un quinto.

Tra i varî caratteri comuni ai diversi lembi del cretaceo medio italiano ed a quello d'Algeria uno vene ha che imprime alla fauna una speciale fisonomia, quello cioè di contenere numerose specie di Ostreidi, le quali sono sempre sparse con tale una profusione, che a prima giunta si giudicherebbe la fauna di quel cretaceo essere costituita esclusivamente di specie appartenenti a tale famiglia, essendochè ogni lembo si offre coperto e ricchissimo di tali conchiglie.

Un altro fatto che richiama l'attenzione sulle Ostriche si è, che le poche specie di fossili che il nostro Cenomaniano ha di comune colla Spagna, colla Palestina, col Sinai, col Monte Libano, coll'Egitto, con Tunisi, Tripoli ecc. sono tutte delle Ostriche, quelle Ostriche caratteristiche e comunissime in Algeria ed in Italia, che fanno riconoscere dovunque ed a prima giunta la formazione cui appartengono. Questo carattere sì rilevante lega evidentemente tra loro, per la grande somiglianza, tutti i lembi del Cenomaniano, che trovansi sparsi nei paesi circummediterranei, annunciando in modo assai chiaro che quel mare che indubbiamente si estendeva tra l'Italia e l'Algeria al tempo del cretaceo medio, dilatava benanco e con certezza i suoi confini dalla Spagna alla Palestina, conservando dapertutto pei viventi le medesime condizioni d'esistenza ed alimentando le medesime specie di organismi.

della Palestina e dell'Algeria, siccome egli stesso avea la gentilezza d'informarmi con lettera del 2 maggio 1881, e più tardi ha voluto comunicarmi alcuni tipi riportati da quella regione, che io trovai quasi tutti di specie identiche a quelle del Cenomaniano d'Italia, e volli ricordarli nell'elenco finale. Sono perciò queste sole specie che qui figurano, mentre è da credere da quanto scriveami il chiar. professore di Monaco che le specie comuni all'Italia ed all'Arabia sieno molto più numerose. Il rapporto tra la nostra fauna cenomaniana e quella arabica verrà dimostrato nella grande opera per la quale lavora il prof. Zittel, e di cui verrà presto pubblicata la prima parte.

PARTE SECONDA

PALEONTOLOGIA DEL CRETACEO MEDIO DELLE PROVINCIE MERIDIONALI D'ITALIA.

CAPO PRIMO

Caratteri della fauna.

§ 1. *Stato dei fossili.*

Pria di cominciare a discorrere della nostra fauna cretacea, pria di entrare nel penoso lavoro descrittivo, credo utile dare un cenno sullo stato in cui trovansi i fossili nel Cenomaniano dell'Italia meridionale, essendo questo il dato più importante per la ricognizione specifica.

Già di tale stato di giacimento e conservazione dei fossili, ne ho dato precedentemente qualche cenno, e fra le altre cose diceva come riesce affatto impossibile di staccare i varî fossili dalla roccia calcarea per mezzo del martello, lo che avviene sopratutto per gli Ostreidi, i quali sono i più comunemente e con maggior copia sparsi, siccome per tutti i generi a quelli affini. Tali fossili invece trovansi in perfetto stato sparsi sul suolo, staccandosi pel decadimento e la disgregazione delle roccie argillose, calcaree e marnose, e venendo quindi per azione degli agenti meteorici ripuliti compiutamente.

L'altro stato in cui si trova il maggior numero delle specie fossili è quello d'impronte e di modelli interni, i quali talvolta conservano pure un po' della scultura, che presentavasi all'esterno dei gusci, i quali sono completamente o in parte scomparsi; le esteriori impronte, che sono le più atte a ritrarci i caratteri di esteriore ornamentazione della conchiglia sono degli' interni modelli più rare.

In tale stato sono ridotte le conchiglie del maggior numero dei molluschi, trai quali i Lamellibranchi per la maggior parte, e si capisce bene come la difficoltà di determinazione divenga ben grande, sopratutto nelle bivalvi, nelle quali se si perviene a riconoscere le impressioni palleali e muscolari, non d'ordinario si può giungere a scoprire i caratteri tanto importanti del cardine e dell'esteriore ornamentazione.

Il grado di frequenza di ciascuna specie è anch' esso un fatto che influisce molto sulla esattezza della determinazione, sopratutto allorchè lo stato di conservazione dei fossili lascia molto a desiderare, siccome accade per buon numero delle forme che ci presenta il nostro cretaceo.

Premessi questi pochi fatti generali sullo stato dei fossili cretacei, dirò brevemente sulla conservazione e la frequenza dei resti di ciascuna classe.

Dei Vertebrati appena ho rinvenuto qualche residuo spettante ai Pesci selacei.

Gli Articolati sono anch'essi rarissimi, e rappresentati da qualche tubo di Anellide mal conservato, e di pochi Ostracodi in buono stato.

La fauna del nostro cretaceo risulta quasi completamente di Molluschi, essendo

proporzionatamente piccolo il numero delle specie spettanti agli altri tipi, ma varia a norma delle classi il grado di conservazione dei fossili, nonchè la frequenza delle specie e degl' individui. I Cefalopodi si presentano con grande parsimonia, sia pel limitato numero di specie, e più ancora per la rarità degl' individui, che giunge a tale da non offrirsi una specie, se non per vera eccezione, più di due o tre volte, e sempre mutilata, anzi allo stato di veri frammenti. Tali fossili sempre sotto forma di interni modelli lasciano molto a desiderare per la loro conservazione e talvolta sono affatto irriconoscibili.

I Gasteropodi sieguono pressochè le norme dei Cefalopodi e quindi rari individui si presentano sotto la forma di modelli in cattivo stato, e quasi sempre incompleti.

I Lamellibranchi invece sono i Molluschi, anzi i fossili comunissimi che si offrono dapertutto profusamente, e quasi tutte le specie di questa classe sono abbondanti. Lo stato di conservazione intanto varia grandemente. I generi *Lima*, *Pecten*, *Plicatula*, *Gervillia*, *Vulsella*, *Ostrea*, *Exogyra*, *Gryphaea*, *Alectryonia*, *Anomia* trovansi quasi sempre in perfetto stato di conservazione, la conchiglia ben resistente ed intiera, sovente con ambe le valve riunite, ha soltanto acquistato un colorito più o meno bruno, che tende al nero ovvero al grigio assai scuro. Gli altri generi di Lamellibranchi sono ridotti in forma di modelli quasi sempre in buono stato, che sovente trovansi abbondantemente alla superficie del suolo. Pure non mancano degli esempî di *Trigonia*, di *Arca*, di *Modiola*, di *Pinna*, di *Avicula* e di altri generi in cui eccezionalmente la conchiglia si è conservata. Così in S. Giorgio presso Brancaleone vedesi una roccia calcarea sovrastante agli altri strati cretacei, risultante dall'accumulo di tante spoglie di Molluschi, trai quali la *Cypricardia calabra* (Seg.) in numerosi individui ben conservati e colla conchiglia spatizzata, i quali si associano ad una *Astarte*, ad una *Lima*, ad una *Plicatula* a varî *Ostreidi*, tutti colla conchiglia in ottimo stato.

Le classi dei Pteropodi e dei Brachiopodi non mi hanno offerto sinora neanco un frammento dubbio qualunque, se si eccettua una *Orbicula*.

Meritano rimarchevole considerazione tra gli Echinodermi gli Echinidi, i quali quantunque sieno sparsi poco comunemente pure conservano il guscio in perfetto stato.

I Briozoi, i Corallarî, gli Spongiarî, mi hanno offerto appena qualche rappresentante di mediocre conservazione.

Qualche importante forma mi fu dato di studiare trai pochi Rizopodi osservati, che si offrono sempre col guscio intiero e ben conservato.

§ 2. *Natura della fauna.*

Nel precedente paragrafo avendo riunito i dati riguardanti la frequenza o la rarità dei diversi gruppi si hanno già i più importanti documenti sulla costituzione della fauna cenomaniana, quindi riassumerò tali dati per trarne qualche importante conclusione.

E primieramente io farò rimarcare che quella completa somiglianza che abbiamo dimostrato trai varî lembi del nostro Cenomaniano, costituito e conformato dappertutto al medesimo modo viene completata perfettamente dalla fauna dovunque identicissima. Difatti in tutti i lembi del cretaceo siciliano e calabrese predominano sempre

i medesimi gruppi, sono i medesimi generi che vi s'incontrano, anzi quelle specie che costituiscono la fauna delle località meno ricche trovansi comunemente in tutte le altre; le più ricche ancora hanno di comune la maggior parte delle specie, e negli stessi rapporti trovansi il Cenomaniano d'Italia con quello della provincia di Costantina. Tutte queste relazioni possono ben rimarcarsi esaminando l'elenco sinottico finale delle specie.

Come già vedemmo la classe dei Lamellibranchi è quella che costituisce la parte principalissima di questa fauna, e nelle località poco ricche è la sola che vi si incontra o quasi la sola. I generi più comuni che la rappresentano sono i seguenti, essi inoltre sono per la maggior parte i più numerosi di specie: *Venus, Crassatella, Cyprina, Cardita, Cardium, Isocardia, Arca, Pecten, Plicatula, Ostrea, Exogyra, Gryphaea, Alectryonia.*

Quantunque i Cefalopodi sieno molto rari, pure questa è la classe che viene in seguito pel numero delle specie, le quali spettano ai generi: *Belemnites, Nautilus, Acanthoceras, Schloebachia, Turrilites.*

Vengono quindi i Gasteropodi anch'essi molto rari rappresentati dai generi: *Voluta, Strombus, Pterocera, Nerinea, Tylostoma, Dentalium.*

Gli Echinidi offrono i generi: *Magnosia, Holectypus, Epiaster, Hemiaster.*

Gli Ostracodi i generi *Cythere*, *Cytheropteron*, *Cytherella.*

I generi *Corax,* e *Odontaspis* rappresentano la classe dei Pesci, la sola che tra i Vertebrati si faccia vedere.

Il genere *Serpula* gli Anellidi.

I Rudisti hanno qualche *Sphaerulites.*

I Briozoi delle *Membranipora* e *Lepralia.*

Gli Spongiarî qualche *Cliona.*

I Rizopodi sono rappresentati dalle *Placopsilina, Globigerina, Planorbulina?, Discorbina*, e da alcune forme arenacee.

Dalla composizione della fauna, testè descritta nelle sue generalità, si capisce a prima giunta che trattasi d'una fauna eminentemente littorale, la grande abbondanza dei Lamellibranchi, i Gasteropodi e gli Echinidi lo attestano ad evidenza, i Cefalopodi, animali pelagici, che dopo la loro morte si accumulano sulle spiagge, confermano tale risultamento, siccome il difetto di Brachiopodi e l'assenza quasi completa dei Briozoi.

Nella provincia di Palermo alle specie ordinarie si associano taluni coralli monastrei e la roccia mostra sovente molte Globigerine. Questi fatti annunciano evidentemente che ivi il mare offriva maggiore profondità.

La conclusione generale si accorda perfettamente coi risultamenti ottenuti dagli studî stratigrafici; difatti abbiamo veduto precedentemente come nel Messinese e nel Reggiano i varî lembi del terreno cretaceo si allineano alle falde dei ripidi monti cristallini, e nella regione delle Madonie cingano la base delle grandi muraglie del calcare titonico, quindi il Cenomaniano tutto, scoperto nell'Italia meridionale, segna i confini, le spiagge del cretaceo medio. In quel periodo mesozoico dunque nell'Italia meridionale ergevansi scoscesi e inaccessibili monti cristallini e giurassici e ai loro piedi urtava il fiotto di un mare più o meno basso che vastamente stendevasi sino in Africa, in Portogallo, in Palestina.

CAPO SECONDO

Descrizione della fauna.

Primo tipo. VERTEBRATI.

Classe. PESCI. — Ordine. CONDROTTERIGII SELACIANI. — Sotto-ordine. PLAGIOSTOMI.
Gruppo. SQUALIDI.

Fam. LAMNIDI.

Genere. ODONTASPIS Agassiz.

1. Odontaspis gracilis Agassiz.

Sinonimi.

1835. Odontaspis gracilis Agassiz, *Poissons foss.* t. III, pag. 295, tav. 37 *a*, fig. 2 a 4.
1848. » » Giebel, partim, *Fauna der Vorwelt*, tome I, 3[me] partie, p. 362.
1854. » » Pictet, *Traité de paléontologie*, tome II, pag. 251.
1858. » » Pictet et Campiche, *Descript. des foss. de Sainte-Croix*, pag. 88, tav. XI, fig. 9-18.

L'unico dente che io rapporto a questa specie sembrami convenire abbastanza, colle figure pubblicate, per la forma gracile della corona, per la grande prominenza dei due tubercoli laterali, e per la forma della radice. Pure tale esemplare presenta qualche carattere, che credo di poco valore, il quale lo farebbe in qualche modo lontanamente avvicinare all'*Odontaspis raphiodon* Ag., come la origine non troppo bassa dei tubercoli laterali, o meglio dentelli. Sulla faccia esterna il nostro dente presenta delle pieghe o forti strie ben marcate alla base, carattere che fu dimostrato variabilissimo nei numerosi esemplari di Sainte-Croix.

Giacimento. — Fu scoperta dall'Agassiz l' *O. gracilis* nel Neocomiano e dai sigg. Pictet e Campiche a Mont Salève ed a Sainte-Croix, dove giace nel Necomiano, nell'Aptiano, e nell'Albiano, essendo più abbondante nel membro superiore di quest'ultimo.

Io la raccoglieva in un calcare marnoso grigio con Ostriche, del villaggio S. Paolo presso Barcellona (Sicilia).

Fam. GALEIDI.

Genere. CORAX Agassiz.

1. Corax falcatus Agassiz.

Sinonimi.

1835. Corax falcatus Agassiz, *Poissons fossiles*, tom. III, pag. 226, tav. XXVI *a*, fig. 1-15 e XXVI, fig. 14. Nelle figure il nome è di *C. pristodontus.*
1840. Galeus pristodontus Geinitz, *Characteristick*, pag. 11, tav. I, fig. 1.
1845. Corax heterodon Reuss, *Boehm. Kreid*, I, pag. 3, fig. 49 e seg. (partim).
1848. » » Giebel, *Fauna der Vorwelt*, I, III, pag. 370.

1850. Corax falcatus Dixon, *Foss. Sussex*, tav. 32, fig. 10.
1854. » heterodon Pictet, *Traité de paléont.*, tomo II, pag. 240.
1858. » falcatus. Pictet et Campiche, *Foss. de Sainte-Croix*, pag. 80, tav. IX, fig. 1 e 2.

L'unico dente che rappresenta questa specie nel nostro cretaceo fu raccolto insieme all'*O. gracilis* Ag., esso quantunque rotto risponde benissimo alle figure pubblicate, e quindi non v'ha dubbio di sorta quanto alla determinazione specifica.

Giacimento. — Questa specie è stata raccolta nel cretaceo superiore d'Inghilterra, nel cretaceo medio di Germania, e nel Gault di Svizzera.

Io lo raccolsi in un calcare marnoso, insieme alla specie precedente in S. Paolo presso Barcellona.

Secondo tipo. MOLLUSCHI.

Classe. Cefalopodi. — Ordine. Dibranchiati. — Sotto-ordine. Decapodi.

Fam. BELEMNITIDI.

Genere. BELEMNITES Lister.

1. **Belemnites semicanaliculatus?** Blainville.

Sinonimi.

1827. Belemnites semicanaliculatus Blainville, *Mémoires sur les belem.* pag. 67, t. I, fig. 13.
1830. » » Deshayes, *Encyl. meth.* p. 126, n. 6.
1840. » » A D'Orbigny, *Paléont. française. Terr. crétacées,* t. I, pag. 58, tav. V, fig. 10-15.
1841. » » Duval-Jouve, *Belemnites des terr. crétac. des Basses-Alpes,* p. 74, tav. VI, fig. 5-12.
1851. » » D'Orbigny, *Paléont. univ.* tav. LXXVI. fig. 10-15 e tav. LXXIV, fig. 7-9.
1854. » » Pictet et Renevier, *Foss. du terr. Aptien,* pag. 19, tav. III, fig. 1.
1858. » » Pictet et Campiche, *Terr. crét. de Sainte-Croix,* pag. 101.
1862. » » H. Coquand, *Descript. géol. et pal. de la rég. sud de la province de Constantine,* pag. 283.
1866. » » Coquand, *Monograph. paléont. de l'étage aptien. de l'Espagne,* p. 42.

Riferisco con molto dubbio a questa specie un'estremità inferiore di una belennite, che riproduce esattamente la forma di tale specie, ma che è pure un semplice frammento. E quantunque il D'Orbigny abbia rapportato al Cenomaniano questa specie, pure si è riconosciuto posteriormente che dappertutto in Francia, in Svizzera, in Spagna, in Algeria essa giace nel piano Aptiano. Tanto più quindi io sono dubbioso della mia determinazione, che d'altronde è soltanto provvisoria perchè fatta su di un frammento.

Giacimento. — Specie propria dell'Aptiano in Europa. Il Coquand la raccolse nello stesso piano in Algeria. In Italia a S. Giorgio presso Brancaleone l'unico frammento dubbio.

2. **Belemnites ultimus?** D'Orbigny.

Sinonimi

1778. Belemnites minimus (parte)? Lister, *Hist. Anim. Angliae,* tav. VII, fig. 32.
1834. » Listeri Phillips, *Geology of Yorkshire.* Vol. I, tav. I, fig. 18.?

1846. Belemnites ultimus D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* Suppl. tav. 10, pag. 24.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome de pal. univ.* tom. II, pag. 145 n. 2.
1853. » » Sharpe, *Descript. of foss. remains of moll. in the Chalk.* pag. 3, tav. I, fig. 17.
1862. » » Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 287.
1880. » » Coquand, *Études supplément, sur la paléontol. algérienne.* pag. 408.

L'unico frammento che io riferisco con molta incertezza a questa specie è ben piccolo, e somiglia alla specie cenomaniana del D'Orbigny per la forma quasi esattamente cilindrica, e pel diametro uguale alle figure che vi si rapportano.

Giacimento. — Questa specie trovasi in Francia ed in Inghilterra nel piano cenomaniano.

Il Coquand la raccolse a Tenoukla, Batna e Muzaïa-les-Mines in Algeria nel piano rotomagiano.

Il mio esemplare fu trovato a S. Giorgio presso Brancaleone.

Ordine. TETRABRANCHIATI.

Fam. NAUTILIDI.

Genere **NAUTILUS** Linneo.

1. **Nautilus triangularis** Montfort.

Sinonimi.

1802. Nautile triangulaire Montfort, Buff. de Sonnini, *Moll.* tom. IV, pag. 202, tav. XLIX, fig. 2.
1808. Nautilus triangularis Montfort, *Conch. syst.* pag. 7 (G. Angulithes):
1820. Nautilites angulites Schlotheim, *Die Petrefac.* pag. 84.
1832. Nautilus triangularis Passy, *Descr. géol. de la Seine inf.* pag. 334.
1834. » » D'Archiac, *Mém. de la Société géol.* tom. II, part. 2ª, pag. 191.
1840. » » D'Orbigny, *Pal. franç.* tom. I, tav. XII.
1840. » Fleuriausianus D'Orbigny, *Paléont. franç.* tom. I, pag. 82, tav. XV.
1848. » triangularis Bronn, *Index palaeont. Nomenclator*, pag. 797.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome de pal.* pag. 145, n. 3.
1854. » » Pictet, *Traité de paléont.* tom. II, pag. 628.
1862. » » H. Coquand, *Géologie et paléont. de la prov. de Constantine*, pag. 294.
1880. » » Coquand, *Études supplément.* pag. 413.
1880. » » Seguenza, *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio*, pag. 14.

Di questa bella specie s'incontrano grandi e caratteristici esemplari, i quali quantunque incompleti sono assai facilmente riconoscibili. I cinque grossi frammenti da me posseduti non lasciano dubbio di sorta quanto alla esattezza di determinazione, essendochè la fossilizzazione non li ha deformati, ed inoltre presentano una superficie ben conservata, in cui le linee dei sepimenti sono benissimo tracciate, e regolare la forma della sezione.

Questa specie ben distinta per la superficie levigata, senza ornamenti di sorta, sulla quale sono leggermente segnate le linee dei tramezzi, e per la carena angolosa, offre delle variazioni. Così negli esemplari che possiedo taluni sono più compressi ed altri hanno la carena che è più ottusa e tende ad arrotondarsi avvicinandosi alla forma che il D'Orbigny rappresentò sotto nome di *N. Fleuriausianus.*

Giacimento. — Giace nel Cenomaniano di Havre, Rouen, Ile d'Aix, Fourras, Coulonges, La Malle, La Martre (Francia).

Il Coquand lo raccoglieva a Tenoukla e Batna in Africa nel piano carentoniano. In Italia l'ho raccolto soltanto a S. Giorgio presso Brancaleone (provincia di Reggio).

2. Nautilus sublaevigatus D'Orbigny.

Sinonimi.

1840. Nautilus laevigatus D'Orbigny, *Pal. franç.* pag. 84, tav. XVII (non Montagu 1803).
1848. » » Bronn, *Index palaeont. Nomenclator*, pag. 794.
1850. » sublaevigatus D'Orbigny, *Prodrome de pal.* pag. 189.
1853. » laevigatus D. Sharpe, *Mollusca in the Chalk of England*, pag. 11, tav. II, fig. 1 e 2.
1854. » » Pictet, *Traité de paléont.* tom. II, pag. 628.
1876. » sublaevigatus G. Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2. (Rendiconto della r. Accad. delle scienze fisico-mat. di Napoli fasc. 1).
1876. » » e laevigatus Ciofalo, *Cenn. foss. Caltav.* pag. 2.
1877. » » » Ciofalo, *Nuove sp. foss. cret.* pag. 3.

Rapporto non senza dubbio a questa specie del D'Orbigny un frammento d'un giovane esemplare, l'unico esemplare che ho avuto per le mani e che mi fu comunicato dall'amico prof. Saverio Ciofalo da Termini-Imerese, esso per la convessità della conchiglia, la sua proporzionale larghezza, e la forma delle linee dei sepimenti ricorda bene tale specie.

Giacimento. — Trovasi nel piano turoniano del D'Orbigny a Rochefort (Charente infer.), Matrichard, Uchaux (Vaucluse); nel cretaceo medio e superiore d'Inghilterra a Brighton, Mailstone, Hunel, Henistead, Tring, Dower, Lewes, Boucherch (nell'isola di Wight) Chardstock, e sulle coste del Dorsetshire.

L'unico frammento che vi rapporto dall'Italia viene dalla regione delle Madonie contrada tra Caltavuturo e Polizzi.

3. Nautilus Bracaleonensis n. sp.

Tav. V, fig. 1.

Diagnosi. — *Testa discoidea, compressa, transversim undulato-sulcata, late umbilicata, apertura compressa, septis simplicibus haud undulatis.*

Diametro 204.mm
Spessore massimo calcolato approssimativamente 70.mm

Grande specie di forma molto compressa e fornita d'un ombellico profondo e molto largo, e colla superficie ornata di grosse costole e prominenti, le quali sono distinte pei larghi e profondi solchi che le separano; esse s'incurvano verso la regione dorsale conformandosi in arco sul dorso, e sono pressochè rette ai lati e divengono meno distinte verso la regione ombelicale, e si conservano ben marcate ancora sul modello. I tramezzi si presentano quasi senza alcuna incurvatura, e quindi ai fianchi della conchiglia si offrono sotto forma di linee pressochè rette. La posizione del sifone resta ancora indeterminata.

Questo Nautilo, che possiedo in unico e grande esemplare, alquanto compresso e deformato dalla fossilizzazione, ha le sue più grandi affinità col *N. neocomiensis* D'Orbigny, dal quale differisce perchè probabilmente più depresso, pei solchi più larghi, i quali non formano insieme alle costole colle quali alternano, sulla regione dorsale un vero angolo ottuso, ma invece s'incurvano regolarmente in arco, inoltre

i tramezzi sono appianati e sui fianchi si presentano perciò in forma di linee pressochè rette. La specie in esame non può rapportarsi al *N. radiatus* Sowerby, che spetta al medesimo piano geologico, sia per la diversa conformazione delle costole, come per le linee dei tramezzi non flessuose.

Quantunque abbia sezionato in varî punti il mio unico esemplare, non mi è riuscito di vedere chiaramente la posizione del sifone, il quale per un dubbio indizio che mi sembrò di riconoscere, sarebbe forse circa ai due quinti interni.

Giacimento. — Raccolto alla contrada S. Giorgio presso Brancaleone.

4. Nautilus calabrus n. sp.

Tav. V, fig. 2, 2 *a*.

Diagnosi. — *Testa discoidea-inflata, transversim rare plicato-costata, subumbilicata; apertura semilunari; septis arcuatis, in umbilico sinuosis; dorso obsolete tricarinato.*

Diametro 55.mm
Spessore 43.mm

Conchiglia discoidale, molto rigonfia e convessa, col dorso largo, rotondato, e segnato da tre angolosità molto ottuse, a guisa di tre carene rotondate, poco distinte, tra le quali la mediana alquanto meglio accennata; la superfice della conchiglia è ornata da pieghe trasversali in forma di rare costole, che partendo dalla regione ombelicale in forma ondulata vanno a formare sul dorso un largo seno arcuato; ombelico marcato da una depressione poco profonda. Bocca semilunare, molto larga e poco alta. Tramezzi radi, arcuati in dietro, sinuosi presso la regione ombelicale.

Questa specie, tra quelle note della formazione cretacea, non ne ha alcuna veramente affine, le tre ottuse carene e le rade costole la distinguono assai bene, pure per la conformazione generale e per l'andamento dei tramezzi puossi avvicinare al *N. albensis* D'Orbigny.

Giacimento. — Un solo esemplare a S. Giorgio presso Brancaleone.

Fam. AMMONITIDI.

Genere. ACANTHOCERAS Neumayer.

1. Acanthoceras Mantelli Sow.

Sinonimi.

1814. Ammonites Mantelli Sowerby, *Min. Conch.* tom. LV.
1822. » » Mantell, *Géolog. of Sussex*, pag. 113, tav. XXI, fig. 9 e tav. XXII, fig. 1.
1841. » » D'Orbigny, *Paléont. française. Terr. crét.* tom. I, pag. 340, tav. CIV (escl. tav. 103).
1845. » » Reuss, *Boehm. Kreidof*, pag. 22.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome de pal.* tom II, pag. 146.
1850. » Couloni D'orbigny, *Prodrome de pal.* pag. 147.
1854. » Mantelli Sharpe, *Palaeont. Soc. Moll. of the Chalck.* pag. 40, tav. XVIII, fig. 4, 6, 7.
1854. » » Pictet, *Traité de pal.* tom. II, pag. 679.
1859. » » *Matériaux pour la pal. suisse. Foss. de Sainte-Croix*, n. 6, pag. 200, tav. XXVI.

1862. Ammonites Mantelli Coquand, *Géolog. et pal. de la Prov. de Constantine*, pag. 287.
1863. » » Pictet, *Mélanges pal. Sur les variat. et les limites* ecc. pag. 22.
1876. » » Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 3.
1876. » » Ciofalo, *Note sui foss. del cret. medio di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Ciofalo, *Su di talune nuove sp. foss. del cret.* pag. 3.
1880. » » Coquand, *Études supplément.* pag. 408.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Gli esemplari incompleti e i frammenti che io rapporto a questa specie sono numerosi, ma d'ordinario in cattivo stato di conservazione.

Come ben si conosce dagli studî accuratissimi del Pictet, intorno a questa specie ed alle affini del medesimo piano ([1]), l' *A. Mantelli* è molto variabile e presenta inoltre considerevoli variazioni nei diversi periodi del suo accrescimento. Nello stato giovanile il dorso della conchigla è ornato da quattro serie di tubercoli disposti sulle costole, i quali scompariscono del tutto nello stato adulto e le costole più o meno grosse divengono flessuose.

Il Pictet raggruppa in due varietà le diverse forme presentatesi.

Io riferisco alla forma tipica sette grossi frammenti di cui sei rappresentano oltre un quarto di avvolgimento ciascuno dello stato adulto della specie, il quinto invece rappresenta oltre la metà dell'ultimo avvolgimento dello stato adulto stesso; ma in questo esemplare in buono stato le costole sono molto flessuose e larghe, e si appianano alquanto sulla regione dorsale, questi caratteri ravvicinano tale forma all'*A. navicularis*, alla quale non credo che si possa rapportare, siccome pensa il Pictet per le forme somiglianti raccolte in Isvizzera.

Fra gli altri possiedo un esemplare quasi intiero in istato di mediocre conservazione, nel quale sulla prima metà dell'ultimo avvolgimento si osservano le quattro serie di tubercoli che scompariscono intieramente nel resto, dove le costole sono più prominenti e meno flessuose siccome più strette proporzionalmente di quanto si offrono negli esemplari precedenti, che sono più grandi.

Varî altri frammenti più piccoli e proporzionalmente più compressi presentano alquanto più strette le costole, e nei frammenti minori i tubercoli dorsali si manifestano colla solita disposizione. Sono questi esemplari che devonsi rapportare alla seconda varietà del Pictet che è l'*A. Couloni* D'Orbigny.

Giacimento. — L'*A. Mantelli* caratterizza assai bene il piano cenomaniano, ma pure è stata rinvenuta nella formazione albiana (Gault).

Le località indicate per questa specie sono molto numerose. Essa è comune in Isvizzera, in Germania, in Francia, in Inghilterra. Nella provincia di Costantina (Africa).

Quasi tutti gli esemplari che possiedo del cretaceo italiano, tanto della forma tipica come della varietà sono stati da me raccolti nella contrada S. Giorgio sotto Brancaleone; e due soltanto presso Ferruzzano. Un solo frammento di esemplare adulto lo rinvenni in Sicilia alla contrada Magliardo (Territorio di Barcellona).

Due frammenti della varietà vengono da Scillato presso Caltavuturo e mi furono comunicati dal prof. Saverio Ciofalo da Termini-Imerese.

([1]) Vedi Pictet, *Matériaux pour la pal. Suisse; Mélanges paléontologiques.*

2. Acanthoceras Gentoni (Brongniart).

Sinonimi.

1822. Ammonites Gentoni Al. Brongniart, *Environs de Paris,* in Cuvier, *Oss. foss.* 4e éd. pag. 150, tav. N, fig. 6.
1827. » navicularis I. Sow. *Min. Conch.* pl. 555 (non Mantell.).
1841. » Mantelli D'Orbigny, *Pal. française,* tom. I, tav. CIII.
1845. » » Reuss, *Böhmischen Kreideform.* pag. 21.
1850. » navicularis D'Orbigny, *Prodrome de pal.* tom. II, p. 146.
1854. » » Sharpe, *Paléont. Soc. Moll. of the Chalk. Cephalop.* pag. 39, tav. XVIII.
1863. » Gentoni Pictet, *Mélanges paléontol. Variation de quelques espèces d'ammonites,* pag. 33, tav. VI.
1876. » » Seguenza, *I foss. cen. Calt.* p. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. cret.* pag. 3.

Riferisco a questa specie quattro esemplari incompleti, di cui uno, il maggiore, supera la metà di un avvolgimento ed ha le costole ben conservate, le quali sono rotondate più strette degl' interstizî e mancano affatto di ogni indizio di tubercoli; l'anfratto stesso è regolarmente convesso e rotondato ugualmente d'ambo i lati, senza alcun segno di depressione sulla regione sifonale, come nell'*A. cenomanensis,* nè sui lati come nell'*A. Mantelli,* dimodochè la sezione si avvicina molto alla forma circolare in tutti gli esemplari.

Giacimento. — L' *A. Gentoni* si associa all'*A. Rothomagensis* per caratterizzare il piano cenomaniano, così in Francia ed in Inghilterra.

Gli esemplari che vi riferisco l'ho raccolti nel territorio di Ferruzzano.

3. Acanthoceras Rothomagensis (Defrance).

Sinonimi.

Ammonites rothomagensis Defrance (M. S.). Nella collezione.
1822. » » Brongniart, *Environs de Paris,* pag. 83, tav. IV, fig. 2.
1822. » Sussexiensis Mantell, *Geol. of Sussex,* tav. XXI, fig. 10 (non tav. XX, fig. 2).
1826. » rothomagensis I. Sowerby, *Min. Conch.* tav. DXV.
1841. » » D'Orbigny, *Paléont. française. Terr. crét.* tom. I, tav. CV.
1845. » » Reuss, *Verstein. der Boehm-Kreid.* pag. 22.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome,* tom. II, pag. 146.
1854. » » Sharpe, *Palaeont. society. Moll. of the Chalk,* tav. XVI, fig. 1-4, p. 33.
1859. » » Pictet et Campiche, *Matér. pour la pal. Suisse. Fossiles de Sainte-Croix,* n. 6, pag. 190 e tav. XXV, fig. 1-3.
1862. » » Coquand, *Géolog. et paléont. de la prov. de Constantine,* pag. 287.
1863. » » Pictet, *Mélanges paléont. Discuss. sur les lim. et les var. de quelques amm.* pag. 26.
1867. » » G. Seguenza, *Sul Cretaceo medio dell' Ital. merid.* pag. 6.
1876. » » Seguenza, *I foss. Cenom. di Calt.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.
1880. » » Coquand, *Études supplément.* pag. 408.
1880. » » Seguenza, *Le form. terziar.* pag. 14.

Questa ben nota e distintissima specie è rara tra noi. L'unico esemplare che possiedo è un modello incompleto molto ben conservato e quindi facilmente riconoscibile e di non dubbia determinazione.

Un altro esemplare incompleto conservasi nel gabinetto di Storia naturale dell' Istituto tecnico di Reggio ed è anch' esso ben riconoscibile e di buona conservazione.

Il prof. Coquand ha rinvenuto questa specie in Sicilia, alla regione delle Madonie.

Giacimento. — Questa specie è ben conosciuta siccome caratteristica del Cenomaniano di tutta quanta Europa, difatti essa lo caratterizza in Inghilterra, in Francia, in Isvizzera, in Germania. Il Coquand l'ha raccolto in molti luoghi d'Algeria e nella provincia di Costantina.

Sovente è stata confusa colla seguente specie.

In Italia fu trovata a Scillato tra Caltavuturo e Polizzi; il mio esemplare viene da Bova (provincia di Reggio); l'esemplare dell'Istituto tecnico di Reggio viene da S. Giorgio presso Brancaleone.

4. Acanthoceras Cunningtoni (Sharpe).

Sinonimi.

1854. Ammonites Cunningtoni Sharpe, *Palaeont. soc. Moll. of the Chalk. Cephalop.* pag. 35, tav. XV, fig. 2.
1854. » sussexiensis Sharpe, Op. cit. pag. 34, tav. XV, fig. 1 (non Mantell.).
1859. » cenomanensis Pictet et Campiche, *Matér.* etc. *fossil. de Sainte-Croix*, pag. 193, tav. XXV, fig. 4.
1863. » Cunningtoni Pictet, *Mélanges paléont. Variat. de quelques esp. d'ammonites*, pag. 32, tav. V.
1880. » » H. Coquand, *Études supplémentaires sur la paléontologie Algérienne* ecc. pag. 35 e 408.

Questa bella forma, che si associa alla precedente, è ben conosciuta e distinta dopo gli accurati studî e minuziosi del Pictet. Io vi riferisco con qualche dubbio un piccolo e cattivo esemplare, il quale offre pure i tubercoli considerevolmente prominenti, e la serie della regione dorsale tende, per la confluenza dei tubercoli, a divenire continua, e forma già una carena interrotta qua e là nel piccolo esemplare che possiedo.

In esso inoltre quantunque i tubercoli delle quattro serie laterali sieno più grossi, più distanti e più prominenti di quanto lo sono nell'*A. rothomagensis* pure non lo sono quanto nella fig. 2 del Sharpe, che rappresenta la forma tipica. Perciò il mio esemplare si avvicina meglio a quella varietà che il Sharpe distinse col nome di *Sussexiensis* (fig. 1.)

Giacimento. — La specie in esame giace nel Cenomaniano ed è stata riconosciuta in Inghilterra, in Francia, in Isvizzera.

Il mio unico e piccolo esemplare l'ho raccolto alla portella di Falcò ad owest di Ferruzzano.

Genere. SCHLOEBACHIA Neumayer.

1. Schloebachia varians (Sowerby).

Sinonimi.

1817. Ammonites varians Sowerby, *Min. Conch.* tav. CLXXVI.
1822. » » Brongniart, *Environs de Paris* tav. VI, fig. 5.

1822. Ammonites varians Mantell, *Geol. of Sussex,* pag. 115, tav. XXI, fig. 2, 5, 7.
1840. » » D'Orbigny, *Pal. française. Terr. crét.* tom. I, p. 311, tav. XCII, f. 3-5.
1847. » Tollotianus Pictet, *Descrip. moll. gres vert.* pag. 109, tav. X, fig. 5.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome de pal.* t. II, pag. 125.
1850. » varians D'Orbigny, *Prodr.* t. II, pag. 146.
1854. » » Sharpe, *Palaeont. Soc. Moll. of the Chalk.* pag. 22, tav. VIII, f. 5-10.
1859. » » Pictet et Campiche, *Matér. pour la pal. Suisse. Foss. de Sainte-Croix,* n. 6, p, 182.
1862. » » Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constantine,* pag. 287.
1880. » » Coquand, *Études supplément.* pag. 408.

Il solo esemplare che riferisco a questa specie è un frammento mal conservato e compresso alquanto dalla fossilizzazione, esso ciò non pertanto offre chiari i caratteri della specie, sopratutto per lo sviluppo delle costole e la poca prominenza delle nodosità, nonchè per la biforcazione delle costole assai presso del margine interno degli avvolgimenti.

Il mio frammento accenna ad un individuo molto grande in rapporto agli esemplari figurati dal D'Orbigny e dal Sharpe, ed ancora un po' maggiore del massimo descritto dal Pictet.

Giacimento. — La *S. varians* è propria del Cenomaniano di moltissimi luoghi d'Inghilterra, e di Svizzera, di Francia e d'Algeria, ma sembra ancora trovarsi qualche volta nel Gault.

Il solo esemplare che vi riferisco proviene da S. Giorgio presso Brancaleone.

2. **Schloebachia Coupei** (Brongniart).

Sinonimi.

1817. Ammonites varians Sowerby, *Min. Conch.* tav. CLXXVI (le sole figure superiori).
1822. » Coupei Brongniart, *Environs de Paris* tav. VI, fig. 3.
1840. » varians D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* tom. I, pag. 311, tav. XCII (parte).
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome,* t. II, pag. 146 (parte).
1854. » Coupei Sharpe, *Palaeont. Soc. Moll. of the Chalk.* pag. 23, tav. IX, fig. 1.
1859. » » Pictet et Campiche, *Matériaux pour la pal. Suisse. Foss. de Sainte-Croix,* pag. 185.

Gli esemplari che riferisco a questa specie sono frammenti di grandi individui, che quantunque non conservati troppo bene, parmi che offrano distinti i caratteri della specie, che d'altronde è molto affine alla precedente. I grossi e prominenti tubercoli di cui sono ornate le costole ne la fanno distinguere molto bene.

Un fatto che mi lascia un certo grado d'incertezza proviene da qualche esemplare, il quale offre nella larghezza dell'avvolgimento la dimensione di circa otto centimetri, che è grandissima in rapporto agli esemplari figurati, anco i più grandi, come quello del Sharpe (tav. 9, fig. 1). Pure tali frammenti collegansi benissimo cogli esemplari minori, e quindi parmi indubitato che tale specie abbia raggiunto dimensioni assai grandi.

D'altro canto gli esemplari che io rapporto alla *S. Coupei* si collegano con frammenti ancor più voluminosi, ancor peggio conservati, i quali accennando ad individui del diametro di oltre due decimetri, pure conservano i caratteri tutti della specie. Io non ardisco di associarveli intanto, perchè alla grandezza eccessiva riuniscono un

grado di conservazione poco soddisfacente; per cui bisogna attendere che ulteriori ricerche facessero scoprire migliori e più importanti materiali.

È qui il luogo di ricordare ancora taluni frammenti di ammonitidi che si collegano per la forma generale alla specie in esame, ma non vi si possono associare per certi caratteri distintivi poco marcati, dei quali non può darsi un definitivo giudizio per la scarsezza del materiale che possiedo.

Giacimento. — La *S. Coupei* par che si trovi nell'Albiano come nel Cenomaniano in Francia, in Isvizzera, in Inghilterra ecc.

Gli esemplari varî del nostro cretaceo per la maggior parte sono stati da me raccolti alla contrada S. Giorgio presso Brancaleone, e taluni nel territorio di Ferruzzano; insieme ad essi giacevano i frammenti dubbî ed affini di cui ho parlato.

3. **Schloebachia inflata** (Sowerby).

Sinonimi.

1817. Ammonites inflatus Sowerby, *Min. Conch.* tav. CXXVIII.
1817. » rostratus Sowerby, *Min. Conch.* tav. CLXXIII.
1822. » inflatus Brongniart, *Environs de Paris*, tav. VI, fig. 1.
1825. » affinis de Haan, *Monogr. Gon. et Am.* pag. 120.
1828. » tetrammatus J. de C. Sowerby, *Min. Conch.* tav. DLXXXVII.
1840. » inflatus D'Orbigny, *Pal. fr. Terr. crét.* tom. I, pag. 304, tav. XC.
1846. » varicosus inflatus Quenstedt, *Petref. Deutsch.* t. I, pag. 211, tav. XVII, fig. 2.
1847. » inflatus Pictet et Roux, *Moll. des grès verts*, p. 103, tav. IX, fig. 6 e tav. X, fig. 1 e 2.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome*, tom. II, pag. 124 e 146.
1859. » » Pictet et Campiche, *Mat. pour la pal. Suisse. Foss. de Sainte-Croix*, p. 178.
1862. » » Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constant.* pag. 286.
1880. » » Coquand, *Études supplément.* pag. 407.

Riferisco a questa specie un frammento in poco buono stato, ma che pei suoi caratteri e specialmente per la conformazione e per l' ingrossamento delle costole all'estremità, in vicinanza della carena, tale determinazione parmi esatta.

Qui io vado all'idea che quei voluminosi esemplari in cattivo stato, di cui parlai in appendice alla precedente specie, potessero realmente rapportarsi alla *S. inflata;* la forma rigonfia degli avvolgimenti, l'accennata carena, l'andamento delle costole lo fanno presumere, ma il cattivo stato dei fossili non permette di riconoscervi i caratteri decisivi in favore di tale opinione.

Giacimento. — L'*A. inflatus* trovasi in Inghilterra, Francia, Svizzera, Germania, ecc. a caratterizzare gli strati superiori del piano albiano, e gli strati inferiori del Cenomaniano.

L'esemplare che vi ho riconosciuto fu da me raccolto a S. Giorgio presso Brancaleone. Gli esemplari voluminosi che dubbiosamente vi riferisco vengono dal medesimo luogo e dal territorio di Ferruzzano.

Genere. **OPPELIA** Waagen.

1. **Oppelia** . . . . . . sp.?

Un frammento d'una grossa Oppelia, che non mostra indizio di pieghe o di costole resta indeterminato perchè assai incompleto, quantunque la sua superficie sia

elegantemente ornata dai ripiegati o frastagliatissimi margini dei tramezzi, essendo disegnati squisitamente i lobi e le selle. Io posso soltanto accennare che per la forma generale della conchiglia e pel grado di compressione della stessa, questa specie in qualche modo ricorda l'*A. Requienianus* D'Orbigny, ma la nostra ne differisce evidentemente pel dorso che non è ristretto ed acutamente carenato, ma invece alquanto largo e ben rotondato.

Larghezza dell'avvolgimento. 95.mm
Spessore massimo dello stesso 38.mm

Giacimento. — S. Giorgio presso Brancaleone.

2. Oppelia . . . . . . sp.?

Non ardisco nemmeno di imporre un nome ad un altro grosso frammento che per la sua forma generale potrebbe compararsi all'*A. alpinus* D'Orb., ma il nostro fossile accenna di essere più compresso nella forma, oltrechè molto più grande. Il frammento di cui parlo è terminato da due superficie di sepimenti, e l'esteriore poi senza pieghe nè costole è ornato dai flessuosi lobi dei tramezzi. Il dorso sembra abbastanza largo e regolarmente convesso.

Larghezza dell'avvolgimento . . . . 1 decim.
Spessore massimo dello stesso 60.mm

Giacimento. — S. Giorgio presso Brancaleone.

Genere. TURRILITES Lamarck.

1. Turrilites Bergeri Brongniart.

Sinonimi.

1708. Turrilites — Lang, *Hist. lapidum*, pag. 112, tav. XXXII, fig. 7.
1722. Turrilites Bergeri — Brongniart, *Env. de Paris*, in Cuvier, *Oss. foss.* 4e édit. t. IV, p. 178 e 641, tav. O, fig. 3 *a*.
1840. » » — D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* tom. I, p. 590, tav. CXLIII, fig. 3-6.
1847. » » — Pictet et Roux, *Moll. des Grès verts*, pag. 148, tav. XV, fig. 8.
1850. » » — D'Orbigny, *Prodrome de paléont.* tom. II, pag. 127 e 147.
1856. » » — Sharpe, *Palaeont. Soc. Moll. of the Chalk.* pag. 65, tav. XXVI, fig. 9-11.
1861. » » — Pictet et Campiche, *Mat. pour la pal. Suisse. Terr. de Sainte-Croix*, 5° e 6° fascic. pag. 134, tav. LVIII, fig. 1-5.
1862. » » — Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Constantine*, pag. 288.
1880. » » — Coquand, *Études supplément.* pag. 408.

Riferisco a questa specie, senza esitare un istante, due grossi esemplari costituiti da due avvolgimenti, ma in cattivo stato di conservazione; pure in una parte di essi riesce agevole di riconoscervi l'ornamentazione caratteristica della specie, consistente in quattro ordini di tubercoli rotondati e pressochè uguali su ciascuno avvolgimento, i quali si dispongono in serie sopra pieghe oblique della conchiglia.

Vi rapporto ancora un frammento costituito d'un solo anfratto, sul quale le serie dei tubercoli sono scancellate, appena discernibili, ma pure vi si riconoscono evidentemente, ed invece la superficie tutta è ornata elegantemente dalle linee dei tramezzi, essendovi rappresentati ripetutamente con grande precisione e squisitezza i frastagliatissimi lobi e le profonde selle.

Giacimento. — In Francia, in Isvizzera, in Inghilterra ed altrove il *T. Bergeri* trovasi negli strati superiori del terreno albiano, siccome dapertutto si vede nel Cenomaniano.

Gli esemplari che io vi rapporto sono stati da me stesso raccolti alla contrada S. Giorgio presso Brancaleone

2. Turrilites Gravesianus D'Orbigny.

Sinonimi.

1840. Turrilites Gravesianus D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crétacés.* tom. I, pag. 596, tav. CXLIV, fig. 3-5.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome de pal.* tom. II, pag. 147.
1856. » » Sharpe, *Palaeont. Soc. Moll. of the Chalk.* pag. 62, tav. XXV, fig. 7, tav. XXVI, fig. 14.
1862. » Gravesii Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Constantine*, pag. 288.
1880. » » Coquand, *Études supplément.* pag. 408.

Riferisco a questa specie con sicurezza un frammento costituito d'un solo avvolgimento ed in cattivo stato di conservazione, il quale fa intanto vedere evidentissimi i caratteri della specie. La poca altezza dell'anfratto, le tre serie di piccoli tubercoli nella metà superiore, una serie di assai grossi e radi tubercoli verso la metà sono tali distintivi da non confondere questa specie colle affini, e sopratutto col *T. tuberculatus,* che non rinvenni sinora nei nostri terreni.

Giacimento. — Il *T. Gravesianus* è proprio del Cenomaniano, e caratterizza tale piano in Inghilterra, in Francia ed in Germania.

Il mio esemplare l'ho raccolto a S. Giorgio presso Brancaleone.

3. Turrilites tuberculato-plicatus n. sp.

Tav. V, fig. 3.

Diagnosi. — *Testa turrita sinistrorsa; anfractibus elatis, extra rotundatis, tuberculato-plicatis; tuberculis quatriserialibus, serie antica ad suturam, postica fere mediana e tuberculis multo majoribus paucioribusque constituta; parte postica anfracti plicis parum prominentibus convexis, confertisque ornata.*

Diametro dell'ultimo anfratto 43.mm
Altezza dello stesso 24.mm

La conchiglia di questa specie è sinistrorsa, cogli avvolgimenti alti e celeremente crescenti, molto convessi all' esterno, nel piano di congiunzione appianato-convessi e radialmente plicati dal lato anteriore, piano-concavi invece dal lato posteriore ed ugualmente radiato-plicati. La superficie esterna degli avvolgimenti è ornata di pieghe e di tubercoli, quest'ultimi costituiscono quattro serie spirali, delle quali le prime tre cateniformi, costituite da tubercoli piccoli, avvicinati ed allungati nel senso della lunghezza degli avvolgimenti, la serie anteriore coincide colla sutura che è molto profonda e viene in parte ricoperta dall'anfratto seguente, la serie posteriore è situata pressochè ai tre quinti dalla sutura anteriore ed è costituita da tubercoli rotondati, assai grossi e molto distanti. I due quinti posteriori degli avvolgimenti sono ornati poi da pieghe longitudinali, avvicinate, convesse, poco sporgenti.

L'andamento della linea dei tramezzi è poco manifesto; nè mi fu possibile di scoprire il posto che occupa il sifone.

La mia specie è molto affine al *T. Bechii* Sharpe del medesimo piano, difatti la forma degli avvolgimenti è molto analoga, e la superficie presentasi in entrambi tubercolato-plicata. Pure la mia specie ne è distintissima per la serie di grossi tubercoli che porta ai tre quinti degli avvolgimenti, ed inoltre per la forma delle pieghe allargate ed avvicinate, che affettano soltanto i due quinti della larghezza degli anfratti.

Giacimento. — Un solo esemplare raccolto a S. Giorgio presso Brancaleone.

4. **Turrilites Puzosianus** D'Orbigny.

Sinonimi.

1708. Turbinites Lang, *Hist. lapidum figur. Helvetiae*, pag. 111, tav. XXXII, fig. 6.
1840. Turrilites Puzosianus D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* t. I, pag. 587, tav. CXLIII, fig. 1 e 2.
1847. » » Pictet et Roux, *Moll. des Grès verts*, p. 151.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome*, t. II, pag. 127.
1861. » » Pictet et Campiche, *Matér. pour la pal. suisse. Foss. de Sainte-Croix.* 5° e 6° fasc. pag. 139, tav. LIX, fig. 3-6.
1862. » Puzosii Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Constantine*, pag. 286.
1880. » » Coquand, *Études supplément.* pag. 407.

Io riferisco a questa specie un solo ma ben caratterizzato esemplare, distinto dalle sottili e ravvicinate costole, e dalle serie di tubercoli alla parte anteriore degli avvolgimenti.

Giacimento. — Questa specie è riguardata comunemente siccome Albiana, e giace quasi dapertutto in Francia, in Isvizzera, in Algeria sul limitare superiore di tale piano, ma sembra che in qualche luogo oltrepassi tale limite e divenga Cenomaniana.

L'unico esemplare che ho raccolto proviene dalla portella di Falcò nel territorio di Ferruzzano.

5. **Turrilites Scheuchzerianus** Bosc.

Sinonimi.

1752. Turbinites Scheuchzer, *Natur. Hist. des Schweizerlandes*, t. III, fig. 73.
1801? Turrilites Scheuchzerianus Bosc, *Buffon de Déterville. Vers*, t. V, pag. 190.
1814. » undulatus Sowerby, *Min. Conch.* tav. LXXV, fig. 1-3.
1822. » » Mantell. *Geol. of Sussex*, tav. XXIII, fig. 14 e 16, tav. XXIV, fig. 8.
1822. » » Brongniart, *Tableau des terrains*, pag. 403.
1825. » Scheuchzerianus De Haan, *Monogr. Amm. et Gon.* pag. 78, n. 4.
1840. » » D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* t. I, pag. 602, tav. CXLVI, fig. 3 e 4.
1840. » Desnoyersianus D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* t. I, pag. 601, tav. CXLVI, fig. 1 e 2.
1847. » » Pictet et Roux, *Grès verts de la Perte-du-Rhône*, p. 152.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome de pal.* tom. II, pag. 147.
1850. » Scheuchzerianus D'Orbigny, *Prodrome de pal.* t. II, p. 148.
1856. » » Sharpe, *Paleont. Soc. Moll. of the Chalk.* pag. 64, tav. XXVI, fig. 1-3.
1862. » » Pictet et Campiche, *Matér. pour la pal. Suisse. Fossil. de Sainte-Croix*, 2ª parte, n. 4, p. 144, tav. LVIII, fig. 6.
1862. » » Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constant.* pag. 288.

1862. Turrilites Desnoyersii Coquand, op. cit. pag. 288.
1867. » Scheuchzerianus G. Seguenza, *Sul cret. med. dell'Italia merid.* (Atti della Soc. ital. di scienze nat. V. X).
1880. » » Coquand, *Études supplément.* pag. 408.
1880. » » Seguenza, *Le formaz. terz.* pag. 14.

È questa la specie più comune dei Turriliti italiani. I varî esemplari che ho raccolto e che mi furono comunicati offrono distintissimi i caratteri proprî della specie. Le costole non interrotte, prominenti, e regolari distinguono assai bene questo turrilite dalle specie tutte.

Tra gli altri ne ho un esemplare assai grosso, del diametro di 58 millimetri.

Siccome un grande e bello esemplare conservasi nella collezione del dott. M. De Mujà a Siderno.

Un mio esemplare e taluni frammenti rappresentano più o meno distintamente i caratteri del *T. Desnoyersianus*, e dimostrano ad evidenza come da questa forma si passa al *T. Scheuchzerianus* siccome il Sharpe ed il Pictet dimostrarono. La interruzione o depressione mediana delle costole si manifesta più o meno marcata secondo i diversi individui, ed inoltre io devo fare notare come nei miei maggiori esemplari le costole interrotte o depresse si manifestano sino ad una età molto più avanzata di quello che accennano le figure del Sharpe e dei sigg. Pictet e Campiche. Dimodochè questo fatto associato alla variabilità nel grado d'interruzione delle costole mi fa riguardare più tosto il *T. Desnoyersianus* siccome una varietà del *T. Scheuchzerianus* anzichè il semplice stato giovanile, ciò verrebbe in accordo colle figure del D'Orbigny nelle quali si osserva, che il *T. Desnoyersianus* ha le sue costole interrotte sin nell'ultimo anfratto, e il *T. Scheuchzerianus* manca di questo carattere sin nei piccoli avvolgimenti.

Giacimento. — Questa specie è riconosciuta siccome caratteristica del Cenomaniano in Germania, in Inghilterra, in Isvizzera, in Francia ed in Algeria. È caso veramente eccezionale l'averla trovata nel Gault in qualche luogo soltanto.

Gli esemplari dell'Italia meridionale, che rappresentano le due varietà, sono state raccolte a S. Giorgio presso Brancaleone, così il maggiore di essi conservato dal dott. De Mujà, ed uno che trovasi nell'Istituto tecnico di Reggio. Alcuni altri provengono dal territorio di Ferruzzano.

Classe. Gasteropodi. — Ordine. Prosobranchi. — Sezione. Ctenobranchi.
Gruppo. Tenioglossi-olostomi.

Fam. PIRAMIDELLIDI.

Genere. NERINAEA Defrance.

1. Nerinaea Calabro-sicula n. sp.

Tav. V, fig. 4, 4 *a*.

Sinonimi.

1867. Nerinea . . . . . . G. Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia merid.* pag. 6 (Atti Società italiana scienz. nat. Vol. X).

Diagnosi. — *Modulus conico-elongatus, perforatus; anfractibus medio excavatis, antice posticeque prominentibus, rotundato-subangulatis; suturis profundatis; apertura elongata, medio constricta; labro medio uniplicato; columella biplicata.*

Dagli esemplari posseduti io non posso dare dimensioni perchè, incompleti; la figura ne dà adequata idea.

La conchiglia di questa specie sembra essere stata più tosto breve, di forma conico-allungata, e costituita di pochi avvolgimenti alti, che portano una profonda scanalatura e larga nel mezzo, e convessi con un leggero indizio di angolosità alla parte anteriore ed alla posteriore ; le suture sono molto profondate; l' ultimo avvolgimento alla parte anteriore è convesso con una scanalatura marginale e poco profonda e forse con uno stretto ombelico; l'apertura è considerevolmente allungata e ristretta nel mezzo tanto fortemente che viene così divisa in due porzioni di forma ovale. Il labbro presenta alla metà della sua lunghezza una piega poco sporgente; la columella porta due ottuse pieghe alla base.

Questa specie è distintissima da quelle che mi sono note.

Giacimento. — Trovasi raramente a S. Giorgio, portella di Falcò e Magliardo.

Genere. **TYLOSTOMA** Sharpe.

1. **Tylostoma gracile** n. sp.

Tav. V, fig. 10.

Diagnosi. — *Modulus elongatus, subturritus, gracilis; anfractibus convexiusculis, ultimo spirae longiore; suturis profundis; ore ovato.*

Lunghezza (calcolata) 47.mm
Diametro 18.mm

Qualche solo modello di questa specie da me posseduto non mi fa dare che un' incompletissima descrizione.

A me sembra intanto che tale specie è ben distinta da tutte quelle note per la sua forma molto allungata, e perciò più gracile di quelle descritte, e quasi di forma cilindracea; i suoi avvolgimenti poco convessi portano al terzo posteriore un solco superficiale.

Giacimento. — I modelli incompleti che possiedo li raccolsi alla portella di Falcò.

2. **Tylostoma propinquum** n. sp.

Tav. V, fig. 9.

Sinonimi.

1876. Tylostoma propinqua Seguenza, *I fossili del Cenomaniano di Caltav.* pag. 1.

Diagnosi. — *Modulus ovato-oblongus; anfractibus convexis, ultimo ovato spirae longiore; suturis profundis; ore ovato-lanceolato.*

Lunghezza 38.mm
Diametro 20.mm

L'unico modello che denomino così è affine ai precedenti per la forma generale, ma è considerevolmente meno gracile e cogli avvolgimenti più convessi.

Il *T. propinquum* è grandemente affine al *T. Laarpi* Pict. et Camp. del Valangiano di Svizzera, dal quale solamente si distingue pegli avvolgimenti meno convessi e specialmente l'ultimo.

Giacimento. — Il solo modello posseduto fu trovato alla portella di Falcò. La specie fu rinvenuta anco a Caltavuturo.

3. Tylostoma breve n. sp.

Tav. V, fig. 11.

Diagnosi. — *Modulus ovato-scalariformis; anfractibus convexiusculis antice subangulatis; ultimo spirae multo longiore, subinflato; suturis subcanaliculatis; ore ovato-elongato.*

Lunghezza 27.mm 26.mm
Diametro 17.mm 16.mm

Questa specie è molto affine alla *T. fallax* Pict. et Camp., dalla quale differisce per l'ultimo avvolgimento meno globoso e per la spira scalariforme colle suture scanalate.

Giacimento. — Insieme alle precedenti specie alla portella di Falcò.

Fam. NATICIDI.

Genere. NATICA Linneo.

1. Natica eburnoides n. sp.

Tav. V, fig. 12.

Diagnosi. — *Modulus ovatus, subelongatus; anfractibus parum convexis, postice angulatis, planato-subcanaliculatis; ultimo maximo, parum inflato, fere ovato; ore ovato-acuminato.*

Lunghezza 32.mm
Diametro 20.mm

Questa specie somiglia moltissimo alla *N. bulbiformis* Sowerby, dalla quale differisce per essere meno rigonfia, più stretta e sopratutto per la grandezza e la convessità minori dell'ultimo avvolgimento.

Giacimento. — Un solo esemplare raccolto a S. Giorgio.

Gruppo. TENIOGLOSSI-SIPHONOSTOMI.

Fam. STROMBIDI.

Genere. STROMBUS Lamk.

1. Strombus inornatus D'Orbigny.

Sinonimi.

1842. Pterocera inornata D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* tom. II, pag. 314, tav. CCXIV.
1850. Strombus inornatus D'Orbigny, *Prodrome de pal.* tom. II, pag. 155.
1855. » » Pictet, *Traité de paléont.* tom. III, pag. 196.
1862. » » Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Constantine*, pag. 295.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 413.

Riferisco a questa specie due grossi modelli incompleti, nei quali si riconoscono buoni caratteri della specie del D'Orbigny.

Giacimento. — Cenomaniano di Francia e di Ténoukla in Africa.

I miei esemplari provengono uno da S. Giorgio presso Brancaleone, e l'altro dalla portella di Falcò territorio di Ferruzzano.

2. **Strombus incertus** (D'Orbigny).

Sinonimi.

1842. Pterocera incerta D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crétacés*, tom. II, pag. 308, tav. CCXV.
1850. Strombus incertus D'Orbigny, *Prodrome de pal.* tom. II, pag. 155.
1855. » » Pictet, *Traité de paléont.* tom. III, pag. 196.
1862. » » Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Constantine*, pag. 295.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 409.

L'unico esemplare che vi rapporto è di un giovane che corrisponde bene ai caratteri assegnati dal D'Orbigny.

Giacimento. — Cenomaniano di Francia e d'Algeria. Il mio esemplare è raccolto a S. Giorgio.

Genere. **PTEROCERA** Lamarck.

1. **Pterocera marginata** D'Orbigny.

Sinonimi.

1842. Pterocera marginata D'Orbigny, *Prodrome de pal. Terr. crétacé*, tom. II, pag. 310, tav. CCXVII, fig. 2.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome de pal.* tom. II, p. 155.
1880. » » H. Coquand, *Ètud. suppl. sur la pal. alg.* pag. 78 e 409.

Un piccolo esemplare incompleto ed alquanto dubbio.

Giacimento. — Cenomaniano di Francia e d'Algeria. L'esemplare del cretaceo italiano l'ho raccolto a S. Giorgio.

2. **Pterocera foveolata** n. sp.

Tav. V, fig. 5.

Diagnosi. — *Modulus magnus, ovato-conicus; anfractibus planatis, medio serie foveolarum profundatis ornatis, ultimo magno, spirae longiore, subangulato antice convexo, producto; suturis profundatis.*

Lunghezza (dell'unico es. incompleto) 80.mm
Grossezza 56.mm

L'unico modello incompleto sul quale istituisco questa specie, rapportandola dubbiosamente al genere *Pterocera*, si fa distinguere per la specialissima caratteristica di avere i suoi avvolgimenti segnati da una serie d' infossamenti verso la metà dell'altezza degli stessi; tali infossamenti sono abbastanza profondati, allungati trasversalmente, e se ne contano sette o otto sopra ciascuno avvolgimento, che è di forma appianata, e separato dagli altri per mezzo di profonde suture; l' ultimo è grande, convesso e sporgente alla parte anteriore.

Giacimento. — Il mio unico esemplare viene da Cirella nel Reggiano, località da me non esplorata, da dove mi ebbi qualche altro fossile del cretaceo medio.

Gruppo. Brachiglossi.

Fam. VOLUTIDI.

Genere. VOLUTA Linneo.

1. Voluta Baylei Coquand.

Sinonimi.

1849. Voluta Guerangeri Bayle, *Rich. minéral. de l'Algérie*, tom. I, pag. 363, tav. XVIII, fig. 12 (non D'Orbigny).
1862. » Baylei H. Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Constantine*, p. 182, tav. II, fig. 11.

Rapporto a questa specie un piccolo esemplare, che ne presenta bene i caratteri, e sul quale mi fu benanco possibile di vedere due grosse pieghe columellari. Questa specie infatti si distingue agevolmente per la carena, al quarto posteriore degli avvolgimenti, che li rende siccome altrettanti successivi gradini, e per le pieghe longitudinali cosifatte che gli anfratti acquistano la forma prismatica.

Giacimento. — Il sig. Coquand riferisce che il sig. Fournel ha raccolto questa specie a El-Outaia nel piano Campaniano.

L'unico mio esemplare è di S. Giorgio presso Brancaleone.

2. Voluta Reynesii n. sp.

Tav. V, fig. 7.

Diagnosi. — *Modulus elongatus, gradatus; anfractibus planatis, postice prope suturam anguloso-subcarinatis; ore ovato-elongato, columella plicis duobus prominentibus praedita.*

Mancano le dimensioni perchè l'esemplare è incompleto.

Conchiglia elongata di forma analoga alla precedente per avere gli avvolgimenti appianati, che s'incurvano e divengono angolosi e quasi carenati presso la sutura posteriore, dimanierachè la conchiglia acquista la forma di gradinata. La bocca è molto allungata, e la columella porta due pieghe assai prominenti.

Questa specie fu da me creduta il *Fusus Reynesi* Coq. pria che vi avessi riconosciuto le due pieghe sulla columella, e difatti la forma della conchiglia è molto somigliante a quella specie del Coquand.

Giacimento. — L'unico incompleto esemplare che possiedo l'ho raccolto alla contrada Magliardo nel territorio di Barcellona (provincia di Messina).

3. Voluta elongata (Sowerby).

Sinonimi.

1835. Fasciolaria elongata March. et Sedw. Gosau, Trans. geol. Soc. tav. XXXIX, fig. 22.
1842. Voluta elongata D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* tom. II, pag. 323, tav. CCXX, fig. 2.
1850. » » D'Orbigny, *Prodrome de paléont.* tom. II, p. 193.

Riferisco a questa specie una semplice impronta, che vedesi sull'ombone di una Ostrea, la quale erasi fissata sul Gasteropodo rappresentato in quella impronta, che spetta all'ultimo avvolgimento di una voluta, nella quale la scultura risponde bene a quella della *V. elongata*, alla quale con qualche dubbio la rapporto.

Giacimento. — Questa specie giace nel Turoniano di Francia. Il nostro esemplare è di S. Giorgio.

4. Voluta Ferruzzanensis n. sp.

Tav. V, fig. 6.

Diagnosi. — *Modulus elongatus, subfusiformis, anfractibus convexiusculis, costis longitudinalibus, tenuibus, quattuordecim quoque anfractu, antice evanescentibus; interstitiis costae duplo latioribus, foveola transversa elongata ad tertium anticum signatis; anfractu ultimo spiram subaequans; ore ovato-oblongo; columella biplicata.*

Lunghezza approssimativa 48.mm
Diametro 19.mm

Conchiglia di forma allungata e quasi fusiforme, cogli avvolgimenti poco convessi ed ornati da costole longitudinali sottili, circa quattordici per ogni anfratto, le quali sono disgiunte da interstizî di doppia larghezza, e svaniscono verso la regione anteriore, dove circa ad un terzo dalla sutura, sugli interstizî, osservansi degli infossamenti allungati e trasversali. L'ultimo avvolgimento sembra che sia stato pressochè uguale alla spira; la bocca è ovato-allungata, la columella ha due pieghe non molto sporgenti.

Questa specie per la sua forma allungata molto, e per le strette costole distinguesi bene dalle forme note provenienti dal cretaceo.

Giacimento. — L'unico esemplare raccolto fu trovato alla portella di Falcò, territorio di Ferruzzano.

5. Voluta longispira n. sp.

Tav. V, fig. 8.

Diagnosi. — *Modulus longissimus; anfractibus elatis, convexis, celeriter crescentibus, ultimo maximo, ovato-oblongo, omnibus costatis; costis paucis, longitudinalibus, subobliquis, parum prominentibus; suturis late ac profunde canaliculatis; ore elongato dimidiam spiram superante; columella plicis duobus maximis praedita.*

Lunghezza totale presunta 70.mm
Lunghezza dell'ultimo avvolgimento 42.mm
Diametro 20.mm

Conchiglia molto allungata in modo che diviene fusiforme, cogli avvolgimenti molto alti, che formano una spirale, la quale cresce celeremente, l' ultimo anfratto di forma ovato-allungata è grandissimo e supera di molto la lunghezza del resto della spirale; circa dieci costole poco sporgenti, o meglio pieghe alquanto oblique ornano tutti gli avvolgimenti; le suture sono profondate e largamente scanalate; la bocca è allungata d'una lunghezza che supera la metà della spirale; e la columella è fornita di due pieghe prominentissime.

La conformazione di questa specie è eminentemente distinta per la forma generale per la grande altezza e la celerità di accrescimento degli anfratti, siccome per le grandissime pieghe della columella.

Giacimento. — L'unico esemplare raccolto viene dalla portella di Falcò nel territorio di Ferruzzano.

Gruppo. Ctenobranchi-ripidoglossi.

Fam. TROCHIDI.

Genere. TROCHUS Linneo.

1. Trochus grano-lyratus Seguenza.

Tav. V, fig. 13.

Sinonimi.

1876. Trochus grano-lyratus Seguenza, *I fossili del Cenomaniano di Caltavuturo* (Rendiconto della r. Acc. delle scienze fis. e mat. fasc. 1°).
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cret. di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » S. Ciofalo, *Alcune specie nuove del cret. di Caltavuturo*, pag. 3.

Diagnosi. — *Testa turbinata, subdepressa, perforata?, obtusa, anfractibus convexis, grano-lyratis, ultimo angulato, antice planato-convexiusculo; suturis impressis; ore subdepresso, obliquato.*

Altezza 13.mm
Diametro 16.mm

Questa specie per la sua forma turbinata e depressa, angolata alla base, che è alquanto convessa, e sembra che ha dovuto essere ombelicata, coll'apice ottuso, cogli avvolgimenti convessi somiglia grandemente a tante specie terziarie ed a non poche viventi, ma essa distinguesi benissimo per la sua scultura, difatti ogni avvolgimento porta otto o nove linee rilevate, granose, o per meglio dire moniliformi.

Giacimento. — Due soli esemplari dalla collezione del prof. S. Ciofalo, raccolti presso Caltavuturo.

Classe. Scafopodi. — Ordine. Solenoconchi.

Fam. DENTALIDI.

Genere. DENTALIUM Linneo.

1. Dentalium prismiforme n. sp.

Tav. V, fig. 14.

Diagnosi. — *Testa cylindraceo-prismatica; costis tenuis, longitudinalibus, inaequalibusque duodecim signata.*

La figura dà chiara idea della forma e benanco della grandezza dell'unico frammento raccolto.

Giacimento. — L'unico frammento raccolto proviene dalla Valle di Lando.

Classe. Lamellibranchi. — Gruppo. Sifoniani.

Fam. CORBULIDI.

Genere. COQUANDIA Seguenza 1875. (M. S.)

Conchiglia solida, rigonfia, inequivalve ed inequilaterale completamente chiusa, cogli apici gibbosi, col lato posteriore pressochè rostrato, coll' impressione palleale

che offre un seno poco profondo. Il cardine è formato da un grande cucchiaio orizzontale portato sulla valva destra, che è la maggiore, e da uno più piccolo sulla sinistra, che s'inserisce accanto al primo.

Il mio nuovo genere è un vero anello intermedio tra la famiglia dei Miidi e quella dei Corbulidi. Quantunque io non abbia rinvenuto che varî modelli interni, pure per la loro conservazione io ho potuto bene apprezzare i varî caratteri e quindi non dubito che le affinità delle conchiglie che riferisco al nuovo genere sieno quelle testè ricordate.

Difatti il mio nuovo genere per la costituzione del cardine si approssima al genere *Mya*, ma ne differisce perchè il grande cucchiaio è portato sulla valva destra, ed un altro più piccolo ve ne ha sulla sinistra; inoltre la conchiglia è completamente chiusa e rostrata al lato posteriore, considerevolmente inequivalve, e col seno palleale poco profondato; pei quali caratteri io ho creduto più ragionevole di riunirlo alla famiglia dei Corbulidi, e difatti la forma generale della conchiglia è quella di una grande Corbula.

A giudicare intanto dalle forme che offrono i modelli bisogna necessariamente convenire, che la conchiglia dovea essere molto spessa, ce lo attestano evidentemente le profonde impressioni palleali e muscolari, la forma tozza degli apici nel modello ec. ec.

Ho voluto dedicare questo genere al sig. prof. H. Coquand dell' Università di Marsiglia, in memoria delle sue ricerche geologiche e delle sue doviziose scoperte paleontologiche nell'Algeria, sopratutto nella formazione Rotomagiana, per le quali scoperte ci è dato oggidì conoscere le importantissime relazioni tra il nostro cretaceo e l'africano.

1. **Coquandia italica** Seg.

Tav. VI, fig. 1, 1*a*.

Sinonimi.

1876. Coquandia italica Seguenza, *I fossili del Cenomaniano di Caltavuturo* (Rendiconto della r. Acc. delle scienze di Napoli, fasc. 1°, 1876).

Diagnosi. — *Modulus ovato-oblongus, inflatus, anterius rotundatus, postice productus, angulosus; valva dextera gibbosiore; umbonibus incurvatis, rotundatis; impressione musculari antica ovato-semilunare, postica ovata, utriusque profundatis; sinu palleali parvo.*

Lunghezza	42.mm	45.mm	39.mm
Altezza	27.mm	30.mm	25.mm
Spessore	21.mm	24.mm	18.mm

Conchiglia che doveva essere molto solida, di forma ovato-oblonga, rotondata anteriormente, rostrata ed angolosa alla regione posteriore, molto rigonfia, ma di più sulla valva destra; il margine palleale è poco incurvato, gli apici rotondati, gibbosi e curvi; le impressioni muscolari anteriori sono ovate, semilunari, le posteriori semplicemente ovali, tutte poi di unita alla palleale sono molto profondate; il seno palleale è piccolo.

Giacimento. — Questa nuova forma del nostro cretaceo trovasi quasi in tutti i lembi sinora scoperti. Nella provincia di Messina a Magliardo, Valle di Lando, S. Paolo, Saittone. Nella provincia di Reggio a S. Giorgio presso Brancaleone, alla portella di Falcò presso Ferruzzano ed a Ciriella.

2. Coquandia minor Seg.

Tav. VI, fig. 2.

Sinonimi.

1876. Coquandia minor Seguenza, *I fossili del Cenomaniano di Caltavuturo* (Rend. della r. Acc. delle scienze di Napoli, fasc. 1°, 1876).
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cretaceo medio di Caltavuturo*, pag. 3.

Diagnosi. — *Modulus ovatus, subtrigonus, parum inaequilaterus, antice rotundatus, postice-angulosus; valva dextera vix majore; umbonibus prominulis; impressione muscolari antica posticaque subovatis, utriusque vix impressis; sinu palleali parvo.*

Lunghezza 22.mm
Larghezza. 16.mm
Spessore 11.mm

Questa forma differisce dalla precedente per essere più piccola, quasi equilaterale, molto meno convessa, di forma ovato-trigona, cogli apici più avvicinati, e colle impressioni palleale e muscolari appena impresse.

Giacimento. — Un solo esemplare raccolto presso Caltavuturo.

Genere. CORBULA Bruguière.

1. Corbula subtruncata n. sp.

Tav. VI, fig. 3, 3 *a*.

Diagnosi. — *Modulus ovato-subtrigonus, transverse elongatus, subaequivalvis; compressus, latere buccali brevi, rotundato; latere anali elongato, producto, anguloso, subcarinato; umbonibus parum prominulis, obtusis.*

Lunghezza 7.mm 7.mm
Larghezza. 4.mm 4,2.mm
Spessore 3.mm 3,2.mm

Questa piccola Corbula è di forma trigona, trasversalmente allungata, molto inequilatera quasi equivalve, ed abbastanza compressa, col lato boccale breve e rotondato, col lato anale allungato, angoloso, e alquanto carenato; cogli apici ottusi, appena sporgenti.

Per questi caratteri la specie somiglia molto alla *C. truncata* Sowerby, dalla quale differisce per essere più compressa, più inequilatera, meno inequivalve.

Giacimento. — I pochi esemplari vengono dalla valle di Lando.

2. Corbula umbonata n. sp.

Tav. VI, fig. 4.

Diagnosi. — *Testa ovato-trigona, inflata; latere buccali rotundato; latere anali longiore, truncato; umbone valde prominente, gibbo, incurvato.*

Lunghezza 8.mm
Larghezza. 6,4mm

Questa specie trigona, molto gibbosa, col lato boccale rotondato, col lato anale

più lungo e troncato è ben distinta per l'umbone molto prominente, gibboso e fortemente incurvato.

Somiglia infatti la *C. umbonata* alla *C. striatula* Sow., ma non ha carenato il lato anale, e l'umbone è molto più prominente e molto più incurvato.

Giacimento. — Trovata a Magliardo ed a Caltavuturo siccome a S. Giovanni di Caccamo.

Fam. ANATINIDI.

Genere. ANATINA. Lamarck.

1. Anatina ovata n. sp.

Tav. VI, fig. 5, 5 *a*.

Diagnosi. — *Testa ovato-transversa, compressa, subaequilatera; latere buccali rotundato; latere anali depressiusculo, dilatato, subtruncato; umbonibus obtusis, non prominentibus; superficie concentrice, ternuiter, irregulariterque striata.*

Lunghezza	42.mm
Larghezza	37.mm
Spessore	18.mm

Conchiglia trasversalmente ovata, compressa, quasi equilatera, ed ornata da irregolari e tenui linee di accrescimento, col lato boccale rotondato, e col lato anale, depresso, dilatato e quasi troncato; gli apici ottusi non prominenti.

La forma ovale distingue questa dalle anatine cretacee tutte.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio ed a Magliardo.

2. Anatina lucinoides n. sp.

Tav. VI, fig. 6.

Diagnosi. — *Testa transverse ovata, compressa, inaequilatera, concentrice striata; latere antico rotundato, latere postico depressiusculo, breviore, subangulato.*

Lunghezza	55.mm
Larghezza	44.mm
Spessore	14.mm

Questa specie per la forma trasversalmiente ovata si allontana da tutte le specie note e somiglia molto alla precedente, dalla quale distinguesi per essere più compressa, inequilatera, col lato anale più breve e quasi angoloso.

Giacimento. — Un solo esemplare alla portella di Falcò.

Genere. PHOLADOMYA. Sowerby.

1. Pholadomya Molli ? Coquand.

Sinonimi.

1862. Pholadomya Molli Coquand, *Géolog. et paléont. de la prov. de Constantine*, pag. 189. tav. VI, fig. 6 e 7.

1869. » » Seguenza, *Scoperta d'un lembo cretaceo* ec. (Atti della soc. ital. di scienze nat. vol. XII, fasc. 1°).

1871. » » *Contribuzione alla geol. prov. Messina. Formaz. prim.* ec. (Bull. Com. geol. pag. 35).

1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 409.

L'unico esemplare che vi riferisco è incompleto e quindi alquanto dubbio; quantunque la forma obliqua, gibbosa, quasi trigona, enormemente inequilatera, ne la distingue benissimo.

Giacimento. — La *P. Molli* giace nel Rotomagiano di Tenoukla e Batna. Il mio esemplare fu raccolto nella valle Magliardo (territorio di Barcellona).

2. **Pholadomya elata** n. sp.

Io non posso descrivere minutamente, nè figurare questa specie, perchè trattasi di un grosso ed incompleto modello, che per la forma molto somiglia alla *P. nuda* Agassiz, dalla quale differirebbe per l'apice un po' meno sporgente, e per la superficie che mostra appena qualche indizio di concentrici rialzi o costole. Il mio esemplare è della lunghezza d'un decimetro dall'apice al margine ventrale.

Giacimento. — S. Giorgio presso Brancaleone, ed a Caltavùturo.

3. **Pholadomya gracilis** n. sp.

Tav. VI, fig. 9, 9 *a*.

Diagnosi. — *Testa transverse elongatà, parum inflata, gracilis, arcuata, concentrice, obsolete plicata, irregulariterque; latere buccali brevi, rotundato, subangulato; latere anali elongato, rotundato-subtruncato; margine palleali fortiter arcuato; umbonibus prominulis incurvatis.*

Lunghezza	33.mm
Larghezza	20.mm
Spessore	15.mm

Conchiglia molto allungata trasversalmente ed incurvata, poco rigonfia in modo che la sua forma è gracile; la sua scultura risulta soltanto dalle linee di accrescimento che formano delle pieghe irregolari e poco prominenti. Il lato boccale è breve, rotondato e quasi alquanto angoloso; il lato anale è molto allungato, rotondato e quasi troncato all' estremità; il margine ventrale è molto incurvato; gli omboni sono alquanto prominenti ed incurvi.

Somiglia la nostra specie alla *P. Darrassi* Coquand, ma la specie siciliana è molto piccola, più gracile, cogli apici meno sporgenti.

Giacimento. — La *P. gracilis* fu raccolta a Magliardo presso Barcellona.

4. **Pholadomya crassesulcata** n. sp.

Tav. VI, fig. 8, 8 *a*.

Diagnosi. — *Testa ovata inflata subrotunda, concentrice sulcato-costata; latere buccali brevi, obtuso; latere anali elongato-rotundato; margine palleali fortiter arcuato; apicibus prominentibus, incurvatis.*

Lunghezza	50.mm
Larghezza	40.mm
Spessore	38.mm

Conchiglia molto rigonfia di forma ovato-rotundata, ornata concentricamente di costole rotondate, separate da solchi della stessa larghezza e regolari; il lato anteriore

della conchiglia è ottuso rotondato, il lato posteriore allungato e rotondato; il margine palleale è molto curvo; gli apici prominenti ed incurvati.

Questa specie molto si avvicina alla *P. Ligeriensis* D'Orbigny, ma quella ha forma più allungata ed incurva, costole più strette, solchi interposti assai piccoli. Ma la nostra specie somiglia molto più alla *P. numida* Coquand, dalla quale è diversa per essere molto più gibbosa e per la forma rotondata delle costole concentriche.

Giacimento, — Raccolta a S. Giorgio presso Brancaleone.

Fam. SOLENIDI.

Genere. **SOLEN** Linneo.

1. **Solen cretaceus** n. sp.

Tav. VI, fig. 7.

Questa specie è fondata sopra una semplice impronta lasciata da un *solen* sull'ombone di una *Exogyra flabellata,* che si era fissata su tale conchiglia: tale impronta è allungata, di forma pressochè rettangolare, ma alquanto incurvata, con linee di accrescimento distinte e parallele al margine dorsale, e con leggiere pieghe oblique.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio.

Fam. MACTRIDI.

Genere. **MACTRA** Linneo.

1. **Mactra Didonis** Coquand.

Sinonimi.

1862. Mactra Didonis Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Constantine,* pag. 190, tav. VII, fig. 1 e 2.
1866. » » G. Seguenza *Sulle imp. relaz. paleontolog.* ec. pag. 7. (Mem. della Soc. italiana).
1867. » » G. Seguenza *Sul cretaceo medio dell'Italia merid.* pag. 6 (Atti della Soc. ital. di scienze nat. vol. X).
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 409.
1880. » » G. Seguenza, *Le formaz. terz.* pag. 14.

Riferisco a questa specie qualche esemplare mal conservato, ma pure ben riconoscibile per la sua grande forma gibbosa, cogli apici molto prominenti e fortemente incurvati.

Giacimento. — Questa specie fu raccolta dal Coquand nel Rotomagiano d'Algeria.

Io l'ho rinvenuta a S. Giorgio presso Brancaleone, ed a Magliardo nel territorio di Barcellona.

2. **Mactra Moevusi** Coquand.

Sinonimi.

1862. Mactra Moevusi Coquand, *Géolog. et pal. de la prov. di Const.* pag. 191, tav. VII, fig. 3 e 4.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Ital. mer.* pag. 6. (Atti della Soc. ital. di scienze nat. vol X).
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 409.

Vi riferisco un solo esemplare alquanto compresso dalla fossilizzazione, che risponde benissimo alla forma poco convessa e trasversalmente allungata della *M. Moevusi.*

Giacimento. — Questa specie fu scoperta nel Rotomagiano d'Algeria. Io l'ho raccolta colla precedente a S. Giorgio.

3. **Mactra producta** n. sp.

Tav. VI, fig. 10, 10 *a*.

Diagnosi. — *Testa transversa, ovato-oblonga, inflata; margine buccale rotundato, margine anale productiusculo, rotundato; margine palleale parum arcuato; umbonibus inflatis, incurvis.*

Lunghezza 44.mm
Larghezza. 31.mm
Spessore 25.mm

Conchiglia trasversalmente ovato-oblonga, alquanto inequilatera, considerevolmente rigonfia, col margine boccale rotondato, coll'anale prominente e rotondato, col margine palleale poco convesso; cogli apici gibbosi ed incurvati.

La superficie della conchiglia accenna a leggiere pieghe concentriche, risultanti dalle linee di accrescimento.

È da accennare come non essendosi studiato il cardine, questa specie lascia qualche dubbio, per la sua forma, in quanto alla determinazione generica.

Giacimento. — Raccolto l'unico esemplare a S. Giorgio.

Genere. **LAVIGNON** Cuvier.

1. **Lavignon Marcouti** Coquand.

Sinonimi.

1862. Lavignon Marcouti Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. Constant.* pag. 191, tav. VI, fig. 14 e 15.
1869. » » Seguenza, *Scoperta di un lembo di terr. cretaceo*, pag. 3 (Atti della Soc. ital. di sc. nat.).
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 414.

Un solo esemplare ben caratterizzato.

Giacimento. — Contrada Magliardo, territorio di Barcellona.

Il Coquand lo raccoglievı a Trik-karretta in Africa nel piano mornasiano.

Fam. TELLINIDI.

Genere. **ARCOPAGIA** Brown.

1. **Arcopagia compressa** n. sp.

Non posso descrivere completamente questa specie, che molto somiglia alla *A. numismalis* D'Orbigny, perchè possiedo un solo ed incompleto esemplare.

È chiaro intanto dal modello rinvenuto che trattasi di specie distinta dalle conosciute. Essa è più compressa dell'*A. numismalis* ed ha un angolo cardinale molto ottuso e la forma più transversa, in modo che si avvicina ancora di più all'*A. depressa*

Coquand, dalla quale parmi differente per l'angolo cardinale molto più ottuso e per taluni distintivi del cardine.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio.

Fam. VENERIDI.

Genere. VENUS Linneo.

1. Venus plana Sowerby.

Sinonimi.

1813. Venus plana Sowerby, *Mineral. Conchol.* tom. I, pag. 57, tav. XX, fig. 2.
1843 » » D'Orbigny, *Paléont. français. terr. crét.* tom. III, pag. 447, tav. CCCLXXXVI, fig. 1-3.
1876. » » Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Alcune spec. nuove del cret. di Caltavuturo*, pag. 3.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 410.

I molti esemplari che vi riferisco sono grandi, maggiori anco della figura data dal D'Orbigny, poco rigonfi, e quantunque allo stato di modelli pure rispondono coi loro caratteri ai distintivi propri della specie.

Giacimento. — Il D'Orbigny la rinvenne in molti luoghi del Turoniano di Francia; il Coquand nel Rotomagiano d'Algeria.

Io la trovai comune a Falcò, rara a S. Giorgio. Il prof. Ciofalo la trovò presso Caltavuturo.

2. Venus arcuata n. sp.

Tav. VII, fig. 3, 3 *a*.

Sinonimi.

1876. Venus arcuata Seguenza, *Fossili del Cenom. di Caltavut.* pag. 2.

Diagnosi. — *Modulus rotundato-subtrigonus, parum inflatus, fortiter inaequilaterus; latere buccali brevi, subangustato; latere anali lato, rotundato, vix subanguloso; margine palleali parum curvato; umbonibus prominentibus arcuatis; lunula excavata.*

Lunghezza	50.mm	55.mm
Altezza	46.mm	50.mm
Spessore	27.mm	26.mm

La nuova specie che descrivo si approssima alla precedente dalla quale differisce considerevolmente per la forma generale più larga e quindi più rotondata, d'ordinario anco più compressa. Si distingue poi specialmente pegli apici che sporgono molto, si assottigliano all'estremità e s'inarcano curvandosi verso la regione ventrale.

Giacimento. — Pochi esemplari raccolti a S. Giorgio; alcuni presso Caltavuturo.

3. Venus Cleopatra Coquand.

Sinonimi.

1862. Venus Cleopatra Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Const.* pag. 288, tav. VII, fig. 7-8.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia merid.* pag. 6 (Atti della Soc. ital. di scienze nat.).
1876. » » Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 410.

Rapporto con sicurezza a questa specie varî esemplari che rispondono bene ai caratteri assegnatile dal suo autore. L'incavo profondo dal lato della lunula, e la forte convessità dal lato opposto dell' ombone distinguono benissimo questa specie.

Giacimento. — Il Coquand la rinveniva a Ténoukla nella provincia di Costantina, nel Rotomagiano.

Non è rara a S. Giorgio, trovasi anco a Falcò, e presso Caltavuturo.

4. **Venus regularis** n. sp.

Tav. VII, fig. 5, 5 *a*.

Sinonimi.

1876. Venus regularis Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavut.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove specie foss. del cretac. di Caltavuturo,* pag. 3.

Diagnosi. — *Modulus transversus, ovato-subtrigonus, parum inflatus, subaequilaterus; latere buccali angustato, subangulato; latere anali lato, rotundato; umbonibus prominulis; muscolaribus signis pallealique fortiter impressis.*

Lunghezza	48.mm	47.mm
Altezza	40.mm	40.mm
Spessore	25.mm	23.mm

Questa specie è affine alle precedenti, ma allungata trasversalmente, ovato-trigona e meno inequilatera di tutte si distingue bene; inoltre è più rigonfia e colle impressioni palleali e muscolari profondamente impresse. La *V. Cherbonnoi* Coq. e la *V. Dutrugei* sono più piccole, più compresse e rotondate al margine boccale, oltrechè gli apici sporgono di meno in queste due specie.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio e presso Caltavuturo.

5. **Venus Mauritanica** Coquand.

Sinonimi.

1862. Venus Mauritanica Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Const.* p. 289, tav. VII, fig. 13 e 14.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 410.

Vi rapporto qualche dubbio esemplare perchè incompleto.

Giacimento. — Il Coquand la trovava a Tenoukla nel Rotomagiano.

Io la raccolsi a Guttà e S. Giorgio.

6. **Venus Nail** Coquand.

Sinonimi.

1862. Venus Nail Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Const.* pag. 194, tav. VIII, fig. 5 e 6.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 415.

Varî esemplari si riferiscono a questa specie con sicurezza.

Giacimento. — Il Coquand la raccoglieva a Col de Sfa nel Provinciano.

Io la raccolsi alla Portella di Falcò.

7. **Venus trigona** n. sp.

Tav. VII, fig. 1, 1 *a*.

Diagnosi. — *Modulus sub-trigonus, valde depressus, subaequilaterus; latere buccali rotundato-angulato, latere anali subaequali, rotundato-angulato; umbonibus parvis vix prominulis; margine palleali parum curvato.*

Lunghezza	29.mm	25.mm
Larghezza	27.mm	22.mm
Spessore	14.mm	9.mm

Questa specie distinguesi a prima giunta dalle più affini per la sua forma triangolare bene spiccata, essendochè i margini anteriore e posteriore, nonchè il ventrale sono ben poco incurvati. Caratteri ancora molto distintivi sono la grande compressione della conchiglia e la picciolezza degli umboni.

Giacimento. — Raccolta raramente a S. Giorgio ed a Magliardo.

8. Venus mactraeformis n. sp.

Tav. VII, fig. 2, 2 *a*.

Sinonimi.

1876. Venus mactraeformis Seguenza, *I foss. cret. di Caltavuturo*, pag. 3.

Diagnosi. — *Modulus ovato-trigonus, subaequilaterus, inflatus; latere buccali angustato, angulato; latere anali rotundato-subangulato; margine palleali parum curvato; umbonibus haud prominentibus, convexis, incurvis.*

Lunghezza	23.mm
Larghezza.	20.mm
Spessore	13.mm

Conchiglia abbastanza convessa, di forma quasi triangolare e pressochè equilatera, percui assume la forma quasi di una *Mactra*. Stretta e quasi angolata alla regione boccale, rotondata ed un po' angolosa alla regione anale, col margine palleale poco curvo, e cogli apici non sporgenti, incurvati e rotondati.

Tutti i cennati caratteri concorrono a dare l'aspetto di una *Mactra* a questa specie, e la fanno perciò distinguere benissimo dalle altre. Per la forma triangolare la *V. mactraeformis* si avvicina alla precedente, ma ne è distintissima perchè più allungata trasversalmente, rigonfia, e pegli apici convessi ed incurvati.

Giacimento. — Raccolta a Caltavuturo.

9. Venus indistincta Ciofalo.

Sinonimi.

1877. Venus indistincta Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret. di Caltavuturo*, pag. 3, fig. 1.

Diagnosi. — *Modulus subovatus parum inflatus; latere buccali brevi rotundato; latere anali angustato subanguloso; margine palleali parum incurvato; umbonibus prominentibus vix incurvis.*

Lunghezza	23.mm
Larghezza	20.mm
Spessore	11,5.mm

Questa specie pei suoi apici prominenti e per la sua generale forma rassomiglia alla *V. regularis* ed alla *V. Cleopatra*, ma ne differisce per essere piccola e maggiormente inequilatera.

Giacimento. — Un solo esemplare raccolto a Caltavuturo.

10. **Venus Cherbonneaui** Coquand.

Sinonimi.

1862. Venus Cherbonneaui Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 299, tav. VIII, fig. 13 e 14.
1876. » » Seguenza, *I fossili del Cenomaniano di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note cret. medio* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret. Caltav.* pag. 2.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 414.

Un esemplare di Caltavuturo e qualche altro dubbio di S. Giorgio.

Giacimento. — Il Coquand la raccolse nel Mornasiano d'Africa.

I miei esemplari un po' dubbî sono da Caltavuturo e da S. Giorgio.

11. **Venus Dutrugei** Coquand.

Sinonimi.

1862. Venus Dutrugei Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Const.* pag. 289, tav. VII, fig. 5-6.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia mer.* pag. 6 (Atti della Soc. ital. di sc. nat. vol. X).
1876. » » Seguenza, *I fossili del Cen. di Caltavuturo*, pag. 2.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 410.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa specie trovasi quasi dapertutto nel nostro cretaceo; essa distinguesi bene per la forma poca convessa, arrotondata e cogli apici prominenti.

Giacimento. — In Africa nel Rotomagiano di Tenoukla.

In Italia a S. Giorgio, Magliardo, Lando, ed a Caltavuturo.

12. **Venus Reynesi** Coquand.

Sinonimi.

1862. Venus Reynesi Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 289, tav. VII, fig. 11 e 12.
1867. » » Seguenza, *Sul cret. med. dell'Ital. mer.* pag. 6 (Atti soc. ital. di scienze nat. vol. X).
1876. » » Seguenza, *I foss. del Cen. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Caltavut.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret.* pag. 2.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 410.

Questa specie è anch'essa distinta per la sua forma depressa e trasversalmente allungata.

Giacimento. — Il Coquand la raccoglieva nel Rotomagiano di Tenoukla.

Io l'ho trovata a S. Giorgio e nella Valle di Lando, fu raccolta anco a Caltavuturo.

13. **Venus meridionalis** n. sp.

Tav. VII, fig. 6, 6 *a*.

Sinonimi.

1876. Venus meridionalis Seguenza, *I foss. Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove specie foss. del Cretaceo di Caltavuturo* p. 2.

Diagnosi. — *Modulus ovato-rotundatus, compressus, fortiter inaequilaterus;*

latere buccali brevi, lato, rotundato; latere anali dilatato rotundato; margine palleali parum arcuato; umbonibus haud prominentibus, rotundatis.

Lunghezza	32.mm	27,5.mm
Larghezza	29.mm	24,5.mm
Spessore	17,5.mm	12.mm

Conchiglia ovato-rotondata molto inequilatera e considerevolmente compressa; colla regione boccale breve e rotondata, colla regione anale larga e parimenti rotondata, mentre il margine palleale è poco curvo dimodochè la conchiglia risulta ben arrotondata da tutti i lati, ed a ciò si aggiunge che gli umboni non sono prominenti, non acuti come avviene di sovente, ma invece sono convessi ed arrotondati.

Pei suoi caratteri la *V. meridionalis* è distintissima, specialmente per la forma arrotondata di tutte le parti; per tale carattere somiglia alla *V. Archiaciana* D'Orbigny, ma la nostra specie è molto più breve e quindi più rotondata.

Giacimento. — Trovasi a S. Giorgio, valle di Lando, Magliardo, Caltavuturo.

14. **Venus Calcarae** n. sp.

Tav. VII, fig. 4, 4 *a*.

Sinonimi.

1876. Venus Calcarae Seguenza, *I foss. cenom. di Caltavut.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Calt.* pag. 2.

Diagnosi. — *Testa ovato-subtrigona valde inaequilatera, parum inflata; latere buccali brevissimo rotundato; latere anali prominulo, constricto, rotundato-subanguloso; margine palleali parum curvato; superficie concentrice, inaequaliter plicata; umbonibus prominulis, antice incurvatis.*

Lunghezza	45.mm	43.mm
Larghezza	37.mm	36.mm
Spessore	22,7.mm	20.mm

La *V. calcarae* è specie affine a molte altre, ma essa distinguesi per essere grandemente inequilatera perciò molto affine alla precedente, ma non rotondata come essa e cogli apici alquanto prominenti.

Ho dedicato questa specie al prof. P. Calcara da Palermo, il quale fu il primo che scrissè sulle rocce e sui fossili del cretaceo medio delle provincie meridionali d'Italia, da lui studiato presso Caltavuturo.

Giacimento. — Due esemplari raccolti presso Caltavuturo, nella collezione del prof. Saverio Ciofalo da Termini-Imerese.

Genere. **TAPES** Muhlfeldt.

1. **Tapes minor** Ciofalo.

Sinonimi.

1876. Tapes minor Ciofalo, *Note foss. cret. Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Ciofalo, *Su di alcune nuove specie fossili del cret. med. di Caltavuturo*, pag. 4, fig. 2.

Questa piccola Tapes distinguesi per essere abbastanza rigonfia, col lato boccale breve e ristretto, col lato anale molto lungo e rotondato, e cogli apici prominenti.

Giacimento. — Raccolta a Caltavuturo.

Genere. DOSINIA Gray.

1. Dosinia Delettrei (Coquand).

Sinonimi.

1862. Venus Delettrei Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 299, tav. VIII, fig. 3 e 4.
1876. Dosinia Delettrei Seguenza, *I fossili del Cenomaniano di Caltav.* pag. 1.
1877. » » Ciofalo, *Nuov. spec. foss. cret.* p. 3.
1880. Venus Delettrei Coquand, *Études supplém.* pag. 414.
1880. Dosinia Delettrei Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa ben distinta specie è ben caratterizzata dalla sua forma quasi esattamente circolare, sporgendone in fuori gli apici, i quali sono acuti, ma si protendono ben poco.

Giacimento. — Il Coquand raccoglieva questa specie nel piano mornasiano di Tebessa e Batna in Africa.

Io l'ho trovato comune a S. Giorgio e quindi a Falcò, Magliardo, Caltavuturo.

2. Dosinia Forgemolli (Coquand).

Sinonimi.

1862. Venus Forgemolli Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 289, tav. VIII, fig. 7 e 8.
1876. Dosinia Forgemolli Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltavut.* pag. 1.
1877. » » Ciofalo, *Nuove specie foss. cret. Caltavuturo*, pag. 3.
1880. Venus Forgemolli Coquand, *Études supplém.* pag. 410.

Questa specie è anch'essa distintissima per le sue forme rotondate, pel suo apice acuto incurvo, e poco prominente. Distinguesi benissimo dalla *D. Delettrei* per la sua forma ovata e non circolare, e per essere più gibbosa.

Giacimento. — Il Rotomagiano di Tenoukla in Africa.

In Italia è rara a S. Giorgio, Falcò, Magliardo e Caltavuturo.

Fam. CIPRINIDI.

Genere. ASTARTE I. Sowerby.

1. Astarte minima n. sp.

Tav. VII, fig. 7, 7 *a*, 7 *b*.

Diagnosi. — *Testa transverse ovata, compressa, subaequilatera; latere buccali rotundato; latere anali truncato, anguloso; superficie concentrice costata; umbonibus obtusis, haud prominentibus.*

Lunghezza	15.mm	13.mm
Larghezza	10.mm	9,5.mm
Spessore	5.mm	4.mm

La mia specie ha grande somiglianza coll'*A. oblonga* Dechayes del Neocomiano, ma si distingue per essere meno allungata, quasi equilatera, più compressa, e per le costole rilevate ed acute.

Giacimento. Trovasi comune nella roccia a *Venericardia Calabra* in S. Giorgio presso Brancaleone, siccome raramente a Magliardo.

2. Astarte tenuicosta n. sp.

Tav. VII, fig. 8.

Sinonimi.

1876. Astarte tenuicosta Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Cenni sul cretac. medio di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Ciofalo, *Nuove specie foss. cret.* ecc. pag. 3.

Diagnosi. — *Testa ovato-trigona, compressa, concentrice costata, costis paucis, prominentibus, lamelliformibus; latere buccali breve, rotundato; latere anali elongato-angulato.*

Lunghezza 6,5.mm
Larghezza 5,7.mm

Questa piccola specie somiglia molto all'*A. formosa* Fitton del Neocomiano, dalla quale parmi debbasi distinguere per la sua piccolezza, per le costole lamelliformi ed ancor più numerose. Differisce poco per la forma.

Giacimento. — Trovasi assai raramente a Magliardo, S. Giorgio, Caltavuturo. L'esemplare da me figurato è una semplice esteriore impronta.

Genere. CRASSATELLA Lamarck.

1. Crassatella Baudeti Coquand.

Sinonimi.

1862. Crassatella Baudeti Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 290, tav. XIII, fig. 5-7.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo med. dell'Italia merid.* pag. 6 (Atti Soc. ital. scienze nat. Vol. X).
1871. » » Seguenza, *Contrib. alla geol. prov. Mess.* pag. 351.
1876. » » Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Calt.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.
1880. » » Coquand, *Études supplém.* pag. 410.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

La forma molto allungata ed assottigliata alla regione anale fa distinguere benissimo questa specie da altre affini. I modelli sopratutto sono caratterizzati assai bene e si riconoscono a prima giunta.

La crassatella Baudeti è una delle specie più comuni del nostro cretaceo, dove essa raccogliesi sempre sotto forma di modelli, è stato un solo l'esemplare che ho raccolto con parte della conchiglia.

Giacimento. — Il Coquand l'incontrava nel Rotomagiano di Batna e Tebessa in Africa.

Trovasi comunemente a S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà, Magliardo, Valle di Lando, Saittone ed a Caltavuturo.

2. Crassatella dubia n sp.

Tav. VIII, fig. 1, 1 *a*.

Sinonimi.

1876. Crassatella dubia Seguenza, *I fossili del cenom. di Calt.* pag, 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Calt.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo*, pag. 2.

Diagnosi. — *Modulus elongato-trigonus, fortiter inaequilaterus; latere buccali brevi, rotundato; latere anali longe producto, subangulato; margine palleali parum arcuato; umbonibus prominentibus.*

Lunghezza	48.mm	44.mm
Larghezza	34.mm	29.mm
Spessore	19.mm	17.mm

Fui molto indeciso a distinguere questa dalla precedente specie, alla quale somiglia grandemente. Gli esemplari da me studiati sono dei modelli che presentano i seguenti caratteri distintivi; sono più grandi della *C. Baudeti*, di una larghezza proporzionalmente maggiore, di forma un po' meno inequilatera, cogli apici elevati e più prominenti.

Giacimento. — Raccolta a Portella di Falcò ed a Caltavuturo.

3. **Crassatella Desvauxii** Coquand.

Sinonimi.

1862. Crassatella Desvauxii Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 199, tav. XIII, fig. 8 e 9.

Riferisco a questa specie, non senza dubbio, un sol cattivo esemplare.

Giacimento. — Il Coquand la raccoglieva nel Santoniano di Rafana.

Il mio esemplare è di Magliardo.

4. **Crassatella Tenouklensis** Coquand.

Sinonimi.

1862. Crassatella Tenouklensis Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 198, 291, tav. XI, fig. 14 e 15.
1876. » » Seguenza, *I foss. cen. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret.* pag. 2.
1877. » » Id., *Nuov. spec. foss. cret.* pag. 2.

Questa piccola specie si distingue per essere gracile, depressa e molto affine alla *C. Baudeti*, ed alla *C. dubia*.

Giacimento. — Il Coquand la raccoglieva a Tenoukla nel Rotomagiano. Io l'ho raccolta a S. Giorgio ed a Magliardo, trovasi a Caltavuturo.

5. **Crassatella pusilla** Coquand.

Sinonimi.

1862. Crassatella pusilla Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 198 e 290, tav. XI, fig. 12 e 13.

Questa piccola specie è ben distinta specialmente per la carena bene accusata, che porta sulla regione anale.

Giacimento. — Del Rotomagiano di Tenoukla in Africa.

Ho raccolto varî esemplari a Magliardo.

6. **Crassatella minima** n. sp.

Tav. VII, fig. 9, 9*a*.

Sinonimi.

1876. Crassatella minima Seguenza, *I foss. cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Calt.* pag. 2.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret.* pag. 2.

Diagnosi. — *Testa ovato-oblonga subtrigona, multo compressa, inaequilateraque; latere buccali brevi, rotundato-subanguloso; latere anali producto, rotundato; superficie concentrice crasse sulcata, umbonibus parum prominentibus.*

Lunghezza	10.mm	10.mm
Larghezza	8.mm	8.mm
Spessore	4.mm	4.mm

Piccola conchiglia ovato-triangolare, trasversalmente allungata e considerevolmente compressa, siccome fortemente inequilatera. Il lato anteriore molto breve è rotondato, alquanto angoloso; il lato posteriore è allungato, molto, ristretto, quasi angoloso e leggermente carenato. La superficie è segnata da grossi solchi concentrici. Gli omboni sono poco prominenti.

Per la sua picciolezza e compressione, e sopratutto pei grossi solchi concentrici questa specie è assai ben distinta.

Giacimento. — Alcuni esemplari di Caltavuturo.

Genere. CYPRINA Lamarck.

1. Cyprina Picteti (Coquand).

Sinonimi.

1862. Crassatella Picteti Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* p. 199 e 290, tav. XIII, fig. 10 e 11.

L'unico esemplare che rapporto a questa specie risponde esattamente alle figure date dal Coquand; solamente la grandezza ne è alquanto maggiore.

Esaminando questo solo individuo nel cardine ed in tutto il resto sembrami che debbasi rapportare piuttosto al genere *Cyprina*.

Giacimento. — Il Coquand la raccolse a Tenoukla nel piano rotomagiano. L'unico mio esemplare proviene da S. Giorgio.

2. Cyprina Calabra n. sp.

Tav. VIII, fig. 2, 2*a*.

Sinonimi.

1876. Cyprina calabra Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Calt.* pag. 2.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo*, pag. 2.

Diagnosi. — *Modulus elongatus, transversus, subquadrangulus, crassus, parum inflatus; latere buccali inferne rotundato, superne profunde excavato; latere anali elongato, oblique, truncato, carina valida ab apice ad angulum inferum signato; umbonibus prominulis; margine palleali parum curvato.*

Var. B. — *Magis compressa, carina anali obtusiore, umbonibus pauce minus prominulis.*

Lunghezza	60.mm
Larghezza	35.mm
Spessore	26.mm

Varietà. B.

Lunghezza	58.mm
Larghezza	35.mm
Spessore	22.mm

La specie che esamino è molto affine alla precedente, ma è più grande, e si distingue per essere più allungata trasversalmente, più inequilatera, ed un poco convessa sulle valve.

La comparazione degli esemplari dimostra questa specie ben distinta.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio, alla Portella di Falcò, a Caltavuturo. La varietà *B.* rinvenuta a S. Giorgio ed a Magliardo.

3. **Cyprina trapezoidalis** Coquand.

Sinonimi.

1862. Cyprina trapezoidalis Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 201 e 290, tav. XI, fig. 16 e 17.
1867. » » Seguenza, *Sul cretac. med. dell'Ital. mer.* pag. 6 (Atti soc. ital. sc. nat. Vol. X).
1869. » » Id., *Scop. di un lembo di terr. cret.* pag. 3.
1876. » » Id., *I foss. del Cen. di Caltav.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cretac. Caltavuturo,* pag. 2.
1880. » » Seguenza, *Le formaz. terz.* pag. 14.

Belli e conservati ma rari esemplari raccolgonsi di questa specie africana, la quale è molto affine alle due precedenti, ma di esse molto più spessa, e convessa sopra ambe le valve, meno allungata e meno inequilatera della precedente, cogli apici più prominenti e più distanti.

Giacimento. Il Coquand la rinvenne a Tenoukla nel Rotomagiano.

Io la raccolsi a S. Giorgio, ed alla Portella di Falcò, siccome a Magliardo ed a Caltavuturo.

4. **Cyprina obliquissima** n. sp.

Tav. VIII, fig. 3, 3*a*.

Diagnosi. — *Modulus transverse elongatus, valde inaequilaterus, crassus, inflatus; latere buccali brevi, constricto, rotundato; latere anali elongato, lato, rotundato; margine ventrali vix arcuato; umbonibus super regionem anticam incurvatis.*

Lunghezza 52.mm
Larghezza. 36.mm
Spessore 28.mm

L'unico esemplare raccolto è un modello di perfetta conservazione, il quale presenta una certa relazione nella generale forma colla precedente specie, ma la *C. obliquissima* è assai distinta per tutti i caratteri. M'ingegnerò di indicarne i più importanti particolari che la distinguono. La forma generale è più obliqua, più inequilatera niente angolosa, essendo arrotondata sul lato anteriore e sul posteriore, siccome regolarmente convesse sono ambe le valve; le impressioni muscolari anteriori sono più piccole, così anco le posteriori le quali sono poco impresse; un carattere molto rilevante è quello degli omboni, i quali si accartocciano e si dirigono verso la regione boccale incurvandosi su di essa.

Giacimento. — Un solo esemplare alla contrada S. Giorgio.

5. Cyprina Ciofaloi n. sp.

Tav. IX, fig. 1, 1*a*.

Sinonimi.

1876. Cyprina Ciofaloi Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Call.* pag. 2.
1877. » » id., *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo*, pag. 2.

Diagnosi. — *Modulus transverse ovatus, valde inaequilaterus, parum inflatus; latere antico brevi, constricto, rotundato; latere anali lato, rotundato, subanguloso; margine palleali parum arcuato; umbonibus vix prominulis, convexis, rotundatis.*

Lunghezza 44.mm
Larghezza 32,5.mm
Spessore 24.mm

L'unico esemplare offertomi dall'amico prof. S. Ciofalo costituisce la ben distinta specie che ho descritta; essa è affine alla precedente dalla quale distinguesi benissimo per essere più breve, meno rigonfia, e pegli umboni meno prominenti, ottusi e rotondati.

Giacimento. — L'esemplare unico viene da Caltavuturo.

6. Cyprina dilatata n. sp.

Tav. IX, fig. 2, 2*a*.

Diagnosi. — *Modulus ovatus, compressus, subdilatatus; latere buccali brevi, constricto subanguloso; latere anali longo, dilatato, rotundato; margine palleali fortiter arcuato; umbonibus parvis incurvis.*

Lunghezza 47.mm
Larghezza 35.mm
Spessore 21.mm

Questa specie si avvicina alla precedente, ma è compressa, più dilatata alla regione anale; gli umboni sono piccoli, depressi, avvicinati, da essi partono due oscure carene che percorrono la regione posteriore, e due costole appena distinte che si dirigono verso la regione mediana.

Giacimento. — Raccogliesi raramente alla Portella di Falcò ed a Magliardo.

7. Cyprina Africana Coquand.

Sinonimi.

1862. Cyprina Africana Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 202, e 290, tav. XI, fig. 18 e 19.
1869. » » Seguenza, *Scop. di un lembo del cret.* pag. 3 (Atti soc. ital. di scienze nat. vol. XII).

Sono due soli esemplari incompleti che io rapporto a questa specie, ma che pure si distinguono assai bene per la loro proporzionata larghezza, pegli apici prominenti, e per la costola sporgente che scorre dall'umbone all'angolo posteriore.

Giacimento. — Raccolta negli strati del Rotomagiano di Tenoukla. Io l'ho trovata a Magliardo.

8. Cyprina elata n. sp.

Tav. VIII, fig. 4, 4*a*.

Diagnosi. — *Modulus ovato-oblongus, subtrigonus, crassus, inflatus, valde inaequilaterus; latere buccali brevi, constricto, subanguloso; latere anali lato, truncato, subanguloso; margine palleali parum curvato; umbonibus latis, prominentibus, super lunulâ incurvis.*

Lunghezza	60.mm	45.mm
Larghezza	45.mm	35.mm
Spessore	35.mm	26.mm

Questa specie quantunque raccolta in esemplari incompleti, pure si mostra distinta dalle specie affini.

Dalla *C. trapezoidalis* si distingue molto bene per la sua maggior larghezza, pei suoi apici più incurvi e più ravvicinati. Dalla *C. Africana* si separa pegli apici più larghi, più prominenti, più incurvi, pel difetto, ovvero un minimo indizio, della costola o carena che dall'apice scorre sulla regione dorsale; per essere grandemente inequilatera, e pel margine palleale poco curvo.

Giacimento. — Raccolta raramente alla Portella di Falcò presso Ferruzzano.

9. Cyprina inflata n. sp.

Tav. VIII, fig. 5, 5*a*.

Diagnosi. — *Modulus transverse ovato-subtetragonus, valde inflatus; latere buccali brevi, constricto, rotundato; latere anali lato, truncato, anguloso; margine palleali subrecto; umbonibus latissimis, inflatis, valde recurvis, approssimatis.*

Lunghezza	47.mm	49mm
Larghezza	38.mm	37.mm
Spessore	36.mm	

Questa specie è distintissima per la forma quasi tetragona e molto rigonfia; pel brevissimo e stretto lato boccale; pel lato anale molto largo e troncato, lo che lo rende angoloso in alto ed in basso; pel margine palleale pochissimo curvo; ma specialmente distinguesi pegli umboni larghissimi, rigonfi, rotondati e fortemente incurvati verso il cardine, e non già ripiegati sulla lunula, ed inoltre molto ravvicinati.

Giacimento. — Raccolsi due soli esemplari presso la Portella di Falcò territorio di Ferruzzano.

1. Cyprina Brancaleonensis n. sp.

Tav. VIII, fig. 6, 6*a*.

Diagnosi. — *Modulus ovato-subrotundus, inflatus, valde inaequilaterus; latere buccali brevi, rotundato; latere anali lato, rotundato-subanguloso; margine palleali arcuato; umbonibus prominentibus incurvis.*

Lunghezza	52.mm
Larghezza	44.mm
Spessore	32.mm

È un solo esemplare quello che ho descritto col nome di *C. Bràncaleonensis;* esso ha tale forma regolarmente rotondata che si distingue benissimo dalle specie tutte precedentemente qui descritte, ed invece assume tale forma che la ravvicina alla *C. islandica* vivente nei mari del Nord, dalla quale differisce bene per essere più piccola, più rigonfia, cogli apici più sporgenti e più incurvati.

Giacimento. — L' unico esemplare raccolto a S. Giorgio presso Brancaleone è quello descritto e figurato in questa monografia, ma più tardi ne raccolsi uno alla Portella di Falcò ed un altro presso la stessa contrada di S. Giorgio.

Genere. **CYPRICARDIA** Lamarck.

1. **Cypricardia calabra** Seguenza.

Tav. IX, fig. 3, 3*a*.

Sinonimi.

1866. Crassatella calabra Seguenza, *Sulle import. relaz. pal. di talune rocce cretacee* ec. pag. 7, tav. I, fig. 1*a*. 1*b*.
1867. » » id., *Sul cretaceo medio dell'Italia mer.* pag. 6 (Atti soc. ital. sc. nat. vol. X).
1869. » » id., *Scop. di un lembo di terr. cretac.* pag. 3 (Atti soc. ital. sc. nat. vol. XII).
1876. Cypricardia calabra Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Calt.* pag. 3.
1877. » » id., *Nuove spec. foss. cret. Caltav.* pag. 3.

Questa è una delle specie più comuni del nostro cretaceo medio; trovasi abbondantemente sotto forma di modelli in tutti i lembi sinora scoperti. Presso S. Giorgio essa, ben conservata la conchiglia, associata a varie altre specie di fossili, costituisce una roccia che sembra sovrastare a tutta la formazione, e che credo costituisca l'ultimo membro spettante al certo al piano turoniano.

Giacimento. — Trovasi abbondantissima a S. Giorgio, alla Portella di Falcò a Guttà; si raccoglie parimenti a Bova, e nel Messinese a Magliardo, Valle di Lando, Piano di Casso, Saittone, come nel Palermitano presso Caltavuturo.

Nella prima soltanto di queste località trovasi colla conchiglia ben conservata nella sua esteriore forma quantunque spatizzata; nelle altre trovansi soltanto i modelli interni.

2. **Cypricardia Gemmellaroi** n. sp.

Tav. IX, fig. 5, 5*a*.

Diagnosi. — *Testa ovato-trigona, valde inaequilatera, crassa, subinflata; latere buccali brevi, rotundato; latere anali elongato, subcarinato, truncato, obtuso; margine palleali parum arcuato, umbonibus productis, latis, parum curvatis; superficie costis concentricis ornata.*

Lunghezza . . . . 46.^{mm} 45^{mm}, 44^{mm}
Larghezza . . . . 40.^{mm} 39^{mm}, 38^{mm}
Spessore . . . . 28.^{mm} 29^{mm}, 25^{mm}

Questa forma che ho trovato con molta rarità, pare collegarsi colla precedente, e potrebbe invero credersi una varietà di quella; ma pure la *C. Gemmellaroi*, ha

forma che differisce considerevolmente dalla *C. calabra*. Difatti la prima è molto più larga per avere gli apici larghi prominenti, colla carena appena indicata.

Giacimento. — Pochissimi esemplari incompleti raccolti a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò.

3. Cypricardia Meneghinii n. sp.

Tav. IX, fig. 4, 4*a*.

Diagnosi. — *Testa transverse ovata, compressa, valde inaequilatera; latere buccali brevi, rotundato-subanguloso; latere anali elongato rotundato-subanguloso; margine palleali arcuato; umbonibus parvis, brevissimis, arcuatis, rotundatis, postice carinatis; carina prominula super regionem posticam usque ad angulum analem extensam.*

Lunghezza (calcolata)	40.mm
Larghezza	33.mm
Spessore.	20.mm

La *C. Meneghinii* è ben distinta dalla *C. calabra* per essere compressa e di forma ovale, pegli apici non prominenti ma brevi, incurvi, avvicinati. Da qualche residuo che si osserva sui modelli è evidente che la scultura della conchiglia dovea presentare delle costole concentriche, le quali sono tali da presentarsi molto più ravvicinate di come sono sulla superficie della *C. calabra*.

Giacimento. — I soli modelli incompleti raccolti sinora sono provenienti da S. Giorgio e da Guttà.

Genere. OPIS Defrance.

1. Opis naviformis n. sp.

Tav. IX, fig. 7, 7*a*, 7*b*.

Diagnosi. — *Testa transversa, crassa, concentrice ac conferte plicata; latere buccali convexo, incurvato; lunula magna, cordata, valde convexa; latere postico valde obliquo, excavato, externe rostrato; margine palleali subrecto.*

Lunghezza	33.mm	33.mm
Larghezza	30.mm	30.mm
Spessore	23.mm	21.mm

Di questa specie possiedo due modelli, di cui uno porta tuttavia una porzione della conchiglia. Essi dimostrano delle affinità con varie specie note, così ad esempio coll'*O. neocomiensis* e coll'*O. sabaudiana* D'Orbigny, ma la specie mia è più obliqua, meno gibbosa, più fortemente rostrata dal lato anale, e cogli apici meno incurvati, ed il carattere più rilevante e molto distintivo si è quello di una grande lunula cordata, prominente e convessissima.

Giacimento. — *L' O. naviformis* è stata raccolta a S. Giorgio.

2. Opis elegans? D'Orbigny.

Sinonimi.

1843. Opis elegans D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crétacés*, tom. III, pag. 55, tav. CCLIV, fig. 4-9.

1850. » » Id., *Prodrom. de pal.* tom. II, pag. 161,

L'unico esemplare che voglio qui riferire è un modello in cattivissimo stato, che non intendo assolutamente rapportare alla specie del D'Orbigny, ma soltanto ravvicinarlo per la forma, essendochè non può determinarsi con sicurezza, e quindi potrebbe spettare a specie affine.

Giacimento. — L' *O. elegans* fu trovata nel Cenomaniano di Francia. Il mio modello è da S. Giorgio.

Genere. **ISOCARDIA** Lamarck.

1. **Isocardia getulina** Coquand.

Sinonimi.

1862. Isocardia getulina Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 210 e 291, tav. X, fig. 1 e 2.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Di questa grande specie ho raccolto due modelli, che si distinguono per la forma loro gibbosa, pegli apici molto prominenti ed incurvati.

Giacimento. — Fu raccolta a Tenoukla nel Rotomagiano.

I miei esemplari a S. Giorgio.

2. **Isocardia aquilina** Coquand.

Sinonimi.

1862. Isocardia aquilina Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const* pag. 209 e 291, tav. IX, fig. 11 e 12.
1876. » » Seguenza, *I foss. del Cen. di Callav.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo*, pag. 3.

I pochi esemplari che rapporto a questa specie sono distintissimi per la forma trigona, gibbosa, appianata sulla regione boccale e cogli apici incurvati fortissimamente sulla regione stessa.

Giacimento. — Il Coquand l'ha trovato a Tenoukla e Batna nel piano rotomagiano.

I miei esemplari sono di S. Giorgio, Magliardo e Caltavuturo.

3. **Isocardia Iubae** Coquand.

Sinonimi.

1862. Isocardia Jubae Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 209 e 291, tav. IX, fig. 13 e 14.

È un solo e cattivo modello che io rapporto con dubbio a questa specie. Dappoichè quantunque esso abbia la poca convessità delle valve caratteristica di questa specie, e i suoi umboni fortemente incurvati e sporgenti sulla regione anteriore, pure essi non lo sono tanto quanto rappresentano le figure del Coquand.

Giacimento. — Il Coquand l'ha raccolto nello strato Santoniano a Refana e Ain-Sabaun.

Il mio esemplare è da Magliardo.

4. **Isocardia nebrodensis** Ciofalo.

Sinonimi.

1876. Isocardia nebrodensis Ciofalo, *Note foss. cret. Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove specie foss. cret. Caltavuturo*, pag. 5, fig. 3 *a*, *b*.

Questa specie distinguesi per la sua forma trasversalmente ovata, e grandemente inequilatera, siccome pei suoi umboni ottusi e che si protendono incurvandosi sulla regione boccale.

Giacimento. — L'unico esemplare raccolto fu rinvenuto presso Caltavuturo nella regione delle Madonie, antiche Nebrodi.

Recentemente rinvenni un altro esemplare a S. Giorgio.

5. **Isocardia diceras** n. sp.

Tav. IX, fig. 6, 6*a*.

Diagnosi. — *Modulus transverse ovatus, valde inaequilaterus, parum inflatus; latere buccali brevissimo, rotundato; latere postico elongato, rotundato; margine palleali arcuato; umbonibus prominentibus, super regionem anticam productis, incurvatisque.*

Lunghezza	37.mm	41.mm
Larghezza	34.mm	33.mm
Spessoro	25.mm	31.mm

Dei tre esemplari che vi riferisco uno è più compresso, ma tutti offrono le seguenti caratteristiche, che ben distinguono questa specie.

La forma ovale arrotondata su tutti i lati e senza angolosità, la convessità moderata e regolare delle valve, gli apici che si protendono molto incurvandosi sulla regione boccale, rendono questa specie molto distinta dalle conosciute.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio ed a Caltavuturo.

6. **Isocardia numida?** Coquand.

Sinonimi.

1862. Isocardia numida Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 209 e 291, tav. IX, fig. 15 e 16.
1876. » » Seguenza, *I foss. cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo*, pag. 3.

Gli esemplari che riferisco a questa specie sono modelli mal conservati, più gibbosi e di maggior grandezza di quelli africani, perlochè dubbiosamente io posso rapportarveli, quantunque convengano negli altri caratteri.

Giacimento. — A Tenoukla nel piano rotomagiano raccoglieva questa specie il Coquand.

Io la trovava a Magliardo e tra i fossili di Caltavuturo.

7. **Isocardia neglecta** Coquand.

Sinonimi.

1862. Isocardia neglecta Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 109 e 291, tav. IX, fig. 18 e 17.

Un solo modello in cattivo stato di conservazione.

Giacimento. — A Tenoukla nel Rotomagiano.

Il mio esemplare è della contrada Saittone.

Fam. CARDIIDI.

Genere. CARDIUM Linneo.

1. Cardium ponderosum n. sp.

Tav. X, fig. 4, 4*a*, 4*b*.

Diagnosi. — *Testa transversa, inaequilatera, gibbosissima, subrotundata, radiatim costata, costis super regionem analem majoribus; interstitiis spinis serialibus ornatis; latere buccali rotundato, superne angulato; latere anali transverso, productiusculo, subrecto, inferne rotundato, subanguloso; umbonibus, prominentibus, gibbosis, incurvis.*

Lunghezza . . . . 86.^{mm} }
Larghezza . . . . 100.^{mm} } approssimative
Spessore . . . . 79.^{mm} }

Questa specie è molto somigliante al *C. Carolinum* D'Orbigny, ma è molto più grande, più trasverso, più inequilatero, cogli apici più gibbosi, più prominenti. La scultura, da quello che vedesi su l'unico modello rinvenuto, risulta da costole più distinte e più prominenti verso la regione anale, che alternano con interstizî nei quali si dispongono regolarmente delle spine.

Giacimento. — L'unico esemplare rinvenuto fu raccolto alla Portella di Falcò nel territorio di Ferruzzano.

2. Cardium giganteum n. sp.

Tav. X, fig. 1, 1*a*, 1*b*.

Sinonimi.

1876. Cardium giganteum Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo*, pag. 3.

Diagnosi. — *Testa magna ovato-cordata, valde inflata, radiatim costata, costarum interstitiis spinosis; latere buccali brevi rotundato; latere anali recto, superne anguloso, inferne rotundato; umbonibus prominentibus incurvis.*

Lunghezza . . . . 104.^{mm}
Larghezza . . . . 80.^{mm}
Spessore . . . . 77.^{mm}

Questa bella e grande specie somiglia al *C. Moutonianum* D'Orbigny, ma ne è distintissima per molti caratteri. E primieramente è molto più grande, più obliqua, più inequilatera, col lato anale molto lungo, rotondato in basso, e che forma un angolo ottuso ben distinto ed assai alto, le costole sono più grosse. Tutti questi caratteri valgono benissimo a distinguere la mia dalla specie del D'Orbigny.

Sono tre gli esemplari di questa grande specie che si sono raccolti.

Giacimento. — Due esemplari raccolti a S. Giorgio ed uno a Caltavuturo.

3. Cardium nebrodense n. sp.

Tav. X, fig. 5, 5*a*, 5*b*.

Sinonimi.

1876. Cardium nebrodense Seguenza, *I foss. del Cen. di Caltavut.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Calt.* pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo.* pag. 3.

Diagnosi. — *Testa ovata, parum inflata, valde inaequilatera, radiatim costata, costis prominentibus, interstiarum minus latis, e papillis rotundatis constitutis; latere buccali brevissimo rotundato; latere anali productiusculo, rotundato, subangulato; umbonibus prominentissimis, gibbosis, super regionem anticam revolutis.*

Lunghezza	33.mm	35.mm	34
Larghezza	26.mm	28.mm	26
Spessore	20.mm	21.mm	22

Conchiglia di forma pressochè ovata poco rigonfia e molto inequilatera, colla superficie ornata di costole che irradiano dall'apice, e sono prominenti, meno larghe degli interstizî ed ornate da papille o tubercoli rotondati disposti in serie; il lato boccale è brevissimo e rotondato, perchè la conchiglia è fortemente inequilatera, il lato anale rotondato un po' prominente e quasi angoloso; gli umboni sono molto prominenti, rigonfi, e rivolti ed inarcati sulla regione anteriore.

Il carattere degli umboni rivolti verso il lato boccale, dà a questa specie un particolare distintivo.

Varietà B *devians* n.

Distinguo così una forma più compressa, cogli umboni maggiormente rivolti verso la regione anteriore, più distintamente angolosa alla regione anale.

Giacimento. — Questa specie non è rara presso Caltavuturo.

4. **Cardium proximum** n. sp.

Tav. X, fig. 3, 3*a*.

Diagnosi. — *Modulus subovatus, parum inflatus vix inaequilaterus; latere buccali arcuato, latere anali subrecto inferne superneque angulato; umbonibus prominulis incurvis.*

Lunghezza	44.mm
Larghezza	37.mm
Spessore	30.mm

Questa specie la conosco per un solo modello, il quale non offre alcun segno di costole; essa somiglia al *C. Cottaldinum* D'Orbigny per la generale conformazione, ma è più allungata, cogli apici più gracili.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio.

5. **Cardium Pauli** Coquand.

Sinonimi.

1862. Cardium Pauli Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constant.* pag. 204, tav. X, fig. 5 e 6.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia mer.* pag. 6.
1869. » » Id., *Scop. di un lembo di terr. cretaceo*, pag. 3.
1876. » » Id., *I foss. del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. Caltavuturo*, pag. 2.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo*, pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa specie che trovasi non rara a caratterizzare il nostro cretaceo è distintissima per la sua forma trigona ed obliquissima.

Giacimento. — Il Coquand la raccolse nel Rotomagiano di Tenoukla.

Io l'ho rinvenuta nel Reggiano a S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà; nel Messinese a Magliardo e nella Valle di Lando, siccome presso Caltavuturo nella provincia di Palermo.

6. Cardium Coquandi n. sp.

Tav. XI, fig. 1, 1 *a*, 1 *b*.

Sinonimi.

1876. Cardium Coquandi Seguenza, *I foss. del Cen. di Callav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret.* pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss.* pag. 3.

Diagnosi. — *Modulus trigonus, parum obliquus, inaequilaterusque, crassus, concentrice plicato-costatus; latere buccali brevi, rotundato-subanguloso; latere anali subrecto, angulato; umbonibus prominentibus vix incurvis; margine palleali vix arcuato.*

Lunghezza	68.mm	53.mm
Larghezza	67.mm	49.mm
Spessore	45.mm	31.mm

Questa bella specie è molto affine alla precedente, ma ne è distintissima; meno convessa, meno obliqua, cogli umboni pochissimo curvati, e colla superficie ornata di coste concentriche ben rilevate.

Giacimento. — Questa specie non è rara, ed è stata raccolta a S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà, Magliardo e presso Caltavuturo.

7. Cardium dilatatum n. sp.

Tav. X, fig. 2, 2 *a*.

Diagnosi. — *Modulus rotundato-subtrigonus, parum inaequilaterus et inflatus; latere buccali rotundato; latere anali subrecto, angulato; umbonibus parum prominulis incurvatisque; margine palleali vix arcuato.*

Lunghezza	50.mm
Larghezza	50.mm
Spessore	33.mm

Questa specie somiglia al *C. Coquandi*, quanto alla sua forma generale, ed al grado di spessore; ma distinguesi assai bene per essere più dilatata, di forma più rotondata, pegli umboni poco prominenti e più curvi.

L'unico modello che ho raccolto non presenta indizio di scultura esterna della conchiglia, e molto si avvicina per la conformazione generale al *C. hillanum*; ma più compresso, più dilatato.

Giacimento. — Raccolto a Magliardo.

8. Cardium subaequilaterum Ciofalo.

Sinonimi.

1876. Cardium subaequilaterum Ciofalo, *Note foss. cret. Caltavuluro*, pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove specie foss. cret. Caltavuluro*, pag. 5, fig. 4.

Questa specie è molto affine al *C. Coquandi* per la forma triangolare, ma

differisce notevolmente per essere quasi equilatera, per le prominenti costole concentriche, e pegli umboni ottusi e poco sporgenti.

Giacimento. — Questa specie viene da presso Caltavuturo; io vi rapporto qualche esemplare da S. Giorgio.

9. **Cardium auressense** Coquand.

Sinonimi.

1862. Cardium auressense Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 205 e 291.
1867. » » Seguenza, *Sul cretac. med. dell'Ital. mer.* pag. 6 (Atti soc. ital. sc. nat. vol. X).

Questa specie somiglia anco alla precedente, ma è più rigonfia, cogli omboni più prominenti e colla superficie radiato-costata.

Giacimento. — A Batna nel Rotomagiano. Io l'ho raccolto a S. Giorgio, alla portella di Falcò, a Magliardo.

10. **Cardium Platonis** Coquand.

Sinonimi.

1862. Cardium Platonis Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 205 e 291, tav. X, fig. 11 e 12.

La grande obliquità di questa specie, anch'essa radiato-costata, la distingue benissimo dalle affini.

Io non ho rinvenuto che un solo esemplare non ben conservato.

Giacimento. — Rinvenuta dal Coquand nel Rotomagiano di Tenoukla. Il mio esemplare viene dalla valle di Lando.

11. **Cardium punicum** Coquand.

Sinonimi.

1862. Cardium punicum Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 208 e 291, tav. XI, fig. 10 e 11.
1869. » » Seguenza, *Sul cretaceo med. dell'Ital. mer.* pag. 6 (Atti soc. ital. sc. nat. vol. XII).

La forma transversa, le sue costole elevate distinguono questa dalle specie affini.

Giacimento. Nel Rotomagiano di Tenoukla.

Io ho raccolto qualche esemplare alla contrada S. Giorgio.

12. **Cardium Hillanum** Sowerby.

Sinonimi.

1813. Cardium Hillanum Sowerby, *Min. conch.* t. I, pag. 41, tav. XIV, fig. 1.
1819. » » Lamarck, *Anim. sans vert.* t. VI, pag. 20, n. 13.
1843. » Marticense Matheron, *Catal.* p. 157, tav. XVIII, fig. 5.
1843. » Requienianum Id., *Catal.* pag. 157, tav. XVIII, fig. 6.
1843. » Hillanum D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crétac.* tom. III, pag. 27, tav. CCXLIII.
1850. » » D'Orbigny, *Prod. del pal.* tom. II, pag. 162, n. 341.
1862. » » Coquand, *Pal. et géol. de la prov. de Const.* pag. 292.

Specie ben nota e distinta del cretaceo medio, che porta delle costole concentriche e delle costole radianti sul lato anale.

Giacimento. — Il *Cardium Hillanum* conoscesi nel Cenomaniano d'Inghilterra, Francia, Boemia.

Nel Rotomagiano d'Africa il Coquand lo raccoglieva a Batna, Tenoukla, Aumale.

Io lo conosco ben raro nei nostri terreni; tra i numerosi esemplari della seguente specie ho riconosciuto che taluni appartengono al *C. Hillanum*, essi provengono da S. Giorgio, dalla Portella di Falcò e da Caltavuturo.

13. **Cardium regulare** Coquand.

Sinonimi.

1862. Cardium regulare Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 292 e 205, tav. X, fig. 13 e 14.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo med. dell'Ital. mer.* pag. 6 (Atti soc. ital. sc. nat. vol. X).
1869. » » Id., *Scop. di un lembo di terr. cret.* pag. 3.
1876. » » Id., *I foss. del Cenom. di Calt.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret.* pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret. Caltavuturo*, pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa specie molto comune nel Cenomaniano d'Italia, trovasi raramente colla conchiglia mediocremente conservata, ed invece d'ordinario non s' incontrano che i modelli interni.

Questa specie somiglia alla precedente per la scultura di due forme, ma nella specie del Coquand le costole sono più sottili, la forma poi triangolare, più obliqua, più compressa distinguono eminentemente questa specie africana, la quale inoltre è caratterizzata dagli omboni acuti e molto prominenti.

Giacimento. — Trovasi questa specie a Tenoukla nel Rotomagiano.

Io l'ho raccolto dapertutto: nel Messinese a Magliardo, Valle di Lando, S. Paolo, Saittone, Piano di Casso; nel Reggiano a S. Giorgio, alla Portella di Falcò, a Guttà, nella provincia di Palermo presso Caltavuturo.

Genere. **UNICARDIUM** D'Orbigny.

1. **Unicardium Matheroni** Coquand.

Sinonimi.

1862. Unicardium Matheroni Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 208 e 292, tav. IX, fig. 1 e 2.
1869. » » Seguenza, *Scop. di un lembo di terr. cret.* pag. 3 (Atti soc. it. sc. nat. vol. XII).
1876. » » Id., *I foss. cen. Call.* pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuov. spec. foss. cret.* pag. 3.

L'unico sicuro esemplare che io possiedo è un modello assai ben conservato, il quale non risponde esattissimamente colla figura del Coquand, ma le differenze sono tali che io non saprei distinguerlo da quella specie senza averne nuove e più valide ragioni. Difatti il mio esemplare è molto più grande, la sua trasversale lunghezza è circa di una volta e mezzo quella del tipo. È considerevolmente più rigonfio in modo che acquista una forma proprio globosa, quantunque poi la conformazione

di tutte le parti risponde esattamente, e soltanto le impressioni muscolari si presentano sul modello poco prominenti e meglio risaltate, e sopratutto le posteriori, le quali invece di essere sporgenti sono alquanto incavate. Non credo, come diceva qui avanti, che le enumerate differenze sieno tali da fare disgiungere la forma italiana dall'africana.

Giacimento. — Il Coquand ritrovava questa bella specie nel Rotomagiano di Tenoukla.

Il mio esemplare è della Portella di Falcò; nella collezione Ciofalo trovasi anco da Caltavuturo.

Fam. CARDITIDI.

Genere. CARDITA Bruguière.

1. **Cardita Forgemolli** Coquand.

Sinonimi.

1862. Cardita Forgemolli Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 199 e 295, tav. XIV, fig. 14, 15.

Rapporto a questa specie due soli modelli, pei quali mi resta tuttavia qualche dubbio. Ma la forma trasversalmente allungata, poco rigonfia, cogli apici sporgenti sino alla direzione del margine anteriore, i segni di costole numerose, fanno ben credere all'esattezza del ravvicinamento.

Giacimento. — Il prof. Coquand ha raccolto questa specie a Tenoukla e Batna nella formazione carentoniana.

I miei esemplari sono, l'uno da S. Giorgio e l'altro dalla contrada Saittone.

2. **Cardita Delettrei** Coquand.

Sinonimi.

1862. Cardita Delettrei Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 200 e 295, tav. XIV, fig. 18 e 19.

Riferisco a questa specie due cattivi esemplari anco dubbî. Pure per la forma romboidale e molto rigonfia, per la natura delle costole, per la gibbosità degli omboni ecc. par che si debbano riferire alla *C. Delettrei.*

Le dimensioni intanto degli esemplari italiani sono molto minori di quelle degli esemplari africani.

Giacimento. — Il Coquand la raccoglieva a Tenoukla e Batna nel Carentoniano.

I miei esemplari sono da Magliardo.

3. **Cardita acuteradiata** n. sp.

Tav. XI, fig. 3.

Diagnosi. — *Testa ovato-rhomboidalis, obliquissima, parum inflata; radiatim costata; costis 18 prominentibus acutis, vix nodulosis, interstitiis multo latioribus disgiuntis; lineis incrementi conspicuis; latere buccali brevissimo, rotundato subangulato; latere postico elongato, dilatato, rotundato-subtruncato, subanguloso, umbonibus prominentibus, super regionem buccalem incurvis.*

Lunghezza 32.mm 34.mm 33.mm
Larghezza . . . . 25.mm 26.mm 26mm.
Spessore 22.mm

Conchiglia ovato-romboidale, fortemente obliqua, ed enormemente inequilatera, non troppo rigonfia; colla superficie ornata di costole che irradiano dagli apici, e sono prominenti, acute, alquanto nodulose, e disgiunte da larghi interstizî, ma più ravvicinate sulla regione anale; le linee di accrescimento sono distinte ed intersecano le costole; il lato boccale è estremamente breve, rotondato con una leggiera angolosità; il lato posteriore allungato, largo è anch'esso rotondato, ma alquanto troncato ed angoloso. Gli omboni sono prominenti e si protendono incurvandosi sulla regione boccale.

Questa specie pei suoi caratteri è distintissima, per la forma si avvicinerebbe alquanto alla *C. dubia* Sow. ma ne è molto più obliqua, e diversissima per la scultura; per quest'ultimo carattere somiglia molto alla *C. Nicaisei* avendo come quella costole acute, rilevate e disgiunte da larghi interstizî, ma la forma della specie del Coquand è molto allungata trasversalmente ed è molto rigonfia.

Giacimento. — Questa distinta specie trovasi specialmente a Guttà, ed anco alla Portella di Falcò.

4. Cardita tetraedra n. sp.

Tav. XII, fig. 2.

Diagnosi. — *Modulus obliquissimus, trapezoidalis, parum inflatus, carina prominente bipartitus; costis radiantibus, tenuibus; latere buccali brevissimo, angulato; latere anali longe producto, truncato, angulato; umbonibus haud prominentibus, parvis.*

Lunghezza 34.mm
Larghezza. 26.mm
Spessore 21.mm

Questa specie è fondata sopra un unico modello assai distinto per la forma, ma che manca di quei dettagli necessarî per una completa descrizione. La sua forma è trapezoidale appunto perchè il margine dorsale, il boccale, l'anale, ed il palleale sono quasi esattamente retti e riuniti da angoli ben distinti, essendo piccoli e non prominenti gli omboni. Da ciascun ombone parte una carena che si estende sino all'angolo opposto, ed è quasi retta, dividendo ciascuna valva in due parti disuguali, che si estendono ai lati della carena quasi appianate e considerevolmente declivi, dimodochè la conchiglia presentasi con quattro facce quasi piane.

Giacimento. — Questo modello viene dalla Portella di Falcò.

Fam. LUCINIDI.

Genere. CORBIS Cuvier.

1. Corbis Tevesthensis Coq.

Sinonimi.

1862. Corbis Tevesthensis Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 204 e 294, tav. XIV, fig. 12 e 13.

Riferisco a questa specie una sola valva incompleta ma ben riconoscibile sulla quale si è fissata una *Exogyra oxyntas* Coq.

Giacimento. — Il sig. Coquand l'ha raccolto nel Rotomagiano di Tenoukla. Il mio esemplare è da S. Giorgio.

2. Corbis globosa n. sp.

Tav. XI, fig. 4, 4 *a*.

Diagnosi. — *Modulus magnus solidissimus, rotundato-globosus, parvm inaequilaterus; latere buccali rotundato; latere anali rotundato; margine grosse crenato, superficie concentrice costata; umbonibus valde inflatis, incurvis.*

Lunghezza 77.mm
Larghezza 70.mm
Spessore 70.mm

Questa specie per la sua forma assai rigonfia, che la rende proprio globosa, è assai distinta. Somiglia alle *C. cordiformis* e *C. striaticosta* D'Orbigny, dalle quali distinguesi specialmente per la forma globosa e pegli umboni enormemente rigonfi ed incurvati.

Giacimento. — Raccogliesi a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò.

Fam. CHELLIIDI.

Genere. KELLIA Turton.

1. Kellia cretacea n. sp.

Tav. XII, fig. 3.

Sinonimi.

1876. Kellia cretacea Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.

Diagnosi. — *Testa transverse ovato-subtetragona, inflata; latere antico subcarinato subtruncatoque; latere anali aequaliter subtruncato; margine palleali parum arcuato; umbonibus inflatis incurvis.*

Lunghezza 11,5.mm
Larghezza 9,6.mm
Spessore . . . . 8.mm (approssimativo)

Questa specie distinguesi appena dalla *K. suborbicularis* (Montagu) vivente nei mari d'Europa. La forma fossile par che differisca per una ottusa carena meglio accusata sulla regione boccale, per essere più angolosa e pressochè quadrangolare, per essere inolte più rigonfia e cogli omboni più larghi, più prominenti, più incurvati.

Giacimento. — L'unico esemplare raccolto sinora fu trovato presso Caltavuturo.

Fam. TRIGONIDI.

Genere. TRIGONIA Bruguière.

1. Trigonia quatriformis n. sp.

Tav. XII, fig. 1.

Sinonimi.

1876. Trigonia quatriformis Seguenza, *I foss. del Cen. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret.* pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.

Diagnosi. — *Testa rotundato-subquadrata, compressa, inaequilatera; tuberculis per series transversas, distantes ornata; latere buccali brevi rotundato, latere anali producto, dilatato, truncato; area anali lata.*

Lunghezza	57.mm	46.mm
Larghezza	54.mm	42.mm
Spessore	26.mm	20.mm

Non possiedo di questa specie che cattivi modelli, i quali conservano pure gl'indizî della scultura della conchiglia, ma sarebbe impossibile dare una minuziosa descrizione specifica. Ciò non ostante la specie è ben distinta per la sua forma rotondato-angolosa, che molto si avvicina alla forma quadrata, per essere molto compressa, per l'aia anale molto larga, e per i tubercoli che formano delle serie oblique molto tra loro distanti.

Questa specie è del gruppo della *T. Daedalea.*

Giacimento. — Raccolta alla Portella di Falcò ed a Caltavuturo.

2. Trigonia Daedalea Parkinson.

Sinonimi.

1811. Trigonia Daedalea Parckinson, *Org. rem.* 3, tav. XII, fig. 6.
1815. » » Sowerby, *Min. Conch.* 1. t. LXXXVIII.
1819. » » Lamarck, *An. sans vert.* t. VI, pag. 63, n. 5.
1828. » » Defrance, *Dict. des sc. nat.* t. LV, pag. 294.
1840. » quadrata Agassiz, *Trigonies*, pag. 27, tav. VI, fig. 7-9.
1843. » Daedalea D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* tom. III, pag. 145, tav. CCXCII.
1850. » » Id., *Prod. de pal.* tom. II, pag. 161, n. 322.
1854-58. » » Pictet et Renevier, *Descr. des foss. apt.* pag. 92, tav. XII, f. 1 *a*, *b*.

Riferisco con qualche dubbio a questa specie un incompleto modello, il quale soltanto per la forma parmi che si debba rapportare alla *T. Daedalea.*

Giacimento. — Il D'Orbigny riferisce questa specie al Cenomaniano, laddove il Pictet la vuole dell'Aptiano.

È stata trovata in Inghilterra, in Francia, in Svizzera.

Il mio modello è da S. Giorgio.

3. Trigonia scabra Lamarck.

Sinonimi.

1789. Trigonia scabra Bruguière, *Encyclop. méthod.* tav. CCXXXVII, fig. 1.
1819. » » Lamarck, *Amin. sans. vert.* t. VI, pag. 63, n. 2.
1822. » » Brongniart, *Géol. de Paris.* tav. IX, fig. 5.
1828. » » Defrance, *Dict. des sc. nat.* t. LV, pag. 294.
1831. » » Deshayes, *Coq. caract.* pag. 35, tav. XIII, fig. 4, 5.
1840. » » Agassiz, *Trigonies*, pag. 28, tav. X, fig. 1-5.
1850. » » D'Orbigny, *Pal. franç Terr. crétac.* tom. III, pag. 153. tav. CCXCVI.
1869. » » S. Ciofalo, *Descrizione dei fossili di Termini-Imerese*, pag. 11.
1876. » » Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cretaceo medio di Caltavuturo*, pag. 3 (Ann. soc. nat. di Modena. Ser. II, anno. X, fasc. 1°).
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. del cret. Caltavuturo*, pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Sono rari gli esemplari che io rapporto a questa specie, di cui uno quantunque rotto è ben conservato, e ben caratterizzato; gli altri sono in cattivo stato di conservazione.

Giacimento. — Questa specie il D'Orbigny la rapporta dal Turoniano di Francia.

Il Coquand la riferisce dal Mornasiano di Mezab el-Messai.

Io la riconobbi a S. Giorgio, Portella di Falcò, Magliardo ed a Caltavuturo.

4. **Trigonia crenulata** Lamarck.

Sinonimi.

1819. Trigonia crenulata Lamarck, *Anim. s. vert.* t. VI, pag. 63, n. 3.
1828. » » Defrance, *Dict. des sc. nat.* t. LV. pag. 294.
1835. » » Lamarck, *An. s. vert.* 2ª ediz. t. VI, pag. 515, n. 3.
1840. » » Agassiz, *Trigonies*, pag. 32, tav. VI, fig. 4-6.
1843. » » D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* tom. III, pag. 151, tav. CCXCV.
1850. » » Id., *Prodrome de paléont.* tom. II, pag. 161, n. 321.
1862. » » Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 291.

Rapporto a questa specie un bello esemplare, il quale risponde nei suoi caratteri alle figure date dal D'Orbigny, solamente le crenature di talune costole sembrano più distinte, ma bisogna tener conto che le costole sono logore, e quindi la loro scultura non è bene apprezzabile.

Giacimento. — Il D'Orbigny riferisce questa specie al Turoniano di Francia.

Il Coquand la raccoglieva in Africa nel Rotomagiano di Tenoukla e Batna.

Il mio esemplare viene dal territorio di Alì, d'una località che io non conosco, ed era associato alla *Alectryonia syphax* Coquand, ed all'*Exogyra oxyntas* Coquand caratteristiche del Rotomagiano.

5. **Trigonia distans** Coquand.

Sinonimi.

1862. Trigonia distans Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 202 e 290, tav. XII, fig. 9.
1869. » » Seguenza, *Scoperta di un lembo di terr. cretaceo*, pag. 3.
1876. » » Id., *I foss. del Cenom. di Caltavut.* pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cret. medio di Caltavut.* pag. 3.
1877. » » Id., *Nuov. spec. foss. cret.* pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Gli esemplari che riferisco alla specie del Coquand sono alcuni allo stato di modelli, ed altri hanno conservato la conchiglia in cattivo stato. Tra i molti esemplari esaminati alcuni par che abbiano indizî di crenature o di papille sulle costole, lo che accennerebbe a transizione verso qualche altra specie; ma non è possibile dire di più per la cattiva conservazione degli esemplari.

Giacimento. — La specie fu trovata dal Coquand nel Carentoniano di Tenoukla.

Essa non è rara a S. Giorgio, alla Portella di Falcò, a Magliardo ed a Caltavuturo.

6 **Trigonia undaticosta** n. sp.

Tav. XII, fig. 5.

Sinonimi.

1876. Trigonia undaticosta Seguenza, *I foss. del Cen. di Caltavut.* pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cret. med. di Caltavut.* pag. 2.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.

Diagnosi. — *Testa trigona compressa, parum inflata, transversim costata; costis undulatis; latere buccali dilatato, arcuato; latere anali angustato, rostrato; umbonibus prominentibus, acutis, parum incurvis; area anali transversim costata; costis rectis, acutis.*

Larghezza 44.mm
Spessore 28.mm

Questa specie è molto affine alla precedente ma se ne distingue bene per essere compressa, cogli apici prominenti, acuti, poco incurvati, e per le costole undulate.

Giacimento. — Il solo esemplare incompleto che conosco è di Caltavuturo.

Fam. NUCULIDI.

Genere. NUCULA Lamarck.

1. Nucula barcellonensis n. sp.

Tav. XII, fig. 8.

Diagnosi. — *Modulus transversus, ovato-trigonus, compressus, fortiter inaequilaterus, latere buccali brevi, rotundàto-subangulato; latere anali elongato, angustato, sub-rostrato; umbonibus parvis.*

Lunghezza 17.mm
Larghezza. 12.mm
Spessore 6,7.mm

Questa bella specie è assai distinta dalle specie della medesima epoca, non può rassomigliarsi ad alcuna; invece essa molto somiglia a talune specie terziarie e particolarmente si avvicina meglio alla *N. Mayeri* Hoernes per la forma ovato-trigona, ma ne è distintissima per varî particolari. Così la *N. Barcellonensis* è più stretta, di forma più distintamente trigona, colle valve meno convesse, cogli apici più distanti, colla lunula più grande ecc. ecc.

Giacimento. — Un solo esemplare raccolto alla contrada Saittone presso Barcellona (Sicilia).

2. Nucula Luciae n. sp.

Tav. XII, fig. 7.

Diagnosi. — *Testa ovato-trigona, inflata, valde inaequilatera concentrice costellata, costellis regularibus, tenuibus; latere buccali brevissimo, arcuato-subangulato; latere anali elongato, constricto, subangulato; margine palleali parum arcuato; umbonibus super lunulam revolutis; lunula orbiculato-subcordata, magna, convexa, carinata.*

Lunghezza 5,8.mm
Larghezza. 4.mm
Spessore 3.mm

Conchiglia ben piccola di forma ovato-allungata trasversalmente e pressochè triangolare, molto convessa, fortissimamente inequilatera, e concentricamente costellata, le costelle sono quasi regolari e sottili; il lato boccale è molto breve, arcuato e quasi angoloso là dove congiungesi col margine palleale, che è poco curvo;

il lato anale si allunga considerevolmente restringendosi grado grado e divenendo quasi angoloso. Gli omboni sono poco prominenti, arrotondati, fortemente rivoluti sulla lunula, la quale è grande, di forma quasi circolare, cordata, convessa e carinata.

Per tutti i caratteri la bella *N. Luciae* è distintissima, ma specialmente per la forma assai convessa e pei caratteri degli omboni e della lunula.

Nessuna delle specie cretacee descritte dal D'Orbigny si somiglia menomamente a questa, e nessuna di quelle illustrate dai signori Pictet e Campiche.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio presso Brancaleone.

Fam. ARCIDI.

Genere. ARCA Linneo.

1. Arca Delettrei Coquand.

Sinonimi.

1862. Arca Delettrei Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 211 e 290, tav. XV, fig. 5 e 6.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo med. dell'It. mer.* pag. 6 (Atti soc. it. sc. nat. vol. X).
1876. » » Id., *I foss. del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cretaceo medio di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa bella e grande specie è distintissima per la sua forma pressochè trapezoidale e rigonfia, cogli apici bastantemente avvicinati.

È una delle magnifiche specie che caratterizzano il nostro Cenomaniano.

Giacimento. — Il Coquand raccoglieva questa specie nel Rotomagiano di Tenoukla. Nel nostro cretaceo trovasi più tosto comune in Calabria, a S. Giorgio, Portella di Falcò e Bova, fu rinvenuta ancora a Caltavuturo.

2. Arca elegans n. sp.

Tav. XII, fig. 4, 4 *a*.

Diagnosi. — *Testa ovato-subtetragona, parum inflata; latere antico brevi arcuato; latere anali elongato, oblique truncato, obtuseque angulato; superficies concentrice regulariterque sulcato-costata; umbonibus prominentibus, valde approximatis, subcarinatisque, carinis ab apices usque ad angulum posticum obtusis rotundatisque excurrentibus.*

Lunghezza	72.mm	64.mm
Larghezza	63.mm	58.mm
Spessore	42.mm	38.mm

Questa specie si avvicina per l'andamento generale della sua forma alla specie precedente, dalla quale distinguesi assai bene per essere molto meno rigonfia, cogli apici avvicinatissimi, colle carene che percorrono la regione posteriore di ambe le valve tanto ottuse da essere poco percettibili, e sopratutto la caratterizzano assai bene i solchi regolari concentrici che ornano la superficie rendendola come costata concentricamente.

Giacimento. — Trovasi a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò nel Reggiano.

3. **Arca Moutoniana** D'Orbigny.

Sinonimi.

1844. Arca Moutoniana D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* tom. III, pag. 234.
1850. » » Id., *Prod. de pal.* tom. II, pag. 164, n. 386.
1862. » Moutonii Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Const.* pag. 211.
1880. » Moutoniana Id., *Études suppl. sur la pal. algér.* pag. 129.

Questa grande specie trovasi colla precedente nei nostri terreni cretacei della Calabria, essa distinguesi per essere più allungata trasversalmente di quanto lo è la precedente specie, per avere la regione anale più allungata e prominente, siccome per le carene ottuse che percorrono le valve dagli omboni agli angoli posteriori.

Var. *magna* n. Tav. XIII, fig. 1.

Chiamo così una forma molto grande, e rigonfia che trovasi comunemente in varî luoghi di Calabria.

Giacimento — In Francia giace alla base del piano turoniano.

Presso noi è più tosto comune a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò.

4. **Arca Tevesthensis** Coquand.

Sinonimi.

1862. Arca Tevesthensis Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 212 e 291, tav. X, fig. 9 e 10.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Ital. merid.* pag. 6.
1869. » » Id., *Scoperta d'un lembo di Cret. med.* pag. 3.
1880. » » Id., *Le form. terz.* pag. 14.

Questa specie distinta bene dai suoi omboni prominenti, dal suo lato anale lungo, troncato, angoloso e fortemente carenato è una delle più comuni specie del nostro cretaceo medio.

Giacimento. — Il Coquand l'ha raccolto nel Rotomagiano di Tenoukla.

In Italia trovasi quasi da per tutto nel Cenomaniano. Nella prov. di Reggio a S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà. Nella prov. di Messina a Magliardo, Valle di Lando, Saittone ecc.

5. **Arca diceras** n. sp.

Tav. XIV, fig. 1.

Sinonimi.

1876. Arca dicers Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.

Diagnosi. — *Modulus trigono-elongatus, inflatus, valde crassus; latere buccali brevi, subangulato; latere anali truncato, angulato; margine palleali subrecto; umbonibus prominentissimis, incurvis, distantibus, carinatis; carinis validis usque ad angulum posticum decurrentibus, sulcisque fere carinis parallelis.*

Lunghezza	55.mm	51.mm	50.mm
Larghezza	44.mm	39.mm	40.mm
Spessore	48.mm	40.mm	42.mm

Questa specie è molto affine alla precedente e potrebbe anco essere una varietà di quella; ma essa se ne distingue costantemente per essere spessissima, più fortemente carinata sulle valve, cogli omboni prominentissimi e molto tra loro allontanati.

Giacimento. — Questa è anch'essa comune nel nostro Cenomaniano, trovasi nel messinese a Magliardo, Valle di Lando, Saittone; nel Reggiano, a S. Giorgio e Portella di Falcò; alle Madonie presso Caltavuturo.

6. **Arca obliquissima** n. sp.

Tav. XIII, fig. 3.

Sinonimi.

1876. Arca obliquissima Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss.* pag. 3.

Diagnosi. *Modulus trigono-elongatus, depressus, crassissimus, inflatus; latere antico brevissimo arcuato; latere anali elongato, producto, obliquissime truncato, acute angulato; umbonibus prominulis, carinatis, parum propinquis; carinis ab apicem usque ad angulum posticum validissimis excurrentibus.*

Lunghezza	66.mm	62.mm
Larghezza	38.mm	42.mm
Spessore	43.mm	55.mm

Questa specie è affine anch'essa alle due precedenti, ma è ancor più obliqua e spessissima, lo che la rende proprio depressa. Differisce inoltre pegli apici poco sporgenti.

Var. *lata* n. Tav. XIV, fig. 2.

È una forma molto allargata allorchè si considera dal lato cardinale.

Giacimento. — Questa forma non è rara a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò, e trovasi a Magliardo e presso Caltavuturo.

7. **Arca navis** n. sp.

Tav. XIII, fig. 4.

Sinonimi.

1876. Arca navis Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavut.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note sul cret. medio di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.

Diagnosi. — *Modulus transverse elongatus, obliquissimus, subtrigonus, valde inaequilaterus; latere buccali brevissimo, arcuato; latere anali elongato, producto, obliquissime truncato, obtuse angulato; umbonibus parum productis, incurvis, approximatis, carinatisque; carinis validis usque ad angulum posticum excurrentibus.*

Lunghezza	58.mm	43.mm
Larghezza	27.mm	24.mm
Spessore	30.mm	28.mm

L'*Arca navis* è una specie ben distinta per la sua forma molto allungata, obbliquissima, ed estremamente inequilatera, che col lato boccale brevissimo, e curvo, e coll'anale molto allungato, prominente, angoloso e carenato sopra ambo le valve, assume una conformazione naviforme, avendo ancora gli omboni piccoli, incurvi, e ravvicinati. Per tutti i cennati particolari questa specie somiglia considerevolmente alla precedente, dalla quale distinguesi per essere molto meno rigonfia e pegli omboni avvicinati, non lontani tra loro siccome nell' *A. obliquissima*.

Giacimento. — Non è rara a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò; trovasi anco a Caltavuturo.

8. Arca parallela Coquand.

Sinonimi.

1862. Arca parallela Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 213 e 291, tav. XVI, fig. 3 e 4.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia meridionale*, pag. 6.
1869. » » Id., *Scop. d'un lembo di cret. med.* pag. 3.
1880. » » Id., *Le form. terz.* pag. 14.

Questa specie non rara nel nostro cretaceo, di forma pressochè trapezoide, distinguesi dalla precedente per essere più larga, col lato anale molto più breve, cogli omboni più prominenti, e si avvicina per tali caratteri all'*A. Tevesthensis*, la quale è più obliqua, più rigonfia, cogli apici più prominenti e più distinti.

Giacimento. — Il Coquand raccolse questa specie nel Rotomagiano di Tenoukla.

Io la trovai a S. Giorgio alla Portella di Falcò a Guttà: a Magliardo ed alla Valle di Lando.

9. Arca trigona n. sp.

Tav. XII, fig. 6.

Diagnosi. — *Modulus trigonus, transverse elongatus, compressus; latere buccali brevi, arcuato; latere anali elongato, oblique truncato, angulato; margine palleali subrecto; umbonibus prominulis, parum curvatis, propinquis, carinatisque; carinis usque ad angulum posticum excurrentibus; sulcis duobus in regionem analem fere carinis parallelis.*

Lunghezza	53.mm	52.mm	68.mm
Larghezza	34.mm	35.mm	47.mm
Spessore	26.mm	26.mm	37.mm

La mia *A. trigona* distinguesi benissimo dalla precedente alla quale più somiglia per la forma distintamente triangolare e per la sua compressione considerevole, per la quale gli omboni poco s'incurvano e sono molto avvicinati; inoltre le carene sulla regione posteriore sono più distinte.

Giacimento. — Questa specie trovasi comune alla Portella di Falcò ed è stata anco raccolta a S. Giorgio.

10. Arca trapezoides n. sp.

Tav. XIII, fig. 2*b*, 2*c*.

Diagnosi. — *Modulus parvus, trapezoidalis, compressiusculus; latere buccali subtruncato, brevissimo; latere anali longiore, truncato, anguloso; umbonibus parvis.*

Lunghezza	18.mm	18.mm
Larghezza	13.mm	14.mm
Spessore	9.mm	10.mm

La piccola *A. trapezoides* per la sua forma somiglia molto alle due precedenti; la forma generale è dell'*A. parallela*, ma le valve sono appena carenate, o per dir meglio hanno un lieve indizio di carena sulla regione posteriore; somiglia per la considerevole compressione e per gli omboni avvicinati all'*A. trigona*, ma ne differisce per la forma e per le carene.

Var. *inflata* n. Tav. XIII, fig. 2, 2*a*. Forma più rigonfia.

Giacimento. — Due soli esemplari raccolti a Magliardo.

11. **Arca vendinnensis** D'Orbigny.

Sinonimi.

1843. Arca vendinnensis D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* tom. III, pag. 220, tav. CCCXV, fig. 5-7.
1850. » » Id., *Prodr. de pal.* tom. II, pag. 104, n. 375.

I due soli modelli rinvenuti parmi che rispondano bene alla conformazione della nominata specie del d'Orbigny, quantunque non ci traducano niente della reticolata scultura della conchiglia, ma solamente leggieri indizî delle pieghe che sogliono manifestarsi in senso longitudinale sulla regione posteriore del lato anale.

Giacimento. — Il D'Orbigny la riferisce al Turoniano inferiore di Francia.

Io ho raccolto un esemplare a S. Giorgio ed uno ancor migliore alla Portella di Falcò.

12. **Arca indistincta** n. sp.

Tav. XIII, fig. 5.

Diagnosi. — *Testa ovato-oblonga, transversa, parum inflata, concentrice plicato-rugosa, medio depressiuscula, latere buccali brevi, rotundato; latere postico elongato, rotundato-subtruncato, vix carinato, umbonibus depressis, incurvis, approximatis.*

Lunghezza 24.mm
Larghezza 12.mm
Spessore 13.mm

La mia *A. indistincta* è ben prossima all'*A. cenomanensis* D'Orb. dalla quale si separa perchè non porta indizio di linee o di costole radianti, pel lato posteriore meno sporgente, meno obliquamente troncato ecc.

Giacimento. — Un solo esemplare alla contrada S. Giorgio.

13. **Arca obscura** n. sp.

Tav. XIII, fig. 6.

Diagnosi. — *Testa transversim elongata, parum inflata, postice acute carinata, transversim concentrice plicata; latere buccali brevi arcuato; latere anali truncato, angulato; margine palleali subrecto; umbonibus depressis incurvatis, sulco mediano bipartitis.*

Lunghezza 17.mm
Larghezza 8.mm
Spessore 7.mm

Quanto alla forma la mia specie somiglia all'*A. serrata* D'Orbigny, ma ne è distintissima per la mancanza di costole radianti, per essere ancor più allungata trasversalmente, e per la carena più distinta o meglio più acuta.

Giacimento. — Un solo esemplare raccolto a Magliardo.

14. **Arca pholadiformis** D'Orbigny.

Sinonimi

1843. Arca pholadiformis D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* tom. III, pag. 219, tav. CCCXV, fig. 1-3.
1850. » » Id., *Prodrome de pal. strat.* tom. II, pag. 164, n. 374.

Riferisco a questa specie due soli modelli, che riproducono esattamente le forme rappresentate dal D'Orbigny, soltanto uno dei due malconservato si offre più rigonfio e quindi coll'aia cardinale più allargata; tale carattere non parmi sufficiente per allontanare quest' individuo dalla specie accennata.

Giacimento. — Negli strati inferiori del Turoniano trovasi in Francia.

I due miei esemplari li ho raccolti alla contrada Guttà.

15. **Arca tricostata** n. sp.

Chiamo così un incompleto modello, il quale appartiene al gruppo dell'*A. pholadiformis*, anzi sembra molto affine a questa specie, ma non posso descriverla essendochè l'esemplare manca di parti importanti. Il carattere più rilevante è quello di tre costole longitudinali che percorrono l'aia che sta al di là della carena.

Giacimento. — Trovai l'incompleto esemplare alla contrada Magliardo.

Fam. MITILIDI.

Genere. **MODIOLA** Lamarck.

1. **Modiola inornata** n. sp.

Tav. XIV, fig. 3.

Diagnosi. — *Modulus elongatus, rectus, compressus, laevigatus; latere buccali obtuso, angustato, latere anali dilatato, oblique truncato, rotundatoque.*

Lunghezza . . . . 55.mm (approssimata)
Larghezza 20.mm
Spessore 12,5.mm

Fui indeciso molto sul conto di questa specie, essendochè la sua forma è proprio identica a quella del *Mytilus semiornatus* D'Orbigny. Solamente l'unico modello alquanto mutilato che io possiedo è un poco più grande dell'esemplare figurato dal D'Orbigny nella paleontologia francese, è leggermente più dilatato alla regione anale, divenendo così appena concavo il margine palleale; ma il carattere proprio distintivo a me pare che sia la mancanza delle forti strie che affettano la regione dorsale nella *M. semiornata*, e che invece nella mia non si vedono che appena rare linee di accrescimento su tutta la superficie della conchiglia.

Giacimento. — Il mio unico esemplare viene da Magliardo.

2. **Modiola indifferens**? Coquand.

Sinonimi.

1862. Mytilus indifferens Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 213 e 299, tav. XVII, fig. 7 e 8.

1869. » » Seguenza, *Scop. d'un lembo di terr. cret.* pag. 4.

Con grave dubbio riferisco qualche cattivo esemplare a questa specie, molto distinta per la sua particolare conformazione; il carattere che m'induce a tale ravvicinamento è la sporgenza degli omboni al di là del margine boccale, siccome è da considerarsi la ottusa ma distinta carena, che biparte le valve. Il mio esemplare migliore mostrasi intanto più stretto e meno rigonfio.

Giacimento. — Raccolti a S. Giorgio ed a Magliardo.

3. **Modiola pseudo-fittoni** n. sp.

Tav. XIV, fig. 4.

Diagnosi. — *Testa ovato-oblonga, subarcuata, inflata, lineis incrementi prominulis, irregularibus, concentrice signata; latere buccali obtuso, angustato; latere anali dilatato, rotundato-subtruncato; regione palleali subexcavata, magis striata, postice radiatim tenuiter costata.*

Lunghezza 55.mm
Larghezza 25.mm
Spessore 20.mm

Questa specie in varî suoi caratteri somiglia molto alla *M. Fittoni* D'Orbigny (*M. reversus* D'Orb. (non Fitton.) Paleont. franc.) ma ne è distintissima per le seguenti particolarità: Il lato anteriore è ottuso e ristretto, il lato posteriore è invece dilatato; questi due soli caratteri fanno assumere alla conchiglia una conformazione diversissima; inoltre essa è ornata di strie concentriche di accrescimento irregolari e rilevate, le quali sono più ravvicinate e numerose sulla regione palleale, la quale come nella specie del D'Orbigny, è radiato-striata soltanto su d'una porzione. La carena che biparte le valve è ottusa e molto rotondata.

Giacimento. — Il mio migliore esemplare è da S. Giorgio, alcuni altri da Magliardo.

Genere. **LITHODOMUS** Cuvier.

1. **Lithodomus ferruzzanensis** n. sp.

Tav. XIV, fig. 5.

Diagnosi. — *Testa oblonga, convexa, inflata, concentrice lineis incrementi sulcato-striata; latere buccali brevi, dilatato; latere anali elongato-angustato; margine palleali subrecto; umbonibus gibbosis contortis.*

Lunghezza 35.mm
Larghezza 21.mm
Spessore 25.mm

Questa mia specie è molto affine al *L. obtusus* D'Orbigny dal quale si distingue per essere di forma più allungata, ma più rigonfia, in modo che verso gli omboni diviene gibbosa, inoltre il lato anale si restringe di più e maggiormente si allunga; la superficie della conchiglia è solcato-striata per le linee rilevate concentriche di accrescimento.

Giacimento. — Un solo esemplare raccolto a Guttà nel territorio di Ferruzzano.

Fam. AVICULIDI.

Genere. **PINNA** Lister.

1. **Pinna Galliennei** D'Orbigny.

Sinonimi.

1844. Pinna Galliennei D'Orbigny, *Pal. franç. Terr. crét.* tom. III, pag. 253, tav. CCCXXXI.

Riferisco a questa specie un frammento completo d'ambo i lati, quantunque allo stato di modello, esso presenta la sezione che appartiene a questa specie.

Recentemente il prof. P. Mantovani facevami osservare un esemplare ancor migliore che conservasi nelle collezioni dell'Istituto tecnico di Reggio (Calabria).

Giacimento. — Il mio esemplare è da Magliardo, quello dell' Istituto tecnico viene da S. Giorgio.

Il D'Orbigny la raccoglieva nel Turoniano di Francia.

2. **Pinna fragmentaria** n. sp.

Tav. XIV, fig. 6.

Sinonimi.

1876. Pinna fragmentaria Seguenza, *I foss. del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cretaceo medio di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Id., *Nuove specie foss.* pag. 3.

A dire il vero ho denominato così i numerosi frammenti di pinna, che trovansi sparsi abbondantemente nel nostro cretaceo, e che quasi sempre ricuoprono i pezzi di calcare fibroso di cui parlai estesamente nella prima parte di questo lavoro; percui quantunque sia comunemente sparsa, pure non ne conosco che semplici e piccoli frammenti, dai quali ho potuto apprendere i seguenti caratteri. Le valve sono oscuramente carenate nel mezzo, costate longitudinalmente, le costole divengono meno distinte e svaniscono verso il lato anale, il quale è ornato da pieghe arcuate oblique.

Dai caratteri enumerati è evidente che la specie che esamino si somiglia moltissimo alla *P. Renauxiana* D'Orbigny, dalla quale pure differisce per le costole in maggior numero che affettano anco il lato anale intersecandosi colle pieghe trasversali.

Giacimento.— Nelle Calabrie questa pinna trovasi a S. Giorgio, a Falcò, a Guttà. Nel Messinese a Magliardo ed a Saittone. Nella provincia di Palermo a Caltavuturo.

Genere. **AVICULA** Klein.

1. **Avicula gravida** Coquand.

Sinonimi.

1862. Avicula gravida Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 216 e 299, tav. XIII, fig. 17 e 18.
1867. » » Seguenza, *Sul terr. cret. dell'Ital. merid.* pag. 6.
1869. » » Id., *Scoperta di un lembo di terr. cret.* pag. 4.
1880. » » Id., *Le form. terz.* pag. 14.

È questa l'Avicula più comune del nostro cretaceo; pure essa è bastantemente rara. I grandi modelli che io vi riferisco sono ben caratterizzati dalla forma quasi quadrangolare e molto rigonfia, dalla grande disuguaglianza nella convessità delle valve e dalla brevità delle ali.

Giacimento. — Il Coquand l'ha roccolto a Tebessa nel piano mornasiano.

I miei esemplari vengono da S. Giorgio, da Magliardo e dalla valle di Lando.

2. **Avicula atra** Coquand.

Sinonimi.

1862. Avicula atra Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.*
1867. » » Seguenza, *Sul cretac. med. dell'Ital. merid.* pag. 6.

Riferisco a questa specie un solo incompleto esemplare, il quale par che vi appartenga per la grande obliquità del suo margine cardinale, per la convessità delle valve, e per la forma pressochè rombica.

Giacimento. — Il Coquand la raccolse in Africa a Tebessa nel piano mornasiano. Il mio esemplare è da S. Giorgio.

3. **Avicula Delettrei** Coquand.

Sinonimi.

1862. Avicula Delettrei Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constantine,* pag. 226 e 292, tav. XIV, fig. 1 e 2.

Un solo modello in istato assai cattivo, pure riconoscibile per la sua particolare forma dilatata.

Giacimento. — Trovata a Tenoukla nel Rotomagiano.

Il mio esemplare è della Portella di Falcò.

Genere. **GERVILIA** Defrance.

1. **Gervilia consanguinea** n. sp.

Tav. XV, fig. 1.

Sinonimi.

1869. Gervilia ala Seguenza, *Scoperta d'un lembo di terr. cretaceo.* pag. 3. (non Coquand) (Atti soc. it. sc. nat. vol. XII).

Diagnosi. — *Testa dilatata-subtrigona, obliqua, laevigata, parum inflata; latere buccali producto acuminato; latere anali dilatato, flexuoso; margine cardinali recto.*

Lunghezza 88.mm

Larghezza 22.mm

Ho creduto erroneamente di potere associare questa forma alla *G. ala* Coquand, ed invece esaminata più accuratamente essa si mostra molto più affine alla *G. alaeformis* Sowerby, dalla quale si distingue per essere ben poco rigonfia, per avere il lato posteriore non troncato ma col margine flessuoso come nella *G. ala*; ma la espansione molto più estesa di quanto è in questa specie; e la superficie liscia è segnata da esili linee di accrescimento.

Giacimento. — Un esemplare raccolto a Magliardo, sul quale sono varî individui associati insieme in un pezzo di roccia.

2. **Gervilia bicostata** n. sp.

Tav. XIV, fig. 7.

Sinonimi.

1869. Gervilia . . . . . . sp. Seguenza, *Scop. di un lembo di terr. cretaceo*, pag. 4.
1876. » bicostata Id., *I foss. del Cen. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo. *Note sul cretaceo med. di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune nuove specie foss. del cret. medio di Caltavut.* pag. 3.

Diagnosi. — *Testa oblique elongata, lanceolata, subtrigona, bicostata, costis crassis, inflatis, ab umbonibus usque ad marginem posticum divergentibus, superficie concentrice sulcato-striata, liris radiantibus, ad intersetiones striis, granoso-squamosis*

ornata, super regionem pallealem evanescentibus, sed lineis incrementi validioribus; valva altera convexa, altera planata; latere buccali brevissimo angulato; latere anali elongato, oblique truncato, postice biangulato; margine palleali fortiter arcuato.

Lunghezza	40.mm	30.mm
Larghezza	83.mm	70.mm
Spessore	21.mm	19.mm

Conchiglia obliquamente allungata, di forma quasi triangolare, pressochè lanceolata, con una valva convessa e l'altra appianata, entrambe fornite di due costole quasi rette, larghe, prominenti e che si estendono dagli apici acuti e divergono gradatamente sino al margine posteriore, il quale è perciò biangoloso; sulla valva convessa la costola anteriore più rilevata acquista l'andamento d'una vera carena che divide la valva in due porzioni; la superficie della conchiglia è solcata e striata concentricamente e più fortemente sulla regione palleale, è ornata inoltre da linee rilevate che irradiano dagli apici ed intersecandosi colle linee trasversali divengono papilloso-granose nei numerosissimi punti d'intersezione. Il lato boccale della conchiglia è breve ed angoloso; il lato anale obliquamente allungato è troncato posteriormente, e presentasi troncato anco all'estremità formando così due angoli ottusi poco distanti tra loro dove vanno a terminare, sopra ambe le valve, le due costole che le affettano; il margine palleale è fortemente incurvato; gli apici sono prominenti, retti, acuminati.

Questa bellissima Gervilia è poco comune nei nostri terreni, ed or trovasi sotto forma di modello e non di rado colla conchiglia intiera e ben conservata, essa non ci offre somiglianza alcuna colle gervilie della creta che sono quasi tutte levigate, invece essa ha per la forma e per le due costole che presentano le valve una certa somiglianza col *Mytilus Dufrenoyi* D'Orb.

Giacimento. — Più comune raccogliesi a S. Giorgio, trovasi poi alla Portella di Falcò; la raccolsi anco a Magliardo; fu trovata a Caltavuturo.

Genere. **PERNA** Bruguière.

1. **Perna** . . . . sp.?

Un *Ostrea flabellata* porta all' umbone l' impronta del cardine di una *Perna*, non è possibile arguire a quale specie si appartiene.

Genere. **VULSELLA** Lamarck.

1. **Vulsella laeviuscula** n. sp.

Tav. XV, fig. 22 *a*.

Diagnosi. — *Testa transversa, ovata, compressiuscula sub-aequivalvi, concentrice striata; latere buccali brevi arcuato; latere anali elongato, dilatato, anguloso, subtruncato; margine palleali fortiter arcuato; umbonibus obtusis.*

Lunghezza	29.mm
Larghezza.	23.mm
Spessore	12,5.mm

Questa Vulsella è trasversalmente ovata, compressa, quasi equivalve, colla superficie segnata da strie concentriche che sono le linee di accrescimento; il lato anteriore

è breve ed arcuato, il posteriore o anale è allungato, angoloso e quasi troncato; il margine palleale è fortemente incurvato; gli umboni sono ottusi.

L'unico esemplare che ho raccolto è perforato compiutamente da una *Cliona*.

Giacimento. — Il solo esemplare che possiedo viene da Magliardo.

Fam. PETTINIDI.

Genere. **LIMA** Bruguière.

1. **Lima alternicosta** n. sp.

Tav. VII, fig. 3, 3 *a*.

Sinonimi.

1876. Lima alternicosta Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » sp. S. Ciofalo, *Note sul cretac. medio di Caltavut.* pag. 3.
1877. » alternicosta Id., *Di alc. nuov. spec. foss. del cret. di Calt.* pag. 3.

Diagnosi. — *Testa oblique ovata, parum inflata, radiatim costata, costis numerosis, elevatis, angulatis, crenato-granosis, intermediisque costis angustissimis crenato-moniliformibus ornatis; lineis incrementi confertis; latere buccali brevi subtruncato, costisque confertioribus; latere anali elongato-subanguloso, costis confertioribus, parum crenatis minus prominentibus.*

Lunghezza	16,4^{mm}	21.^{mm}	9.^{mm}
Larghezza	12.	15.^{mm}	7.^{mm}

La *L. alternicosta* somiglia per l'andamento delle costole alla *L. Cottaldina* D'Orbigny, ma la mia specie è meno obliqua, ha un numero doppio di costole crenato-granose, le quali alternano con altrettante costole sottili e quasi moniliformi che ne rendono molto elegante la scultura.

Var. *crassicosta* n. Tav. XV, fig. 3 *b*, 3 *c*.

Questa forma differisce per le costole meno acute e quasi rotondate.

Giacimento. — Questa specie trovasi non rara a S. Giorgio, fu raccolta anco a Caltavuturo.

Genere. **PECTEN** Pliny.

1. **Pecten dichotomus** n. sp.

Tav. XV, fig. 4, 4 *a*, 4 *b*.

Sinonimi.

1869. Pecten striato-punctatus Seguenza, *Scop. di un lembo di terr. cret.* pag. 4 (non Roemer).

Diagnosi. — *Testa ovata, compressa, aequivalvis, radiatim striato-punctata; striis confertis, dichotomis, radiantibus, arcuatis, lateralibus valde obliquis; interstitiis concentrice striatis, striis tenuissimis, maioribus raris; auriculis inaequalibus, radiatim transversimque decussatis.*

Lunghezza	36.^{mm}	41.^{mm}
Larghezza	32.^{mm}	37.^{mm}
Spessore	10.^{mm}	

Il *Pecten dichotomus* è una vera forma intermedia tra il *P. striato-punctatus* Roemer, al quale più si avvicina, ed il *P. virgatus* Nilsson. Somiglia al primo per

la grandezza, per la dicotomia costante delle strie, per la forma e la scultura delle orecchie, ma ne è ben distinto perchè di maggiore spessore, pel numero molto più grande delle strie al margine della conchiglia e perciò più strette e più ravvicinate; e ciò avviene specialmente perchè la dicotomia delle strie si fa più sovente nell'età avanzata dell'animale. Inoltre la mia specie differisce perchè le strie sono più inarcate ed ai lati della conchiglia divengono molto curve ed assai oblique, il quale carattere la ravvicina al *P. virgatus*, ma nel *P. dichotomus* la obliquità delle costole laterali è ancor maggiore, e nel centro della conchiglia e verso l'apice le strie si vanno grado grado scancellando siccome nel *P. virgatus*

Questa bella specie cenomaniana è dunque più vicina al *P. striato-punctatus*; ma da essa pure distinta per molti caratteri.

Giacimento. — Il *P. dichotomus* è specie più tosto rara, trovasi nel Messinese a Magliardo ed a Valle di Lando, nel Reggiano a S. Giorgio ed a Portella di Falcò, siccome a Bova.

2. Pecten Calcarae n. sp.

Tav. XV, fig. 5, 5 *a*, 5 *b*.

Diagnosi. — *Testa ovata, depressa, tenuissima, auriculis subaequalibus; superficie tenuissime concentrice striata, praeterea ad marginem; striis arcuatis radiantibus, tenuissimis, confertissimis oculo nudo non conspicuis et quidem superficiem laevissimam videtur.*

Lunghezza 22.mm 15.mm

Larghezza 20.mm 13.mm

Questa specie è affine al *P. fraudator* Zittel ed al *P. occulte-striatus* Zittel, ma è distintissima da entrambi per la uguaglianza delle orecchiette, perchè queste non sono costate, e pella estrema sottigliezza delle strie radianti che hanno d'uopo di una forte lente per esser vedute.

Giacimento. — Raccolti alcuni esemplari a S. Giorgio.

3. Pecten planatus n. sp.

Tav. XV, fig. 6.

Diagnosi. — *Testa valde compressa, subplanata, orbiculato-ovata, concentrice tenuiter striata, radiatim costata, costis inaequalibus, obtusis, parum prominulis, aliisque minoribus intermistis.*

Lunghezza 23.mm

Larghezza 20.mm

Questa specie è fondata sopra una sola valva incompleta, la quale per le strie concentriche e la maniera delle costole mostrasi distinta.

L'unico esemplare raccolto costa d'una sola valva ben conservata per l' incrostazione di uno straterello di calcare fibroso perpendicolarmente alla superficie, il quale è probabilmente dell'arragonite.

Giacimento. — Raccolta alla Portella di Falcò.

4. Pecten Desvauxii Coquand.

Sinonimi.

1862. Pecten Desvauxii Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 218 e 292, tav. XII, fig. 1 e 2.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia meridionale*, pag. 6.
1876. » » Id., *I fossili del Cenoman. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cretaceo medio di Caltavut.* pag. 2.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa grande specie è ben conosciuta per le sue grosse costole, per le strie concentriche ecc.

È questa una specie molto rara nel nostro cretaceo.

Giacimento. — Il prof. Coquand l'ha raccolto nel piano rotomagiano di Tenoukla e Batna.

Il Coquand stesso lo raccoglieva a Caltavuturo, ed io l'ho trovato alla Portella di Falcò.

5. Pecten laevis? Nilsson.

Sinonimi.

1827. Pecten laevis Nilsson, *Petrificata Suecana formationis cretacea.* Pars. I, p. 24, tav. IX, fig. 17.
1837-40. » » Hisinge, *Leth. suecica*, pag. 53, tav. XVII, fig. 7.
1839-42. » » Geinitz, *Characteristik d. Schichtes ec. Petrefacten d. Sachs-Böhm. Kreidegebirges.* pag. 83, tav. XXI, fig. 9.
1846. » » Reuss, *Die Versteinerungen der Boehmichen Kreideform.* pag. 26, tav. XXXVIII, pag. 22 e 23.
1866. » » Zittel, *Die bivalven der Gosaugebilde in den Nordostlichen Alpen*, tom. II, pag. 107, tav. XVII, fig. 4.

Riferisco con dubbio una sola valva a questa specie.

Giacimento. — Raccolto a S. Giorgio.

Genere. IANIRA Schumacher.

1. Ianira quadricostata (Sowerby).

Sinonimi.

1814. Pecten quadricostatus Sowerby, *Min. conch.* pl. LXI, fig. 1, 2.
1862. Ianira tricostata Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 292 e 219, tav. XIII, fig. 3 e 4 (non Bayle).
1865. » quadricostata Briart et Cornet, *Meule de Braquegnies*, pag. 48, tav. IV, fig. 21, 22 (non D'Orbigny).
1866. » » Meneghini, *Studî pal. sulle Ostriche cretacee di Sicilia*, pag. 411 (Atti della soc. ital. di sc. nat. vol. IV).
1867. » tricostata Seguenza, *Sul cret. med. dell'Ital. merid.* pag. 6.
1871. Vola quadricostata Stolizka, *Pelecipoda India*, pag. 430.
1876. Ianira tricostata Seguenza, *I fossili del Cenomaniano di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cretac. medio di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune nuove specie foss. del cret. medio di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » Coquandi Peron, *Bull. de la Soc. Géol. de France*, tom. V, p. 507, tav. VII, fig. 2.
1880. Vola » H. Coquand, *Études suppl. sur la pal. de l'Alg.* pag. 155.
1880. » quadricostata Coquand, *Études suppl. sur la pal. de l'Alg.* pag. 390.
1880. Ianira tricostata Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa bella e caratteristica specie trovasi comunemente in qualche località del nostro cretaceo, essa distinguesi dalla *I. quadricostata* D'Orbigny, che è la *Vola regularis* (Schlotheim) perchè più allungata e per quattro costole più sviluppate.

Giacimento. — Questa *Ianira* caratterizza il Rotomagiano d'Africa dove trovasi a Tenoukla, Batna, Kenchela e ad Auress.

Fu trovata in Francia al vallone di San-Peiré comune di Salazac presso Pont Saint-Esprit (Gard).

Io l'ho raccolto a S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà, Magliardo, Valle di Lando, Saittone. Il prof. Ciofalo la ebbe da Caltavuturo.

Genere. PLICATULA Lamarck.

1. Plicatula radiola? Lamarck.

Sinonimi.

1819. Plicatula radiola Lamarck, *Anim. sans vert.* 6, pag. 185, n. 7.
1843. » » D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* tom. III, pag. 683, tav. CDLXIII, fig. 1-7.
1869. » » Seguenza *Scoperta di un lembo di terr. cret.* pag. 4.

Riferisco a questa specie pochi esemplari in cattivo stato di conservazione e quindi dubbî.

Giacimento. — Questa specie è riportata dal D'Orbigny siccome propria tanto dell'Aptiano, quanto dell'Albiano, gli esemplari di quest'ultimo periodo sono meno obliqui, e tali sono quelli che io ho raccolto a S. Giorgio, alla portella di Falcò ed a Magliardo.

2. Plicatula paucicostata n. sp.

Tav. XV, fig. 7, 7*c*.

Sinonimi.

1875. Plicatula paucicostata Seguenza (M. S).
1877. » » S. Ciofalo, *Su di alcune specie fossili del cretaceo med. di Caltavut.* pag. 3.

Diagnosi. — *Testa oblique ovata, depressa, subaequivalvi, radiatim sex-costata, transversim, concentrice striata, sublamellosa; costis prominentibus, angulatis, rarissime papilloso-subspinosis; latere buccali brevi, rotundato; latere anali productiusculo, elongato-angustato; margine palleali fortiter arcuato, umbonibus obtusis.*

Lunghezza	21.mm	24.mm	18,3.mm	20.mm
Larghezza	16,5.mm	18.mm	17.mm	16.mm
Spessore	6.mm	6,7.mm	5,5.mm	6.mm

Conchiglia obliqua di forma ovata, molto depressa, e quasi equivalve, ordinariamente con sei pieghe o costole alle quali spesso se ne aggiunge alcuna altra assai piccola, e nelle varietà poi divengono dieci o si riducono a quattro, ovvero si scancellano sino a scomparire del tutto; le costole sono elevate più o meno ed angolose, ed offrono delle papille quasi spiniformi rare pressochè equidistanti, circa al numero di sei per ciascuna costola: la superficie tutta delle valve è striata e quasi lamellosa concentricamente. Il lato anteriore breve e rotondato; il lato posteriore

allungato, ristretto, rotondato; il margine palleale è fortemente incurvato; gli apici sono piccoli ottusi.

Var. A. *crassicostata* n. tav. XV, fig. 7 *b*.

Costis quatuor maioribus, obtusioribus.

Var. B. *flabellata* n. tav. XV, fig. 7 *a*.

Costis numerosioribus regularibusque.

Var. C. *ostreiformis* n. tav. XV, fig. 7 *d*.

Costis evanescentibus vel deficientibus.

Questa specie è assai prossima alla *P. radiola*, dalla quale principalmente differisce per essere meno obliqua e pel piccolo numero di costole.

La *P. paucicostata* forma a S. Giorgio una roccia associandosi alla *Cypricardia calabra* ed a varie altre specie; tale roccia occupa la parte superiore della formazione e probabilmente rappresenta in quel luogo il Turoniano.

Giacimento. — Trovasi nel Reggiano a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò; nel Messinese a Magliardo e Valle di Lando; nel Palermitano a Caltavuturo.

3. **Plicatula auressensis** Coquand.

Sinonimi.

1862. Plicatula auressensis Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Const.* pag. 222, e 293, tav. XVI, fig. 14, 15 e 16.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia merid.* pag. 6.
1880. » » Id., *Le form. terz.* pag. 14.

Qualche raro esemplare di questa specie l'ho trovato nel Reggiano, esso è caratterizzato dalla sua forma depressa e rotondata, nonchè dalle sue costole interrotte e dalle strie concentriche.

Giacimento. — Il prof. Coquand l'ha raccolto a Batna nel Rotomagiano.

Io l'ho raccolto a S. Giorgio.

4. **Plicatula Fourneli** Coquand.

Sinonimi.

1862. Plicatula Fourneli Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 220 e 293, tav. XVI, fig. 5 e 6.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Ital. merid.* pag. 6.
1869. » » Id., *Scoperta di un lembo di terr. cretac.* pag. 3.
1880. » » Id., *Le form. terz.* pag. 14.

Belli esemplari e modelli di questa specie s'incontrano nel nostro cretaceo, distinti dalle costole numerose e spinose, e dalle strie che ne ornano gl'interstizî.

Giacimento. — In Africa fu trovata dal prof. Coquand a Tenoukla e Batna nel piano rotomagiano.

In Italia trovasi a S. Giorgio, Falcò, Magliardo, S. Paolo.

5. **Plicatula tenuis** n. sp.

Tav. XVIII, fig. 2.

Diagnosi. — *Testa parva, ovata, depressa, subaequivalvis, radiatim tenuiter multicostata: costis* 16 *tenuibus, interstitiis minoribus, transverse papilloso-la-*

mellosis; lateribus buccali analique subaequalibus, rotundatis; margine palleali fortiter arcuato; umbonibus haud productis, obtusis.

Lunghezza 15.mm
Larghezza 12.mm

Questa specie distinguesi benissimo per la sua forma regolarmente ovale e molto depressa, coi lati boccale ed anale pressochè uguali; per le costole strette, prominenti e molto minori degl' interstizî; inoltre fornite di papille lamelliformi poco discosti che le rendono molto scabre.

Questa specie ha qualche analogia colla *P. radiola* Lamk. quanto alla scultura; ma la nuova specie è piccola, molto meno inequilatera, e differisce anco per le costole che sono più uguali, colle papille più prominenti, poco numerose ec. ec.

Giacimento. — L'unico esemplare raccolto sta aderente all'*Exogyra oxyntas* come rappresenta la figura, e fu raccolto presso Ferruzzano.

Fam. OSTREIDI.

Genere. OSTREA Linneo.

1. Ostrea Delettrei Coquand.

Sinonimi.

1862. Ostrea Delettrei Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 224 e 293, tav. XVIII, fig. 1 a 7.
1867. » » Seguenza, *Sul cretac. med. dell'Ital. merid.* pag. 6.
1869. » » Id., *Scop. di un lembo di terr. cret.* pag. 3.
1869. » » L. Lartet, *Expéd. Luynes. Paleontol.* ec. tav. VIII, fig. 8 e 9.
1869. » » Coquand, *Monographie du genre Ostrea. Terr. crétacé*, pag. 143, tav. XLVI, fig. 16-18; tav. XLVII, fig. 1-6; tav. XLVIII, fig. 1-5.
1869. » » S. Ciofalo, *Descrizione dei fossili di Termini-Imerese e suoi dintorni* p. 10.
1876. » » G. Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cretaceo medio di Caltavuturo*, pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune nuove specie foss. del cret.* ec. pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa bella e distintissima specie, per le sue grosse pieghe radianti, e per le lamelle concentriche rilevate; trovasi con rarità nel cretaceo italiano.

La grande variabilità di questa specie ha fatto istituire le seguenti varietà al prof. Coquand, le quali trovansi tutte anco presso noi di unita ad altre forme.

Var. A. *exogyriformis* Coquand.

Var. B. *gryphoides* Coquand.

Var. C. *ostreiformis* Coquand.

Var. D. *simplex* n. tav. XVI, fig. 1.

Plicis longitudinalibus obsoletis, vel carentibus.

Questa forma è ben distinta per le lamelle prive di quella ondulazione, che loro imprimono le pieghe longitudinali, di cui manca questa varietà.

Var. E. *striata* n. tav. XVI, fig. 1*a*, 1*b*.

Lamellae concentrice, fortiterque striatae.

Forma breve rotondata, superficie ornata da strie concentriche numerose e ben forti, le quali imprimono una speciale caratteristica alla conchiglia.

Voglio qui notare che fui sul punto di descrivere siccome nuova una forma che raccolsi a Magliardo in varî esemplari e che ho dovuto in fine convincermi che deve associarsi a questa specie. Essa è allungata molto e porta le lamelle della valva superiore più ravvicinate.

Giacimento. — Questa specie caratterizza il piano rotomagiano in Africa a Tenoukla, Kenkela, Djebel Auress e Batna nella prov. di Costantina, a Djebel Guessa e Bou-Sauda. Così ancora in Palestina ed al Sinai.

Io l'ho raccolta a S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà, Magliardo, Valle di Lando, Saittone e Caltavuturo, a S. Giovanni di Caccano l'ha rinvenuta il prof. Ciofalo.

Genere. **EXOGYRA** Say.

1. **Exogyra flabellata** Goldfuss.

Tav. XVI, fig. 3; Tav. XVII, fig. 1, 1 *a*, 1 *b*, 1 *c*, 1 *d*.

Sinonimi.

1813. Gryphites carinatus Schlottheim, *Tasc.* t. VII, pag. 74 (non Lamarck).
1819. Gryphaea plicata Lamarck, *Anim. sans vertèbr.* t. VI, pag. 199 (non Sow. non Deshayes).
1834. Exogyra plicata Goldf, *Petref. German.* tav. LXXXVII, fig. 5, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*.
1834. » flabellata Goldfuss, *Petr.* tav. LXXXVII, fig. 6.
1834. » harpa Id., tav. LXXXVII, fig. 7.
1846. Ostrea flabellata D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* t. III, pag. 487, tav. CDLXXV.
1852. » contorta Verneuil et Collomb, *Bull. soc. géol.* t. X, pag. 102 (non D'Archiac).
1862. » flabellata Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Const.* pag. 295.
1864. » plicata G. Meneghini, *Studi paleont.* ec. pag. 416.
1866. » » Seguenza, *Relazioni paleont. int. a talune rocce cret.* pag. 13.
1867. » flabellata Seguenza, *Sul cret. med.* ec. pag. 6.
1869. » flabella Id., *Scoperta di un lembo* ec., pag. 4.
1869. » » Id., L. Lartet, *Expéd. Luynes. Paléont.* tav. VIII, fig. 10-14.
1876. » flabellata Seguenza, *I fossili del Cen. di Caltavut.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note sul cret. med.* pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune nuove specie foss.* ec. pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa bella specie di forma variabilissima e polimorfa in tutti i suoi caratteri si fa pure distinguere facilmente per le numerose transizioni tra le variate sue forme, che ora sono brevi ed ora allungate, più o meno incurvate, con numero e forma variabilissima di costole sino a scomparire quasi intieramente, ecc.

Nel cretaceo italiano questa *exogyra* è una delle specie comunissime e variabilissime, e forma talvolta quasi da se sola la massa principale di certi strati calcarei.

È poi importantissimo notare come l'*E. flabellata* si associa nel nostro Cenomaniano all'*E. Oxyntas* Coq. ed all'*E. Syphax* Coq. siccome io feci precedentemente notare.

Ad accennare e determinare con maggior precisione le forme variate che assume presso di noi questa bella specie ho voluto denominare le seguenti varietà:

Var. A. *trigona* n. tav. XVII, fig. 1 *b*.

Testa depressa, elongato-trigona, regulariter costata.

Var. B. *dilatata* n. tav. XVII, fig. 1, 1 *a*.

Testa magna dilatata, parum inflata, ovato-trigona; costis in utraque valvas numerosis, prominentibus, rotundatis, dichotomis.

Var. C. *gibba* n.

Testa lata, gibba; umboni valvae inferioris valde incurvo; costis paucis, crassis.

Var. D. *crasseplicata* n. tav. XVII, fig. 1 *d*.

Testa plicis paucis, magnis, angulatis.

Var. E. *magna* n.

Testa magna ovato-elongata, gibba, umbonibus involutis.

Var. F. *ecostata* n. tav. XVII, fig. 1 *c*.

Testa elongata, arcuata; valva inferiore distincte carinata, gibba; umbonibus involutis; costis super umbonibus tantum plus minusque distinctis.

Var. G. *semilunata* n. tav. XVI, fig. 3.

Testa ovato-semiorbiculata, depressiuscula, costis tantum super umbonem valvae inferioris.

Tutte queste variate forme e le intermedie incontransi promiscuamente nelle diverse località.

Giacimento. — La *E. flabellata* è specie propria del Cenomaniano. Il prof. Coquand la rapporta al suo piano carentoniano.

Le località dove conoscesi questa specie sono numerose. Essa trovasi in Francia, in Ispagna, in Algeria, al Monte Libano, al Sinai, al deserto arabico.

In Italia in tutte le località del cretaceo medio è comune colle sue diverse varietà.

2. **Exogyra involuta** n. sp.

Tav. XVI, fig. 2, 2 *a*, 2 *b*, 2 *c*, 2 *d*.

Diagnosi. — *Testa elongata, arcuata, gibba, umbonibus magnis, valde involutis; margine buccali concavo, valde flexuoso; margine anali semicirculari; margine palleali producto subtruncato. Valva inferioris gibba, obtuse carinata, carina longitudinali mediana, latere antico concentrice, conferteque, tenuiter costellato, postico radiatim costato, lineisque incrementis plus minusve lamellosis. Valva superioris planato-subconcava, latere anali crassissimo, margine valde lamelloso, transverse plicato; margine buccali tenui; superficie pinnato-costata, parum striato-lamellosa.*

Lunghezza	90.mm	56.mm	55.mm
Larghezza	53.mm	35.mm	36.mm
Spessore	50.mm	35.mm	35.mm

Questa bella specie distinguesi per la sua forma arcuata ed abbastanza lunga, avendo una larghezza pressochè uguale in tutta la sua lunghezza, cogli apici prominenti incurvati e fortemente avvolti a spirale; col margine boccale concavo, assottigliato e fortemente flessuoso come dimostra benissimo la fig. 2 *d*; col margine anale curvo, pressochè in forma di semicerchio; col margine palleale sporgente e quasi troncato. La valva inferiore è convessa, gibbosa e percorsa in tutta la sua lunghezza da una carena mediana ottusa che la divide in due distinte regioni; la regione boccale è concava ed ornata da sottili e ravvicinate costelle rugose, quasi concentricamente

disposte; la regione anale invece convessa è radialmente costata, e le linee di accrescimento sono in forma di lamelle più o meno distinte e sviluppate. La valva superiore è appianata ma sovente alquanto concava; essa è molto spessa dal lato anale dove il margine molto ingrossato è fortemente lamelloso e trasversalmente pieghettato; invece il margine boccale è assottigliato; la superficie poi è poco lamellosa ed offre delle costole disposte in modo pinnato, ma poco sporgenti.

Var. A. *tenuicostata* n. tav. XVI, fig. 2 *b*.

Costis tenuioribus, rugoso-lamellosis, subacutis.

Var. B. *major* n. tav. XVI, fig. 2 *c*, 2 *d*.

Testa magna, costis paucis rotundatis, apicibus maximis.

Questa specie potrebbe a prima giunta credersi una estrema forma dell'*E. flabellata* ma in vero essa ne è distinta per la valva convessa carenata, per le piccole costole e numerose sulla regione boccale, e più ancora per la forma generale della conchiglia, e pei tanti diversi particolari già descritti. La mia specie per la forma si avvicina più alla *E. Boussingaulti* del cretaceo inferiore, ma ne è distinta per le costole bene sviluppate sulla valva piana, pel quale carattere anco diversifica dall'*E. minos* Coq. alla quale somiglia moltissimo.

Dal ch. prof. Zittel ebbi taluni esemplari spettanti a questa specie, che si approssimano meglio alla Var. A., raccolti nel deserto arabico; essi sono più piccoli degli esemplari italiani.

Giacimento. — Giace come dissi nel Cenomaniano del deserto arabico.

Io l'ho raccolta in quasi tutti i lembi del cretaceo medio di Sicilia e di Calabria di unita alla precedente specie.

3. **Exogyra haliotidea** Sowerby.

Sinonimi.

1813. Chama haliotidea Sowerby, *Min. conch.* tav. XXVI (non Lamarck).
1834. Exogyra » Goldfuss, *Petrefacta Germ.* tav. LXXXVII, fig. 1.
1834. Gryphaea » Deshayes, Ed. di Lamarck, t. VII, pag. 208.
1836. » auricularis Deshayes, l. c. tom. VII, pag. 207.
1836. » planospiritis Id., l. c. t. VII, pag. 208.
1845. Exogyra auricularis Reuss, *Bohm. Kreideform.* tav. XXVII, fig. 5, 9, 10; tav. XXXI, fig. 8, 9, 10.
1846. Ostrea haliotidea D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* tom. III, pag. 724, tav. CCCCLXXVIII, fig. 1-4.
1869. » » Coquand, *Monogr du genre Ostrea. Terr. crétacé* pag. 144, tav. L, fig. 8-10; tav. LII, fig. 14-17.
1876. » » Seguenza, *I foss. del Cen. di Caltavut.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note sul cret. med. di Caltavut.* pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune nuove specie foss. del cret. di Caltavut.* pag. 3.
1880. » » H. Coquand, *Études supplem. sur la pal. alg.* pag. 168.

Questa specie largamente fissa, molto depressa ed allargata, senza costole con leggiero indizio di pieghe trovasi molto rara nel nostro terreno cretaceo.

Giacimento. — L' *E. haliotidea* è propria del piano rotomagiano e conoscesi in molti luoghi di Francia, Inghilterra, Germania, Boemia.

Io la conosco da S. Giorgio, Portella di Falcò, Caltavuturo.

4. **Exogyra canaliculata** (Sowerby.)

Sinonimi.

1813. Chama canaliculata Sowerby, *Min. conch.* tav. XXVI, fig. 1 (non tav. CXXXV).
1816. Gryphaea » Id., *Min. conch.* tav. XXVI, fig. 1.
1819. Gryphaea distans Lamarck, *Anim. s. Vert.* t. VI, tav. CXCIX.
1821. Ostraea » Defrance, *Dict.* t. XXII, pag. 26.
1829. Exogyra undata Sowerby, *Min. conch.* tav. DXV, fig. 7-10.
1834. Ostrea lateralis Goldfuss, *Petref. Germ.* tav. LXXXII, fig. 1 (non Nilsson).
1842. Exogyra parvula Leymerie, *Mem.* t. VI, tav. XII, fig. 8 e 9.
1846. Ostrea canaliculata D'Orbigny, *Terr. cret.* tav. CDLXXI, fig. 4-9.
1858. » » Pictet et Roux, *Grès verts*, tav. L, fig. 2.
1869. » » L. Lartet, *Exped. Luynes. Paleont.* tav. VIII, fig. 7.
1869. » » Coquand, *Monographie du genre Ostrea. Terr. crét.* pag. 128, tav. XLVII, fig. 7-10; tav XLV, fig. 13-14; tav. LII, fig. 13; tav. LX, fig. 13-15.
1876. » » Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltavut.* pag. 2.
1877. » » S. Ciofalo, *Su di alcune nuove specie* ecc. pag. 3.

Questa piccola specie è poco comune nel nostro cretaceo, e presenta una forma un po' diversa dalla tipica cioè colle squame o lamelle delle valve più ravvicinate, sopratutto nella valva superiore, ma in tal caso talune di tanto in tanto sono più sporgenti.

Giacimento. — Il Coquand assicura nella sua monografia delle Ostree cretacee che questa specie con lievi modificazioni dal piano albiano, passa al rotomagiano, ed al carentoniano.

Essa è stata raccolta in molte località della Francia, del Belgio, dell'Inghilterra nei varî piani indicati.

Io l'ho riconosciuto a Magliardo, Valle di Lando, Saittone; a S. Giorgio, Falcò, Guttà ed a Caltavuturo.

5. **Exogyra conica** (Sowerby.)

Sinonimi.

1813. Chama conica Sowerby, *Miner. conch.* tav. XXVI, fig. 3.
1813. » recurvata Id., *Min. conch.* tav. XXVI, fig. 2.
1813. » plicata Id., *Min. conch.* tav. XXVI, fig. 4.
1825 Ostrea secunda Bronn, *Systema*, tav. VI, fig. 14 (non Lamarck).
1829. Exogyra conica Sowerby, *Min. conch.* tav. DCV, fig. 1-3.
1829. » laevigata Id., *Min. conch.* tav. DCV, fig. 4.
1834. » undata Goldfuss, *Petref. Germ.* tav. LXXXVI, fig. 10 (non Sowerby).
1834. » subcarinata Munster, Goldfuss, *Petref. Germ.* tav. LXXXV, fig. 4.
1836. Gryphaea conica Deshayes, Edit. Lamarck, tom. VII, pag. 210.
1839. Exogyra plicatula Gein, *Char.* pag. 84 (non Lamarck).
1839. » aquila Id., *Char.* pag. 20 (non Goldfuss).
1839. » cornu-arietis Id., *Char.* pag. 20.
1844. » sinuata D'Archiac, *Bull.* t. III, pag. 336.
1846. Ostrea conica D'Orbigny, *Paléont. crét.* t. III, tav. CDLXXVIII, fig. 5-8; tav. CDLXXIX, fig. 1-3.
1847. Exogyra recurvata D'Archiac, *Tourtia*, pag. 349.
1850. » auricularis Geinitz, *Char.* pag. 20.

1862. Ostrea conica Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 239.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo med. dell'Ital. merid.* pag. 6.
1876. » » Id., *I fossili del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1877. » » Id., *Su di alcune specie fossili del cret. di Caltavut.* pag. 3.

Questa specie levigata, priva di costole, e colla superficie appena lamellosa trovasi molto raramente nel cretaceo dell'Italia meridionale.

Giacimento. — L' *Ostrea conica* è propria del Rotomagiano; essa conoscesi in molti luoghi della Francia, del Belgio, della Germania, della Spagna, dell'Algeria, della Palestina.

Io la conosco di S. Giorgio e di Caltavuturo.

6. **Exogyra africana** (Lamarck).

Sinonimi.

1789. *Encyclopéd. méthod.* tav. CLXXXIX, fig. 5 e 6.
1801. Gryphaea Africana Lamarck, *Système*, pag. 398.
1819. » secunda Id., *Animaux sans vertèbres.* t. VI, pag. 199.
1845. » affinis Calcara, *Cenno sui moll. viv. e foss. della Sicilia*, pag. 18, n. 53.
1852. Ostrea cornu-arietis Coquand, *Géol. et paléont. de Constantine*, tav. V, fig. 3 e 4 (non 1 e 2).
1852. Exogyra densata Conrad, *Desb. See.* tav. XVIII, fig. 102.
1862. Ostrea auressensis Coquand, *Pal. et géol. de Constant.* tav. XXII, fig. 11 e 12.
1864. » turtur Meneghini, *Ostree cretacee di Sicilia*, tav. IV, fig. 2.
1867. » auressensis Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia mer.* pag. 6.
1867. » Matheroniana Fraas, *Aus dem. Orient*, pag. 86.
1869. » Africana Lartet, *Exp. Luines*, *Paléontol.* tav. VIII, fig. 1-6.
1869. » auressensis Seguenza, *Scoperta di un lembo di cret.* pag. 3.
1869. » Africana Coquand, *Monograph. du genre Ostrea. Terr. crétacés*, pag. 134, tav. XXXIX, fig. 5-12; tav. LV, fig. 10, 11 e 12.
1876. » » Seguenza, *I foss. del Cen. di Caltavut.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note sul cretaceo medio di Caltavut.* pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune specie foss. del cretac.* ec. pag. 3.
1880. » » H. Coquand, *Études suppl. sur la paléont. algerienne*, pag. 170.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa specie è molto comune nel Cenomaniano delle provincie meridionali di Italia; essa per la sua forma allungata, per le sue rare lamelle sulla valva convessa, per le lamelle concentriche, rilevate ed avvicinatissime della valva superiore distinguesi benissimo dalle specie affini.

Si presenta insieme alle forme ordinarie, una forma piccola angolosa e quasi carenata che risponde bene alla forma che il prof. Meneghini descrisse col nome di *O. turtur.*

Trovasi più raramente la forma figurata dal Coquand coll'apice appena incurvato, e la conchiglia quasi retta.

Giacimento. — La *E. Africana* caratterizza il piano rotomagiano. Essa conoscesi in molti luoghi della provincia di Costantina, dell'Algeria, della Palestina, del Monte Libano, del Sinai, dell'Egitto, del deserto arabico.

Io la conosco da Magliardo, Valle di Lando, e di S. Paolo, Saittone, Piano di Casso nel Messinese. Trovasi abbondante a S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà, territorio di Bova nel Reggiano. Si è raccolta anco presso Caltavuturo, presso Scillato ed a S. Giovanni di Caccamo.

7. **Exogyra oxyntas** (Coquand.)

Sinonimi.

1845. Ostrea plicata major Calcara, *Moll. viv. e foss. della Sicilia*, pag. 18, n. 55.
1862. » Overwegei Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constantine* tav. XIX, fig. 1-6 (non de Buch).
1864. » cornu-arietis Meneghini, *Ostree cretac. Siciliane*, tav. IV, fig. 1.
1867. » Overwegei Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia mer.* pag. 6.
1869. » » Id., *Scop. di un lembo di cretac.* pag. 2.
1869. » » Coquand, *Monogr. du genre Ostrea. Terr. crétac.* pag. 140, tav. XLIV, fig. 1-9; tav. XLVI, fig. 14-15.
1876. » » Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltavuturo*, pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note sul cret. medio di Caltavut.* pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune nuove specie foss. del cretaceo*, ec. pag. 3.
1880. » oxyntas H. Coquand, *Étud. supp. sur la pal. alg.* pag. 170.
1880. » Overwegei Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa magnifica e distintissima specie è molto comune in Italia, essa distinguesi per la molta convessità della valva inferiore, per l'apice prominente convoluto, per le costole radianti numerose e rilevate.

Nel nostro cretaceo questa specie raccogliesi in belli e conservatissimi esemplari intieri, i quali bene spesso raggiungono grandi proporzioni formando individui giganteschi.

Inoltre la specie nei numerosi esemplari che ci offre, ci presenta distinte varietà che importa di descrivere.

Var. B. *laevigata* Coquand.

Var. C. *rugosa* Coquand.

Var. D. *scabra* Coquand.

Var. E. *costulata* Coquand.

Var. F. *ecostata* n.

Testa laevis, ovato-elongata, ecostata, vel costis ad umbonem tantum vix distinctis.

Var. G. *Italica* n. tav. XVIII, fig. 1 *a*.

Testa magna elongata, costis prominentibus, umbonibus maximis, valde involutis.

Questa forma è assai bella e distinta pegli apici, e specialmente per quello della valva inferiore, che è grandissimo e si avvolge più dell'ordinario.

Var. H. *asperrima* n. tav. XVIII, fig. 1.

Testa magna, gibba, costis prominentibus, interruptis, lamelloso-tuberculato-scaberrimis.

Questa forma è molto comune in Italia e fa passaggio alle altre.

Var. I. *Brancaleonensis* n. tav. XVIII, fig. 1 *b*, 1 *c*.

Testa ovato-subtrigona, valva inferiore convexissima, conferte plicato-costata, concentrice subsquamosa, valva superiore subplana, lamellis concentricis, tenuibus, subundulatis, confertissimis.

Questa varietà è assai ben distinta e potrebbe forse venire specificamente disgiunta dall'*E. Oxyntas* alla quale io credo di rapportarla siccome distintissima

varietà. Difatti essa ha la valva inferiore increspata, sovente con molta irregolarità, da pieghe poco prominenti, ravvicinatissime, interrotte, che irradiano dall'apice e da rare lamelle concentriche; la valva superiore appianata ha le sue lamelle concentriche piccole, sottili, alquanto increspate, ravvicinatissime e numerosissime.

L'*E. oxyntas* con tutte le sue varietà è la specie più abbondante nelle provincie meridionali d'Italia, essa è così profusamente sparsa in talune località, che il suolo trovasi perfettamente coperto, e basta brevissimo tempo per riunirne migliaia di esemplari.

Giacimento. — Questa specie caratterizza il Rotomagiano. Essa trovasi in molte località della provincia di Costantina in Algeria, conoscesi in Francia, in Ispagna, in Tripoli, in Tunisi, in Palestina.

In Sicilia ed in Calabria essa caratterizza tutte le località del cretaceo medio.

8. **Exogyra Trigeri** Coquand.

Sinonimi.

1869. Ostrea Trigeri Coquand, *Monograph. du genre Ostrea. Terr. crét.* pag. 119, tav. LI, fig. 1 e 2.
1880. » » H. Coquand, *Étud. suppl. sur la pa'. de l'Alg.* pag. 169.

Riferisco con qualche dubbio a questa specie un unico esemplare, che parmi con piccole differenze corrispondere alle figure date dal Coquand; difatti la forma elargata, poco convessa, le squame concentriche pieghettate parmi che caratterizzino il mio unico esemplare.

Giacimento. — Il sig. Triger ha scoperto questa specie nel Carentoniano di Mans.

Io ho raccolto il mio unico esemplare alla Portella di Falcò.

9. **Exogyra Overwegi** De Buch.

Sinonimi.

1852. Exogyra Overwegei De Buch, *Monabsl über die Verhandl. der Geselschaft fur Erdkunde zu Berlin.* Band. IX, pag. 54, tav. I, fig. 1.
1854. Ostrea cornu-arietis Coquand, *Géol. de Constantine*, tav. V, fig. 1 e 2 (non fig. 3 e 4) (non Nilsson).
1862. » » Id., *Géol. et pal. de la prov. de Constantine*, pag. 21, fig. 1-3.
1869. » Fourneti Id., *Monographie du genre Ostrea. Terr. crét.* pag. 26, tav. III, tav. XIII, fig. 1.
1880. » Overwegi Id., *Études suppl. sur la pal. alger.* pag. 176.

Riferisco a questa specie un solo esemplare, il quale per la convessità e per le lamelle concentriche della valva inferiore, per l'apice molto avvolto, per la valva superiore un po' concava, lamellosa verso la periferia, parmi non esservi dubbio alcuno intorno alla determinazione specifica.

Intanto non v'ha alcun dubbio che il mio esemplare unico viene dal cretaceo medio, non essendovi il cretaceo superiore in veruna delle contrade del Cenomaniano dell'Italia meridionale; ed intanto la specie del De Buch caratterizza il Dordoniano di Francia e d'Africa.

Trattandosi d'un solo esemplare che io ho raccolto, ed in orizzzonte non proprio, viene naturalmente il dubbio che questo possa essere uno stato anormale di qualche altra specie, come ad esempio dell'*E. oxyntas*.

Giacimento. — Trovata nel Dordoniano di Algeria, della prov. di Costantina, di Siria e di Francia.

Il mio esemplare è stato raccolto a Magliardo.

10. **Exogyra Olisoponensis** Sharpe.

Tav. XVII, fig. 2, 2*a*, 2*b*.

Sinonimi.

1869. Exogyra Olisoponensis Sharpe, *Sec. rocks Portugal*, pag. 155, tav. X, fig. 1 e 2.
1869. Ostrea » Coquand, *Monographie du genre Ostrea. Terr. crét.* pag. 125, tav. XLV, fig. 1-7.
1876. » » Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » Ciofalo, *Note sul cretaceo med. di Caltav.* pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune nuove specie foss. del cret. medio*, pag. 3.
1880. » » H. Coquand, *Étud. suppl. sur la pal. alger.* pag. 189.

Questa specie assai vicina all'*E. oxyntas* si distingue per le costole molto più rade, per la carena sulla valva inferiore, e per la valva superiore quasi intieramente liscia.

Questa specie è anch' essa variabile molto, essendo più o meno allungata e coll'ombone più o meno prominente ed avvolto. Le costole variano ancora e sono più o meno distinte, in modo che dalla forma tipica si fa passaggio alle seguenti varietà:

Var. B. *ecostata* n. tav. XVII, fig. 2.

Testa costis carens vel obsoletis.

Trovasi raramente di unita alla forma tipica.

Var. C. *prominens* n. tav. XVII, fig. 2*a*, 2*b*.

Testa elongata, apex prominens, spiraliter involutus.

La forma più gracile coll'apice molto sporgente ed avvolto a spirale con maggior distinzione ed ampiezza rende questa forma ben distinta.

Giacimento. — Caratterizza il Carentoniano in molti luoghi della Francia, della Spagna, dell'Algeria, del Portogallo, del Mar Morto, della Palestina.

Io l'ho trovato nel Reggiano a s. Giorgio, alla Portella di Falcò, a Guttà; nel Messinese a Magliardo, Valle di Lando, S. Paolo, Saittone; e così presso Caltavuturo nella provincia di Palermo.

11. **Exoyra digitata** (Sowerby)

Sinonimi.

1817. Chama digitata Sowerby, *Min. conch.* tav. CLXXIV, fig. 1 e 2.
1849. Ostrea » Geinitz, *Quad.* pag. 204.
1849. Griphaea » Brown, *Illustr.* tav. LX, fig. 26.
1852. Exogyra » Giebel, *Deutschl.* pag. 339.
1862. Ostrea Coquandi Julien in Coquand, *Pal. Constantine*, tav. XXXIII, fig. 10-12.
1868. » digitata Briart et Cornet, *Meule de Bracquegnies*, tav. IV, fig. 1 e 2.
1869. » » Coquand, *Monogr. du genre Ostrea*, pag. 142, tav. XLI, fig. 6-8.

I rari esemplari di questa specie corrispondono abbastanza bene colle forme tipiche del Coquand, essi sono arrotondati, angolosi, con rare e prominenti costole radianti, concentricamente striati ecc.

Giacimento. — La *E. digitata* caratterizza il Rotomagiano in Francia, Inghilterra, Belgio, Germania ed Algeria.

Io l'ho raccolto a S. Giorgio, e alla Valle di Lando.

12. Exoyra Ratisbonensis (Schlottheim)

Tav. XIX, fig. 1, 1*a*, 1*b*, 1*c*.

Sinonimi.

1768. Knorr, *Petref.* part. II, D. III, tav. LXII, fig. 13.
1789. *Encyclop. Méthod.* tav. CLXXXIX, fig. 3, 4.
1802. Griphaea suborbiculata Lamarck, *Système des An. s. vert.* (nomine derelicto) (non Munster, non Kèferstein).
1813. Gryphites Ratisbonensis Schlottheim, *Min. Tasch.* t. VII, pag. 105.
1819. Gryphaea columba Lamarck, *Anim. s. vert.* t. VI, 198.
1819. » silicea Lamarck, l. c. t. VI, pag. 200.
1819. » plicatula Id., l. c. t. VI, pag. 200.
1819. » plicata Id., l. c. t. VI, pag. 200 (non Bourgnet).
1820. Gryphites suborbiculatus Schlötth, *Petref.* p. 287.
1820. » spiratus Schlötth, *Petref.* pag. 288.
1822. Gryphaea columba Sowerby, *Min. conch.* tav. CCCLXXXIII, fig. 1 e 2.
1822. » » Brongniart, *Envir. de Paris*, tav. VI, fig. 8.
1830. Ostrea columba Deshayes, *Encyclopédie meth.* t. II, pag. 302.
1834. Exogyra » Goldfuss, *Petref. German.* tav. LXXXVI, fig. 9.
1845. » » Reuss, *Böh. Kraid.* tav. XXXI, fig. 1-4.
1845. » plicatula Id., op. cit., tav. XXXI, fig. 5-7.
1846. Ostrea columba D'Orbigny, *Pal. franç. terr. crét.* t. III, tav. CDLXXVII.
1859. » Reaumuri Coquand, *Bull.* t. XVI, pag. 960. — *Charente*, t. II, pag. 107. — *Synopsis*, pag. 51.
1863. Exogyra recurvata Schaf, *Lethaea*, tav. XXXV, fig. 1.
1866. Ostrea columba Zittel, *Biv. Gosau*, tav. XIX, fig. 2.
1867. » Mermeti Seguenza (parte), *Sul cretaceo med. dell'Italia mer.* pag. 6 (non Coquand).
1869. » Ratisbonensis Coquand, *Monogr. du genre Ostrea. Terr. crét.* pag 122, tav. XLV, fig. 8-12.
1876. » columba Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note intorno al cret. di Caltavut.* pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alc. nuove sp. foss.* ec. pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa ben nota specie, caratteristica del cretaceo medio, era stata da me creduta l'*O. mermeti* Coquand; ma studiando i numerosi esemplari raccolti ho dovuto convincermi che trattasi della comune specie, che assume presso di noi piccole forme, conservando le pieghe radianti sulla maggior valva nello stato giovanile. Del resto tutti gli altri caratteri la fanno bene associare all'*O. columba*, che giustamente oggi il Coquand ha proposto di chiamare *O. Ratisbonensis* per la priorità di tale sinonimo.

Questa specie è comune nel nostro cretaceo e d'ordinario costituisce con altre piccole specie un particolare strato, che giace dovunque in alto della serie.

Var. *inflata* n. tav. XIX, fig· 1, 1*a*, 1*b*, 1*c*.

Umbo prominens, magisque involutus.

Questa forma distinguesi dall'ordinaria per essere più rigonfia e per avere l'apice più prominente e più ricurvo.

Giacimento. — Questa specie caratterizza gli strati carentoniani, ed è stata trovata in numerose località di Francia, d'Inghilterra, di Germania, di Russia, di Spagna, di Portogallo, e fin d'Asia.

Io l'ho trovato a S. Giorgio, alla Portella di Falcò, a Guttà ed a Bova, siccome a Magliardo, Valle di Lando, Saittone, Piano di Casso, ed a Caltavuturo.

13. **Exogyra Mermeti** Coquand.

Sinonimi.

1862. Ostrea Mermeti Coquand. *Pal. Constant.* tav. XXIII, fig. 3-5.
1869. » » L. Lartet. *Exp. Luynes. Paléontolog.* tav. VII, fig. 4, 5, 12, 13, 14.
1867. » » G. Seguenza, *Sul cretaceo medio dell' Italia meridionale.* Lettera ecc. pag. 6.

Questa specie è molto affine alla precedente, dalla quale specialmente si distingue per avere l'apice molto più prominente ed allungato ed il contorno angoloso. La valva inferiore molto allargata colla superficie liscia la distingue bene dalla *E. africana*.

Trovasi d'ordinario associata alla precedente ma in Italia è piccola e poco comune.

Giacimento. — L'*E. Mermeti* trovasi secondo il Coquand nel Carentoniano. Fu raccolta a Col-de-Sfa presso Bistira, in Palestina a Aïn Musa presso Monte Nebo, al N-E del Mar morto, a Arak Elmir, a Rajib, al piede delle montagne d'Adjilome et à Wady Mojeb.

Il prof. Zittel la trovava recentemente nei deserti dell'Arabia, notizia attinta da gentili comunicazioni fattemi da lui stesso.

Io l'ho raccolto a S. Giorgio, Falcò e Guttà; siccome in Sicilia, a Magliardo, e nella Valle di Lando.

Genere. **GRYPHAEA** Lamarck.

1. **Gryphaea vesiculosa** (Sowerby)

Tav. XIX, fig. 2, 2*a*, 2*b*, 2*c*.

Sinonimi.

1816. Smith, *Strata ident.* tav. III, fig. 5 e 6.
1823. Gryphaea vesiculosa Sowerby, *Min. conch.* t. VI, tav. CCCLXIX.
1837. Ostrea vesicularis Graves, *Top. geogn. de l'Oise*, pag. 112.
1847. » vasculum D'Archiac, *Tourtia*; tav. XVI, fig. 5.
1849. Gryphaea vesiculosa Brown, *Illustr.* tav. LXI, fig. 8 e 9.
1853. Ostrea vesiculosa Guéranger, *Rep. pal. Sarthe*, pag. 39.
1868. » columba Briart et Cornet, *Meule di Bracquegnies* p. 46.
1869. » vesiculosa Coquand, *Monogr. du genre Ostrea. Terr. crét.* pag. 152, tav. LIX, fig. 4-7.
1880. » » Seguenza; *Le form. terz.* pag. 14.

Questa specie è propriamente assai vicina all' *O. vesicularis*, colla quale confondesi da molti, ma la sua abituale piccolezza, i suoi apici ristretti ed altri particolari ben la distinguono.

Trovasi in grande abbondanza in molti luoghi del cretaceo medio dell'Italia meridionale.

Var. *elongata* n. tav. XIX, fig. 2. 2*a*, 2*b*, 2*c*.

Testa longiore magis arcuata.

Forma più allungata e d'ordinario coll'apice molto incurvato.

Giacimento. — Questa specie secondo il Coqnand caratterizza il Rotomagiano in Francia, in Inghilterra, nel Belgio, in Svizzera, in Boemia, in Palestina, in Siria.

Io l'ho raccolto a Bova, S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà, Magliardo, Valle di Lando, S. Paolo, Saittone.

2. **Gryphaea Baylei** (Gueranger)

Sinonimi.

1827. Ostrea globosa Sharpe, *Quart. Journ. Société,* t. V, pag. 172 (non Sowerby).
1853. » Baylei Guéranger (note inedite).
1859. » » Coquand, *Bull. soc. geolog.* tav. XVI, pag. 961.
1860. » » Id., *Charente,* t. II, pag. 103.
1862. » » Id., *Géol. et pal. de la prov. de Constantine,* pag. 296.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell'Italia merid.* pag. 6.
1869. » » Id., *Scoperta di un lembo di cretaceo* ec. pag. 3.
1869. » » Coquand, *Monogr. du genre Ostrea,* pag. 124, tav. XLVI, fig. 5-9.

Questa specie trovasi più tosto rara presso di noi, associata e confusa colle due precedenti specie, dalle quali distinguesi per la forma elargata e per l'ombone poco sporgente.

Giacimento. — Propria del piano carentoniano. Trovasi in Francia, in Portogallo, in Algeria, in Palestina.

Io l'ho raccolto a Magliardo, Valle di Lando, Saittone, piano di Casso, Bova, S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà.

Genere **ALECTRYONIA** Fischer de Waldheim.

1. **Alectryonia Syphax** (Coquand)

Tav. XIX, fig. 3, 3 *a.*

Sinonimi.

1852. Ostrea Syphax Coquand, *Geol. de Constantine,* pag. 57 tav. IV.
1862. » » Id., *Geol. et paleont. de la prov. de Const.* tav. X, fig. 1-4.
1867. » » Seguenza, *Sul cretac. med. dell'Ital. merid.* pag. 6.
1869. » » Id., *Scoperta di un lembo di cret.* pag. 3.
1869. » » Coquand, *Monogr. du genre Ostrea,* pag. 138, tav. LV, fig. 13; tav. LVI, fig. 1-5; tav. LVIII.
1876. » » Seguenza, *I fossili del Cenom. di Caltav.* pag. 2.
1876. » » S. Ciofalo, *Note sul cret. di Caltav.* pag. 3.
1877. » » Id., *Su di alcune nuov. spec. foss.* pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa bella e distinta specie trovasi talvolta in grandi esemplari nei nostri terreni, dove incontrasi parcamente ma dapertutto. Essa presentasi con una considerevole variabilità essendo più o meno elargata o ristretta, siccome varia ancora nello spessore, nella prominenza e larghezza delle costole ecc.

Var. A. *pectiniformis* n. tav. XIX, fig. 3.

Testa regulariter costata, ovata, auricula distincta.

Forma auricolata colle costole che mostrano una certa apparenza di regolarità.

Var. B. *tuberculata* n. tav. XIX, fig. 3 *a.*

Costis lamelloso-tuberculatis.

Costole irte di prominenze lamelloso-tubercolose.

Giacimento. — Specie caratteristica del piano rotomagiano e trovata in Africa nella provincia di Costantina ed in Tunisi.

Nell'Italia meridionale io la conosco a Magliardo, Valle di Lando, Saittone, piano di Casso, Bova, S. Giorgio, Portella di Falcò, Guttà, Caltavuturo, S. Giovanni di Caccamo.

Fam. ANOMIIDI.

Genere. ANOMIA Linneo.

1. Anomia papyracea D'Orbigny.

Sinonimi.

1847. Anomia papyracea D'Orbigny, *Paléont. franç. Terr. crét.* pag. 755, tav. CDLXXXIX, fig. 7-10.

1850. Anomia papyracea D'Orbigny. *Prodrome de paleontologie* t. II, p. 171, n. 525.

Riferisco a questa specie due esemplari, l'uno rotto, e l'altro quasi completo, i quali per la forma rispondono benissimo alle figure del D'Orbigny, siccome le piccole pieghe concentriche ornano la conchiglia, ma vi sono un po' meno ravvicinate e prominenti.

Giacimento. — Questa specie fu scoperta nel Turoniano di Francia. Io la raccolsi a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò.

2. Anomia papillosa n. sp.

Tav. XV, fig. 8.

Diagnosi. — *Testa parva, tenuis, concentrice, rare, irregulariterque sulcato-lamellosa; lineis paucis, radiantibus, papilloso-granosis ornata.*

Lunghezza 6.mm

Larghezza 5.mm

Questa specie, di cui ho trovato alcuni esemplari aderenti all'*Exogyra Olisoponensis*, distinguesi per varî solchi lamellosi concentrici, e per linee rilevate radianti, ed allontanate, che portano di tanto in tanto una papilla arrotondata.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio.

3. Anomia ornata n. sp.

Tav. XV, fig. 9.

Diagnosi — *Testa transverse ovata, concentrice profunde irregulariterque sulcata; radiatim costata; costarum cum sulcis intersecatione reticulato-subgranosa.*

Larghezza. 19.mm

Lunghezza 15.mm

Questa specie, che mi è nota per una sola impronta, è distinta per la reticolazione prodotta dalle costole radianti, che s'intersecano coi solchi concentrici, e divengono quasi granose nei punti d'incontro.

Giacimento. — L'unico esemplare è della Portella di Falcò.

Classe Brachiopodi.

Fam. DISCINIDI.

Genere. DISCINA Cuvier.

1. **Discina fragilis** Coquand.

Sinonimi.

1861. Orbicula fragilis Coquand, *Géol. et paléont. de la prov. de Constant.* pag. 238, tav. XII, fig. 5.
1880. Discina fragilis Coquand, *Études supplem.* pag. 215.

Riferisco a questa specie qualche esemplare un po' dubbio immerso sulla superficie di un modello di Trigonia, forse la *T. scabra*, ed uno sul modello dell'*Arca Delettrei.*

Giacimento. — Il prof. Coquand raccoglieva questa specie a Tebessa nel piano mornasiano.

I miei esemplari, che sono i soli rappresentanti della Classe, vengono da S. Giorgio e dalla Portella di Falcò.

Classe. Rudisti.

Fam. RADIOLIDI.

Genere. SPHAERULITES Lamarck.

1. **Sphaerulites Nicaisei** Coquand.

Sinonimi.

1862. Radiolites Nicaisei Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constant.* pag. 223, tav. XVII, fig. 12.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.
1880. Sphaerulites Nicaisei Coquand, *Études suppl.* pag. 193.

L'unico esemplare che riferisco a questa bella specie è costituito da due individui insieme associati, precisamente siccome nell'esemplare figurato dal Coquand, al quale risponde con esattezza, dimostrando benanco i caratteri generici interni.

Giacimento. — Il Coquand ha creduto dapprima questa specie santoniana, ma poi si è corretto riconoscendo che essa giace nel piano rotomagiano di Tenoukla, d'Aumale e di Cassis.

Il mio unico esemplare l'ho raccolto a S. Giorgio presso Brancaleone di unita ad una ricca fauna cenomaniana.

2. **Sphaerulites multicostata** n. sp.

Tav. XX, fig. 1, 1*a*.

Diagnosi. — *Testa cilindraceo-conica, compressa, longitudinaliter costata; costis prominentibus, angulatis, inaequalibus, numerosis, aliisque minoribus saepius interpositis, striisque tenuibus, obliquis, regularibus signatis.*

Lunghezza d'un esemplare incompleto	100.mm
Larghezza	65.mm
Spessore	45.mm

Questa grande Radiolite è ben distinta dalle specie conosciute per le numerose costole disuguali, che presentano il margine troncato e quindi con due spigoli, e sono striate finamente ed obliquamente con regolarità.

Giacimento. — Questa specie mi fu data siccome proveniente da Alì; essa fu raccolta insieme alla *Trigonia crenulata,* all'*Exogira flabellata* all'*E. Oxyntas* ed all'*Alectryonia syphax.*

Terzo tipo. ARTROPODI.

Classe. CROSTACEI. — Ordine. OSTRACODI.

Fam. CITERIDI.

Genere. CYTHERE Müller.

1. Cythere reticulato-squamosa n. sp.

Tav. XX, fig. 2, 2*a*.

Diagnosi. — Conchiglia ovato-cuneiforme, dilatata ed arcuata alla regione anteriore, gradatamente ristretta e quasi acuta posteriormente. Ciascuna valva è depressa tutta intorno e protuberante in mezzo in forma di una lunga ed estesa prominenza convessa, allungata e quasi bilobata; la superficie offre una fina reticolazione le cui maglie sono i rialzi attorno leggieri incavi, che divengono più profondi e più sentiti verso il lato superiore, dove una serie più marcata si fa distinguere attorno il rialzo centrale, ma verso la regione anteriore tale scultura per gradazioni passa ad una forma quasi squamosa, il margine anteriore arcuato intiero è cinto d'un rialzo liscio, l'inferiore poco curvo offre quattro dentelli là dove si unisce al margine posteriore, il superiore è quasi crenato per le ondulazioni che offronsi alla superficie.

Lunghezza	0,7.mm
Larghezza	0,4.mm
Spessore	0,35.mm

Questa specie per la sua forma generale ricorda la *C. scabra* del miocene, ma la scultura sopratutto e molti altri particolari la distinguono benissimo.

Giacimento. — Un intiero esemplare raccolto tra i fossili di Anconi.

Genere. CYTHEROPTERON G. O. Sars.

1. Cytheropteron trigonum n. sp.

Tav. XX, fig. 3, 3 *a*, 3 *b*, 3 *c*.

Diagnosi. — Conchiglia di forma ovato-triangolare, acuminata posteriormente, assottigliata ma alquanto ottusa alla regione anteriore; la regione ventrale appianata ed alquanto curva nel senso longitudinale, la dorsale convessa e carenata lungo la linea di commessura, che è fortemente arcuata. Le valve sono strette, levigate, e percorse longitudinalmente da una carena fortemente arcuata, che separa la regione ventrale appianata, dalla dorsale convessa; la carena è sormontata da una lamina

marginale distinta, spessa, trasversalmente rugosa che la percorre senza interruzione in tutta la sua lunghezza.

Lunghezza 0,7.mm
Larghezza. 0,3.mm
Spessore 0,5.mm

Ho rapportato questa specie al genere *Cytheropteron* non senza dubbio, dappoichè la lamina carenale della valva non è troncata verso la regione posteriore siccome accade nelle specie note per formare due vere ali, ma è ben sicuro che, sconoscendosi i caratteri interni, l'abito generale della conchiglia la fa riferire a tal genere.

Alcune delle forme pescate dallo Challenger, come il *C. fenestratum*, convalidano anco meglio le mie idee intorno alla determinazione generica di questa specie.

Giacimento. — Un esemplare completo raccolto nella roccia che aderiva ad un' Ostrea proveniente dalla Portella di Falcò.

Fam. CITERELLIDI.

Genere. **CYTHERELLA** Jones.

1. **Cytherella leopolitana** (Reuss)

Tav. XX, fig. 4, 4 *a*.

Sinonimi.

1850. Cytherina leopolitana Reuss, *Die Foramin. und Entomostrac. des Kreidemergels von Lemberg* pag. 48, tav. V, fig. 3.

Riferisco a questa specie una forma raccolta in Calabria, la quale conviene benissimo coi caratteri rappresentati e descritti dal Reuss, soltanto una tenue differenza io notava negli esemplari calabresi consistente nella posizione alquanto più elevata del maggiore spessore della conchiglia, cioè della gibbosità delle valve. V'ha qualche valva mista alle altre che è di forma più allungata e che si ravvicina perciò alla *C. parallela* Reuss, ma che io riguardo siccome modificazione della *C. leopolitana*.

Giacimento. — Raccolta nella marna aderente ad una *E. oxyntas*; dalla Portella di Falcò presso Ferruzzano.

Quarto tipo. VERMI.

Classe. Anellidi. — Sotto-classe. Chetopodi. — Ordine. Policheti.
Sotto-ordine. Sedentari (Tubicoli)

Fam. SERPULIDI.

Genere. **SERPULA** Linneo.

1. **Serpula filiformis** Sowerby.

Sinonimi.

1811. Vermiculites Parkinson, *Org. Rem.* t. III, tav. 7, fig. 2.
1826. Serpula Socialis Goldfuss, *Petref. Germaniae* t. I, pag. 235, tav. 69, fig. 12.
1826. Serpula gordialis Schlottheim, *Var.* serpentina Goldfuss. *Id.* p. 240, tav. 71, fig. 4.

1836. Serpula filiformis Sowerby, *in Fitton. Trans. of the geol. Soc.* 2ª Serie, tom. IV, pag. 340, tav. XVI, fig. 2.
1845. » » Reuss, *Boehm. Kreideformat.* pag. 20.
1854. » » Pictet et Rénevier, *Foss. terr. aptien de la perte du Rhone* pag. 17, tav. I, fig. 10 a 15.
1866. » » Coquand, *Monograph. de l'étage Aptien ecc.* pag. 11, tav. II, fig. 3.

Quantunque questa specie sia propria del piano aptiano dove è stata raccolta dal Pictet, dal Coquand e da altri, pure i miei esemplari impiantati sopra specie rotomagiane come la *Sphaerulites Nicaisei* Coquand, l'*Exogyra oxyntas* Coq., *l'Arca elegans* ecc. rispondono esattamente nei caratteri assegnati alla specie ed il tubo che li costituisce offresi le tante volte ripiegato ed intralciato, che io non trovo ragione alcuna per crederli di specie diversa.

Giacimento. — Aptiano di Francia, di Svizzera, di Germania, di Spagna, d'Algeria. I miei esemplari sono di S. Giorgio.

Genere. **VERMILIA** Lamarck.

1. **Vermilia? cretacea** n. sp.

Tav. XX, fig. 3.

Diagnosi. — *Testa solida, elongato-attenuata, flexuosa, tota adnata, triquetra, carinata, ad latera convexiuscula, transverse, obsolete, irregulariterque plicata; apertura trigona.*

Riferisco al genere *Vermilia* questa specie non senza dubbio, si sa bene oggi come è difficile definire, anco genericamente, le specie dei Serpulidi dall'esame del solo tubo calcareo.

Questa specie assume appunto una di quelle forme triquetre, che sono numerose e variate nella natura vivente, e le più difficili a definire. Essa costituisce un tubo triquetro, allungato, assottigliato ed intieramente aderente per una faccia, le altre due libere sono convesse alquanto quasi liscie o con leggiere ed irregolari pieghe trasversali, le due facce sono separate da una carena appena sporgente, l'apertura è triangolare.

Giacimento. — Due soli esemplari fissi su d'una *Exogyra flabellata* raccolti a Caltavuturo.

Genere. **PSYGMOBRANCHUS** Philippi.

1. **Psygmobranchus? antiquus** n. sp.

Denomino così alcune impronte lasciate dal tubo di un serpulide di forma cilindracea, che non può essere descritto completamente.

Sono due ostreidi, cioè un *Exogyra olisoponensis* Coquand, ed un *E. Oxyntas* Coquand, che portano tali impronte sul loro ombone, perchè si fissarono sul tubo dell'anellide in quistione. Tali impronte mostrano che il tubo era quasi cilindrico ed un po' assottigliato, e la sua superficie era rugosa per costelle trasverse, irregolari, più o meno prominenti e molto ravvicinate.

Giacimento. — Raccolto a S. Giorgio presso Brancaleone.

Classe. Briozoarii. — Ordine. Stelmatopodi. — Sotto-ordine. Chilostomi.

Fam. MEMBRANIPORIDI.

Genere. **MEMBRANIPORA** Blainville.

1. **Membranipora normaniana** D'Orb. var. *exagona* n.

Tav. XX, fig. 4.

Sinonimi.

1850. Membranipora normaniana D'Orb. *Paléont. française*, tom. V, p. 550, tav. 607, fig. 9, 10.
1850. » » D'Orb. *Prodrome de paleontologie* vol. II, pag. 162.

Questa specie ha le cellule esagonali e ravvicinate in modo quasi regolare, l'apertura è ovato-esagonale più o meno irregolare, col margine rilevato e distinto dai margini delle cellule attigue per mezzo di un solco superficiale ma bene impresso. Essa somiglia molto alla *M. Cypris* ed alla *M. normaniana* del D'Orbigny, ma si distingue da entrambe per la forma più distintamente esagonale delle cellule, pel solco che le disgiunge più largo, e pei rari aviculari. Io ho creduto bene di ravvicinarla a quest' ultima siccome distinta varietà.

Giacimento. — Ne ho trovate molte colonie sull' *E. olisoponensis* Coq. Raccolta a S. Giorgio.

2. **Membranipora longitheca** n. sp.

Tav. XX, fig. 5.

Diagnosi. — Questa specie è distintissima per la forma molto allungata delle cellule, le quali hanno un' apertura di forma ellittica, ma molto allungata, marginata da un cercine rilevato, poco spesso, e separato completamente dai margini così rilevati delle vicine cellule, perchè gli spazi interposti, non molto regolari, sono depressi.

L' esemplare unico da me osservato non ha una bella conservazione, esso è costituito d' una colonia fissa sull' *Ostrea Delettrei.*

Giacimento. — Trovata a Magliardo.

3. **Membranipora elliptica** (Roemer).

Sinonimi.

1840-41. Marginaria elliptica Roemer, *Kreidefor.* pag. 13.
1839-42. » » Geinitz, *Kreid.* pag. 93, tav. XXII, fig. 16.
1838. Cellepora elliptica v. *Hagenon in Bronn's Jahrb.* pag. 268, tav. IV, fig. 6.
1845. Marginaria elliptica Reuss, *Die versteinerungen der Bohem. Kreidef.* pag. 68, tav. XV, fig. 17, 18.
1851 Membranipora elliptica D'Orbigny, *Paléontol. franç.* tom. V, pag. 541.

Le colonie che io rapporto a questa specie corrispondono bene alle figure che ne dà il Reuss, tanto per la forma delle cellule, come per gli aviculari rotondati, e rari.

Questa specie l'ho trovato su d'una varietà molto allungata dell' *Ostrea Delettrei* e sull' *E. oxyntas.*

Giacimento. — Trovata a Magliardo a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò.

Fam. ESCHARIDI.

Genere. LEPRALIA Johnston.

1. Lepralia . . . . sp.?

Rapporto a questo genere i modelli calcarei di due colonie di Briozoi incrostanti, osservati sull'*Arca elegans*; esse mostrano benissimo la disposizione quinconciale delle cellule, le quali hanno forma pressochè rombica e un andamento somigliante in qualchə modo alla *Cellepora Zangis* D'Orb.; ma non è possibile ravvicinarli o rassomigliarli ad una qualunque delle specie conosciute essendochè lo stato di fossilizzazione è molto cattivo, pur non di meno la forma che sembrami la più somigliante è la specie cretacea dal Reuss descritta col nome di *Escharina impressa*.

Giacimento. — Le colonie qui sopra ricordate furono raccolte a S. Giorgio.

Quinto tipo. ECHINODERMI.

Classe. ECHINIDI. — Ordine. REGOLARI.

Fam. DIADEMATIDI.

Genere. MAGNOSIA Michelin.

1. Magnosia Desorii Coquand.

Sinonimi.

1862. Magnosia Desorii Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Const.* pag. 254, tav. XXVII, fig. 13, 14, 15.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo medio dell' Italia meridion.* pag. 6.

L'unico esemplare che da lungo tempo ho riferito a questa specie è più piccolo delle figure che ne dà il Coquand, ma esso risponde nei varî caratteri specifici alla descrizione ed alle figure stesse; così i pori sono trigemini, i tubercoli oltrechè formano delle serie orizzontali i più grossi sono disposti in serie verticali, due nelle aie ambulacrali e quattro nelle interambulacrali.

Giacimento. — Questa specie fu trovata da Coquand a Batna nel Carentoniano. Il mio esemplare fu raccolto nella Valle di Lando presso Barcellona.

Fam. ECHINOCONIDI.

Genere. HOLECTYPUS Desor.

1. Holectypus serialis Deshayes.

Sinonimi.

1847. Holectypus serialis Deshayes in Agassiz et Desor. *Catal. raison des Echin.* (Ann. sc. nat. 3ª ser. t. VII, pag. 146).
1849. » » H. Fournel, *Richess. min. de l'Algérie* t. I, pag. 373, tav. XVIII, fig. 40-42,
1857. » » Desort, *Synopsis des echin. foss.* pag. 174, tav. XXIII, fig. 6-9.

1862. Holectypus serialis Coquand, *Géologie et paléont. de la prov. de Constant.* pag. 255, tav. XXXIII, fig. 14, 15, 16.
1863. » » Cotteau, *Paléont. franç.* tom. VII, pag. 59, tav. 1017, fig. 6-12.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* p. 14.

Riferisco a questa specie un solo esemplare che sembrami rispondere esattamente nei varî caratteri, solamente esso è più grande delle figure che ne dà il Cotteau nella paleontologia francese, ed alquanto più grande delle figure del Coquand.

Giacimento. — I sigg. Fournel e Coquand hanno raccolto questa specie in Africa, a Mezab-el-Messai ed a Batna nello strato mornasiano.

Il sig. Cotteau lo cita a Martigues in Francia, nel piano turoniano.

Il mio esemplare viene da S. Giorgio presso Brancaleone.

Ordine. Spatangoidi.

Fam. SPATANGIDI.

Genere. **EPIASTER** D'Orbigny.

1. **Epiaster Villei?** Coquand.

Sinonimi.

1862. Epiaster Villei Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constant.* pag. 241 tav. XXIV, fig. 10, 11, 12.
1867. » » Seguenza, *Sul cretac. medio dell'Italia merid.* pag. 6.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Un solo grande esemplare io rapporto con molto dubbio a questa specie, perchè trattasi d'un modello in cattivo stato di conservazione, che porta alla sua superficie dei frammenti del guscio.

Giacimento. — Il sig. Ville l'ha raccolto nel piano rotomagiano di Aumale ed a N-E di Dichel-Guessa in Algeria.

Il mio esemplare è da S. Giorgio.

Genere. **HEMIASTER** Desort.

1. **Hemiaster Batnensis** Coquand.

Sinonimi.

1862. Hemiaster Batnensis Coquand, *Géol. et pal. de la prov. sud de Const.* pag. 248, tav. XXVI, fig. 6, 7, 8.
1867. » » Seguenza, *Sul cretaceo med. dell'Ital. merid.* pag. 6.
1869. » » Seguenza, *Scoperta di un lembo di terr. cret.* pag. 3.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Questa specie non è troppo rara nel cretaceo medio italiano.

Tra i varî miei esemplari ve ne ha alcuno più grande e più spesso dell'ordinario, che potrebbe forse essere distinto, ma non è in così buono stato da potersi fare un minuzioso studio dei suoi caratteri tutti.

Giacimento. — Il Coquand lo riferisce al piano mornasiano dove egli l'ha raccolto a Batna, a Tebessa, a Kenchela.

Io l'ho roccolto a S. Giorgio, a Guttà e nella Valle di Lando.

2. Hemiaster gracilis n. sp.

Tav. XX, fig. 6, 6*a*.

Diagnosi. — Conchiglia ovato-oblonga e distinta specialmente per essere molto allungata ed assottigliata verso la regione posteriore, rigonfia, arrotondata anteriormente, appena angolosa ai lati, troncata posteriormente. Convessa dal lato superiore, arrotondata e un poco declive in avanti, elevata posteriormente, colla massima altezza là dove comincia l'area anale che è molto obliqua; colla sommità eccentrica in avanti, circa ai due quinti dal margine anteriore. Lato inferiore convesso. Ano ovale situato molto in alto di un area anale ovato-lanceolata, circondata da prominenze poco sensibili. Ambulacri poco allungati e poco disuguali, disposti in solchi poco profondi e stretti. L'ambulacro imparo è disposto in un solco molto superficiale; degli ambulacri pari i posteriori sono alquanto più brevi.

Questa specie è distinta bene pell' assottigliamento del guscio alla sua parte posteriore e per la grande obliquità della regione posteriore, pei quali caratteri distinguesi dall' *H. Fourneli.*

Lunghezza . . . . 25,5^{mm}
Larghezza . . . . 20,5^{mm}
Altezza . . . . 15,8^{mm}

Giacimento. — Trovato a Saittone e S. Giorgio.

3. Hemiaster ambiguus n. sp.

Diagnosi. — Questa forma è davvero molto dubbia e potrebbe forse riunirsi all' *H. batnensis* a titolo di varietà, dalla quale specie si distingue per essere più alta, più convessa alla parte superiore, e per avere il solco dell' ambulacro impari poco profondo, i quali caratteri costituiscono una forma, che ha un diverso aspetto dalla specie del Coquand, oltrechè è più piccola, e quindi ho creduto di separarnela.

Lunghezza . . . . 33.^{mm}
Larghezza . . . . 29.^{mm}
Altezza . . . . 20,5.^{mm}

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò.

4. Hemiaster ovatus n. sp.

Tav. XX, fig. 7, 7*a*.

Diagnosi. — Conchiglia spessa, rigonfia, ovata, senza angolosità al contorno, poco più lunga di quanto è larga, ristretta o leggermente assottigliata alla regione posteriore, colla maggior larghezza ai due quinti circa della lunghezza; regione superiore molto elevata e convessa, colle aie interambulacrali sporgenti, delle quali l' impari è distintamente carenata; la conchiglia forma una curva molto regolare dall'apice all'area anale, ed è verso la metà di tale curva che trovasi il punto culminante; contorno arrotondato privo di angoli e di seni; troncatura posteriore verticale, sebbene quella superficie è un po' convessa; superficie inferiore considerevolmente convessa colla piastra interambulacrale sporgente; ambulacro imparo situato in un solco largo e molto superficiale, che costituisce perciò un leggiero seno al

margine, le zone porifere risultano da paia di pori ravvicinati e che si aprono ai lati di prominenze granuliformi, allungate; ambulacri pari lunghi, profondi, petaloidi, disuguali, essendo gli anteriori maggiori; zone porifere larghe composte di pori eguali, allungati, di cui ciascun paio è disgiunto dagli altri per mezzo d'una serie irregolare di granuli appena discernibili; peristoma piccolo, pentagono; periprotto ovato, angoloso e quasi acuminato ai due estremi, situato alla parte superiore d'un'area considerevolmente convessa, circoscritta da leggiere nodosità; tubercoli piccoli, maggiori sulla regione inferiore, granuli estremamente fini e disuguali su tutta la superficie, dispersi inegualmente; fasciola peripetala lunga e sinuosa alquanto in dietro e sui lati.

Questa specie somiglia molto alla precedente ma è ancor più convessa, meno angolosa alla periferia, anzi di forma esattamente ovata, cogli ambulacri più stretti più brevi e disposti in escavazioni più superficiali, colla parte più elevata assai vicina al centro e meglio ai $^2/_5$ circa dal margine posteriore.

Lunghezza . . . . 30.^{mm}
Larghezza . . . . 27,5.^{mm}
Altezza . . . . 21.^{mm}

Giacimento. — Si raccoglie a Magliardo ed a S. Giorgio.

5. **Hemiaster Coquandi** Seguenza.

Tav. XX, fig. 8, 8*a*.

Sinonimi.

1866. Epiaster Coquandi Seguenza, *Sulle import. relaz. paleont.* ec. tav. I, fig. 2, *a*, *b*, *c*.
1867. » » Id., *Sul cretaceo med. dell' Ital. merid.* pag. 6.
1880. Hemiaster » Id., *Le form. terz.* pag. 14.
1880. Hemiaster Tenouklensis H. Coquand, *Études supplémentaires* pag. 241.

Questa specie è ben distinta dalle affini per la sua forma angolosa, pentagona, allargata alla parte anteriore; cogli ambulacri larghi, allungati e situati in solchi molto profondi.

Var. *major* n. (Vedi Seguenza, *Sulle importanti relaz. pal.* tav. I, fig. 2).

Una forma considerevolmente più grande del tipo, cogli ambulacri più grandi e più profondi, coll'area interambulacrale impara più distintamente carenata, come le altre più prominenti, costituisce questa distinta varietà.

Giacimento. — Il Coquand ha trovato questa specie a Tenoukla presso Tebessa. Io l'ho raccolto a S. Giorgio, alla Portella di Falcò ed a Saittone.

6. **Hemiaster africanus** Coquand.

Sinonimi.

1862. Hemiaster africanus Coquand. *Géol. et paléont. de la prov. de Const.* pag. 247, tav. XXV, fig. 10, 11, 12.
1880. » » Seguenza, *Le form. terziar.* pag. 14.

Questa specie distinguesi bene dalle affini per la forma rotondata, breve, globosa ed angolosa. È rara nel nostro cretaceo.

Giacimento. — Raccolta dal Coquand nel Carentoniano presso Batna.

Io l'ho raccolto a S. Giorgio, alla Portella di Falcò, ed a Guttà.

7. **Hemiaster Desvauxii** Coquand.

Sinonimi.

1862. Hemiaster Desvauxii Coquand, *Géol. et pal. de la prov. de Constantine* pag. 247, tav. XXVI, fig. 3, 4, 5.

Il mio unico esemplare corrisponde alle figure date dal Coquand.

La forma rotondata ed elevata distingue questa specie dall'*H. batnensis*.

Giacimento. — Trovato a Batna nel piano mornasiano.

Io l'ho da Saittone.

8. **Hemiaster aumalensis** Coquand.

Sinonimi.

1862. Hemiaster aumalensis Coquand, *Géolog. et pal. de la prov. de Const.* pag. 249, tav. XXIV, fig. 9, 10 e 11.
1880. » » Seguenza, *Le form. terz.* pag. 14.

Riferisco a questa specie un solo esemplare non in buono stato.

Giacimento. — Raccolto ad Aumale nel piano rotomagiano.

Il mio esemplare è da S. Giorgio.

9. **Hemiaster globulus** n. sp.

Tav. XX, fig. 9, 9*a*.

Diagnosi. — Guscio spessissimo, e molto rigonfio, di forma ovata al contorno, poco più lungo di quanto è largo, alquanto assottigliato alla regione posteriore dove è troncato colla maggior larghezza ai due quinti circa della lunghezza; regione superiore molto elevata e convessa, colle aree interambulacrali molto sporgenti, di cui l'impari è fortemente carenata e più prominente, verso la metà di tale carena è il punto culminante, che trovasi circa ad un terzo dal margine posteriore; le aie interambulacrali pari presentano ciascuna due angolosità longitudinali, le quali divengono meno sporgenti mano mano che si allontanano dalla regione centrale, e quindi sono poco sensibili al contorno del guscio, che perciò risulta appena, angoloso, quasi regolarmente curvo; la troncatura posteriore è perfettamente appianata e quasi verticale; la superficie inferiore è convessa abbastanza, e porta una placca interambulacrale sporgente; l'ambulacro impari è disposto in un solco più stretto e poco meno profondo degli altri, ma per la sua brevità costituisce un seno poco sensibile al margine; le zone porifere sono formate d'una serie di paia di pori ovato-acuminati; ambulacri pari, profondi, petaloidi, brevi, disuguali, essendo gli anteriori più lunghi degli altri; zone porifere larghe composte di pori eguali, allungati, prive affatto di granuli interposti; peristoma riposto in una depressione abbastanza profondata; periprotto ovato-ellittico, appena angoloso ai due estremi, disposto alla parte superiore di un'area piana, ovato-acuminata, quasi verticale, circoscritta da nodosità; tubercoli piccoli alla parte superiore, più grandi all'inferiore, più ravvicinati alla regione centrale e meglio ancora all'estremità posteriore; granuli disuguali, finissimi ricuoprono tutta la superficie e sono molto ravvicinati, sopratutto

alla regione inferiore; la fasciola peripetala non è molto grande per la brevità degli ambulacri ed offre leggiere sinuosità ai lati e posteriormente, la sua superficie è segnata da una finissima granulazione, ma ben appariscente e molto diversa dal resto, essendo i granuli di differente forma, ugualissimi, estremamente piccoli, ravvicinatissimi e disposti con sorprendente regolarità.

Questa è una distinta specie che somiglia considerevolmente ad una specie ben nota, cioè all'*H. bufo*, per essere molto rigonfia e quasi globosa e per la brevità degli ambulacri, ciò non pertanto la mia specie è ben distinta perchè un po' più allungata e quindi meno arrotondata e quasi ovale, per avere la regione posteriore meno elevata, gli ambulacri più larghi, più profondati ed anco un po' più lunghi.

Lunghezza 28.mm
Larghezza 26.mm
Altezza 20,6.mm

Giacimento. — Un solo esemplare raccolto a S. Giorgio presso Brancaleone.

Sesto tipo. CELENTERATI.

Classe. Corallarii. — Ordine Zoantarii. — Sotto-ordine. Madreporarii.
Gruppo Apori.

Fam. TROCHOSMILIANI.

Genere. **TROCHOSMILIA** Edwards e Haime.

1. **Trochosmilia tetracycla** n. sp.

Tav. XX, fig. 10.

Sinonimi.

1876. Trochosmilia tetracycla Seguenza, *I foss. cenom. di Caltavuturo* pag. 3.
1876. » » Ciofalo, *Note cretaceo med. Caltav.* pag. 3.
1877. » » Ciofalo, *Nuove specie foss. cret.* ec. pag. 3.

Diagnosi. — Polipaio irregolarmente conico, alquanto curvo, troncato obliquamente nella sua parte superiore. Base ristretta, ma alquanto irregolarmente espansa. Costole ventiquattro uguali, semplici, ben distinte sino alla base, sottili, prominenti e più sporgenti presso il margine del calice, altre 24 minori, interrotte su d'un lato. Calice quasi circolare, ma alquanto irregolare; tramezzi larghi, sporgenti, sottili formanti quattro cicli completi, i primi tre cicli poco disuguali, l'ultimo è formato da tramezzi minori.

Lunghezza 13.mm
Diametro 9.mm

Per la sua forma conica, per la maniera come si comportano le costole e i tramezzi, nonchè pel loro numero, questa specie è perfettamente distinta.

Giacimento. — Raccolta a Caltavuturo dal prof. S. Ciofalo.

Fam. LITOFILLIANI.

Genere. LEPTOPHYLLIA Edw. e Haime.

1. Leptophyllia multisepta n. sp.

Tav. XX, fig. 11.

Sinonimi.

1876. Parasmilia multisepta Seguenza, *I foss. del cenom. di Caltav.* pag. 3.
1876. » » Ciofalo, *Note foss. cret. med. Caltav.* pag. 3.
1877. » » Ciofalo, *Nuove spec. foss. cret.* pag. 3.

Diagnosi. — Polipaio conico, alquanto arcuato, che si va assottigliando regolarmente verso la base, la quale è rotta; esso presenta nella sua parte superiore due cercini abbastanza prominenti ed alternanti con tre restringimenti in forma di profondi solchi; le costole sono sottili ma disuguali e finamente granulate; calice ellittico, poco profondo; columella alquanto sviluppata e considerevolmente allungata; tramezzi sottili, dentellati e molto numerosi, i grandi raggiungono circa il numero di 120; a questi se ne interpongono altri piccoli molto, in modo da completare probabilmente il sesto ciclo; quelli degli ultimi cicli s'incurvano verso quelli dei cicli precedenti e i piccoli sono obliquissimi e par che si saldano coi vicini.

Questa specie è molto distinta pei caratteri descritti e specialmente per lo sviluppo della columella, il quale sembrerebbe allontanarla dal genere al quale la rapporto, e forse potrebbe disgiungersi alloraquando si raccoglieranno nuovi e migliori esemplari, che per la loro conservazione permetteranno uno studio più accurato di tutti quanti i caratteri.

Diametro maggiore del calice 20.mm
» minore 16.mm
Altezza del polipaio alquanto mutilato 35.mm

Giacimento. — L'unico esemplare fu raccolto colla precedente specie a Caltavuturo e mi fu gentilmente comunicato dal signor prof. Saverio Ciofalo da Termini-Imerese.

Un altro piccolo corallo semplice della provenienza medesima parmi spettare al medesimo genere e si ravvicina per la forma breve ed allargata alla *L. patillata* E. de From. ma i tramezzi e le costole sono in numero minore.

Fam. CICLOSERIANI.

Genere. CYCLOSERIS Milne Edw. et J. Haime.

1. Cycloseris minima n. sp.

Tav. XX, fig. 14, 14*a*, 14*b*.

Diagnosi. — Polipaio piccolo, molto depresso, quasi lenticolare, perchè la superficie della muraglia come la calicinale sono entrambe mediocremente convesse; ma la forma non è esattamente circolare, invece leggermente ellittica; le costole irradiano sulla muraglia ma sono irregolari, quasi granose ed interrotte, poco sporgenti e meglio distinte presso il margine; tramezzi sottili, poco elevati, forniti di piccoli dentelli,

e poco disuguali, al numero di quarantotto, cioè quattro cicli completi. Fossetta columellare poco profonda, alquanto allungata.

Diametro maggiore 6,6.mm
» minore 6.mm
Altezza 1,7.mm

Questa specie per la sua picciolezza, pel numero dei suoi tramezzi e la loro poca disuguaglianza è assai ben distinta dalle forme conosciute.

Giacimento. — L'unico esemplare fu trovato dal prof. Ciofalo da Termini-Imerese presso Caltavuturo.

Fam. CLADOCORIANI.

Genere. CLADOCORA Hemprich et Ehremberg.

1. Cladocora brevis n. sp.

Tav. XX, fig. 13, 13*a*.

Diagnosi. — Polipaio dendroide ma breve, aderente e quasi astreiforme, formante delle piccole colonie costituite da uno a dieci poliperiti molto brevi, di disugualissimo diametro e forniti di grosse costole pressochè uguali. Calici circolari, ma molto disuguali, e poco profondi. Columella abbastanza sviluppata; paletti larghi ed inspessiti. Tramezzi bastantemente spessi, leggermente dentati, costituenti tre cicli completi, quelli del primo distinti per la loro maggiore grandezza, quelli del terzo convergono verso quelli del secondo e perciò si dispongono parallelamente a quelli del primo.

Altezza dei poliperiti da 1 a 5 millimetri.
Diametro dei calici da 2 a 4 millimetri e mezzo.

Questa specie è molto distinta dalle conosciute per l'abito dei suoi poliperiti, i quali sono brevissimi e formano delle colonie, che sembrano per la loro brevità di un carattere proprio astreiforme e quindi si crederebbero spettanti ad altro genere.

Giacimento. — Le molte colonie da me conosciute incrostano un'*E. oxyntas* raccolta a S. Giorgio.

Classe. Spongiarii. — Ordine. Fibrosi.

Fam. SUBERITIDI.

Genere. CLIONA Grant.

1. Cliona cretacea Portlock.

Tav. XVII, fig. 2.

Sinonimi.

1808. Organic impressions Parkinson, *Organ. remains* tom. II, pag. 75, tav. VIII, fig. 10.
1814. » » Conybeare, *Trans. geol. soc.* pag. 328, tav. XIV, fig. 1-6.
1838. Entobia . . . . . Bronn. *Leth. geogn.* t. II, pag. 691.
1843. Cliona cretacea Portlock, *Report on the geology of the county of Londonderry* pag. 360.
1850. » irregularis D'Orbigny, *Prodrom. pal.* t. II, pag. 289, no 1557.
1851. Clionites Conybeari Morris, *Paleont. notes in Ann. and Mag.* ec. 2 serie, t. VIII, p. 89, tav. IV, fig. 8.
1851. » glomerata Morris, loc. cit. pag. 88, tav. IV, fig. 1.
1854. Cliona cretacea Morris, *Cat. Brit. foss.* pag. 27.
1857. » » Pictet, *Traité de paléont.* tom. IV, pag. 535.
1868. » » P. Fischer, *Recherches sur les éponges perforantes* pag. 107, tav. II, fig. 5.

Rapporto con qualche dubbio a questa specie una cliona che perfora varî ostreidi del nostro cretaceo (*E. olisiponensis*, *E. africana* ecc.) e si presenta con osculi sparsi, rotondati, ovati e talvolta allungati, di considerevole grandezza.

Giacimento. — Questa specie conoscesi dovunque in Europa nelle conchiglie del cretaceo superiore. I miei esemplari sono da S. Paolo e dalla Valle di Lando, ma molto rari.

2. **Cliona perforata** n. sp.

Tav. XVI, fig. 1, 1*b*.

Diagnosi. — *Cliona ramoso-reticulata, propter loculis tubulosis, ramosis in retem anostomosatis; osculis parvis, rotundatis, inaequalibus, approximatis vel distantibus, irregulariterque dispositis non seriatis.*

Questa specie è distinta pel fatto che le logge formano dei canali, che invadono in tutte le direzioni la conchiglia sulla quale la spugna si è fissata; tali canali si ramificano, si anastomizzano e costituiscono una vera rete, in cui i canali variano considerevolmente di diametro da mezzo millimetro a tre. Per questo carattere la mia specie ricorda un poco la *Cliona paradoxa* Fischer. Gli *osculi* intanto sono piccoli da $^1/_4$ ad un millimetro, rotondati, ravvicinati ovvero allontanati e sempre disposti irregolarmente e non mai in serie.

Giacimento. — Questa distinta specie è stata da me raccolta a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò, essa perfora l'*Exogyra flabellata*, l'*E. africana,* l'*Ostrea Delettrei.*

3. **Cliona intricata** n. sp.

Tav. XV, fig. 2, 2*a*.

Diagnosi. — *Cliona superficialis; loculis ovatis, angulatis, confertis, demum elongatis, ramosis, intricatis; osculis parvis, ovato-angulosis.*

La cliona che descrivo invade ambo le valve della *Vulsella laeviuscula* formando delle escavazioni superficiali, allungate, ramose, intralciate, che si manifestano all'esterno della conchiglia, probabilmente per erosione della superficie; in qualche porzione soltanto si osservano osculi piccoli irregolari ovato-angolosi.

Giacimento. — Raccolta una volta sola a Magliardo sulla *V. laeviuscula.*

Settimo tipo. PROTOZOARII.

Classe. Rizopodi. — Ordine. Foraminiferi.

Fam. DENTALINIDI.

Genere. **PLACOPSILINA** D'Orb.

1. **Placopsilina vitrea** n. sp.

Tav. XXI, fig. 1, 1*a*, 1*b*.

Diagnosi. — Conchiglia vitrea, traslucida, irregolarissima, molto allungata e gracile, quasi semicilindrica, con restringimenti di tratto in tratto più o meno sensibili, che accennano alla distinzione delle logge, che sono irregolari e di varia lunghezza.

La parete della conchiglia è perforata da rari e sottili forami. Le estremità sono più o meno assottigliate.

Queste esili conchigliette si presentano come dei fili vitrei aderenti alle Ostree, ripiegati e contornati in mille modi e di lunghezza molto varia. La forma generale della specie ricorda bene le numerose *Placopsilina* che sono state descritte dal Terquem, e precipuamente la *P. rhyzomorpha* del Lias, la quale dalla nostra distinguesi per essere più variata, più flessosa e ramificata, e per avere gli strozzamenti d'ordinario più marcati.

La maggior lunghezza è circa di due millimetri.

Giacimento. — Aderisce all'*Ostrea Delettrei* ed all'*Exogira oxyntas* di S. Giorgio e di Ferruzzano.

Fam. GLOBIGERINIDI.

Genere. **GLOBIGERINA** D'Orb.

1. **Globigerina cretacea** D'Orb. var. *foveolata* n.

Sinonimi.

1839. Globigerina cretacea D'Orbigny, *Mém. de la Soc. géol. de France* pag. 34, tav. III, fig. 12, 13, 14.
1845. » » A. E. Reuss, *Die Versteinerungen der Böhmischen Kreidef.* pag. 36, tav. VIII, fig. 55.
1852. » » D'Orbigny, *Prodrome de paléont. universelle* tom. II, pag. 281.

I miei pochi esemplari rispondono benissimo nella forma alle figure date dagli autori, se non che parmi che essi debbano costituire una particolare varietà pei grossi pori di cui la conchiglia è ornata, e perchè ciascuno di essi trovasi al fondo di un incavo.

Giacimento. — Raccolti pochi esemplari nella marna di Anconi.

La roccia marnosa di varie località trovasi spesso ricca di foraminiferi probabilmente spettanti al genere *Globigerina*, ma la compattezza della roccia non permette la determinazione specifica di tali minimi gusci. Così io possiedo varî ostreidi, che nella marna ad essi aderente racchiudono siffatte *Globigerine*; esse provengono da Caltavuturo, da Anconi, da Falcò ecc.

Genere. **DISCORBINA** Parker et Iones.

1. **Discorbina plano-convexa** n. sp.

Tav. XXI, fig. 2, 2*a*, 2*b*.

Diagnosi. — Conchiglia piccola, orbicolato-lobata, finamente perforata, appianata dal lato della spirale, con cinque logge arcuate e marginate nel giro esterno, e con grossi granuli alla parte centrale; dal lato dell' apertura le logge sono fortemente convesse, disgiunte da profonde depressioni; l' apertura è estesa alla regione centrale, di forma irregolare, e si dirama a tutte le logge.

Questa specie si avvicina a varie specie conosciute. Così essa somiglia alla *Rosalina marginata* Reuss del cretaceo, dalla quale si distingue bene perchè le logge crescono molto più celeremente; dal lato dell'apertura sono più prominenti e disgiunte da depressioni più profonde, inoltre le cavità del giro esterno sono cinque e non sei.

La *D. sacharina* Schwager è convessa sopra ambe le facce, le logge esterne sono sei e di forma triangolare.

Diametro 0,55.mm
Spessore 0,22.mm

Giacimento. — L'unico esemplare raccolto proviene da Anconi.

Fam. PLANORBULINIDI.

Genere. PLANOBULINA D'Orbigny.

1. Planorbulina? cenomaniana n. sp.

Tav. XXI, fig. 4, 4*a*, 4*b*, 4*c*, 4*d*, 4*e*.

Diagnosi. — Conchiglia appianata aderente alle Ostriche, colla superficie lievemente rugosa, di forma pressochè circolare, ma molto spesso sviluppata irregolarmente come rappresenta la figura 4*a* per la irregolarità della superficie alla quale aderisce. Le logge sono molto numerose quasi appianate o leggermente convesse, e distinte bene per le suture impresse, la disposizione loro è evidentemente spirale ma dopo i primi giri non si mostra troppo chiara, anzi potrebbe credersi ad un ordinamento ciclico. Le logge inoltre crescono rapidamente dal centro alla periferia e si mostrano come disposte in quinconce più o meno regolarmente e sembrano ordinate sopra due serie di linee spirali, che partendo dal centro con direzione opposta vanno alla periferia. La loggia centrale è grande, sporge considerevolmente al di sopra della superficie generale della conchiglia ed è tri o quatripartita, le altre sono trigone con un lato maggiore curvo-convesso rivolto verso il margine, i due minori curvo-concavi. Alle suture sono sovente degli intagli o aperture lineari, i pori della superficie sono rari. Ciascuna loggia è divisa in un gran numero di cellule arrotondate o alquanto allungate come rappresentano le figure 4*b* e 4*d* tratte da preparazioni microscopiche al balsamo.

Un altro carattere degno di considerazione si è che la conchiglia in parte è costituita di silice, fatto rivelato dall'azione dell'acido cloridrico, il quale distrugge le cellette nelle quali è ripartita ciascuna loggia, toglie via la parete esterna delle logge, lasciando i grossi tramezzi che le dividono. Tali tramezzi sono cellulari, e di finissime cellule sembra risultare un sottile velo che resta al posto della parete esterna; tutto ciò viene dimostrato dalle figure 4*c* e 4*f*, la prima illuminata come corpo opaco, la seconda tratta da una preparazione al balsamo. Ma siffatta costituzione silicea potrebbe benissimo derivare dalla fossilizzazione, per la quale la calcite in parte è stata sostituita dalla silice.

Diametro dei maggiori individui 1,6.mm

Quanto alla interpretazione e determinazione generica del fossile che esamino devo confessare che io ne resto tuttavia nell' incertezza, come dimostra il segno interrogativo appostovi. Avendo sottoposto il mio fossile cretaceo all'esame di dotti rizopodisti europei ne ottenni disparate opinioni. Quella che io sieguo dubitativamente è dell' illustre sig. Brady, il giudizio di cui è tanto autorevole; pure la divisione di ciascuna loggia in un gran numero di cellette è un carattere molto

rimarchevole, che manca nelle *Planorbuline*, ed è sopratutto per questo che io ne resto dubbioso. Il sig. Brady ha trovato delle *Planorbuline* fisse come è quella che esamino; egli crede di aver trovato nella mia specie cretacea una transizione verso il genere *Tinoporus*.

Giacimento. — Questa specie incontrasi con qualche rarità a S. Giorgio presso Brancaleone ed alla Portella di Falcò presso Ferruzzano, sempre aderente all'*Ostrea Delettrei* ed all'*Exogyra oxyntas*.

Fam. LITUOLIDI.

Genere. **LITUOLA** Lamarck.

1. **Lituola cenomana** (D'Orb.)

Tav. XXI, fig. 3, 3*a*.

Sinonimi.

1850. Placopsilina cenomana D'Orbigny, *Prodrome de paléont.* vol. II, pag. 185.
Lituola cenomana Carpenter, *Introduction of the study of the Foraminifera* tav. XI, fig. 12, 13, 14.
1880. Placopsilina cenomana Seguenza, *Le formazioni terziarie nella provincia di Reggio* p. 45.

Questa specie aderente all'*Ostraea Delettrei* ed all'*Exogyra oxyntas* si presenta estremamente variabile nella forma, la porzione svolta essendo variissima in lunghezza ed incurvata o piegata in mille modi.

Giacimento. — Raccolta a S. Giorgio ed alla Portella di Falcò.

CONCLUSIONI PALEONTOLOGICHE.

Dopo l'esame minuzioso della fauna del cretaceo medio dell'Italia meridionale, è d'uopo ritornare sui nostri passi per interrogare la paleontologia.

Si è veduto dalla prima parte di questo lavoro, come le condizioni stratigrafiche del nostro cretaceo non danno agio ad uno studio minuzioso per istrati e per zone e che quindi non si è potuto sinora stabilire stratigraficamente, o almeno con nettezza, le partizioni cronologiche riconosciute e ben distinte altrove. Pure ho potuto segnalare che a S. Giorgio un gran numero di modelli di bivalvi pertinenti a specie turoniane giacciono in istrati marnoso-calcarei superiori, siccome nella medesima contrada occorre una roccia calcarea ripiena di *Cypricardia calabra* e di altre specie nuove che sembra formare l'ultimo membro della serie. Dapertutto poi la massa principale della formazione è costituita dalle argille scagliose con istrati marnosi e calcarei ricchi della fauna cenomaniana; anco in questa massa principale abbiamo segnalato uno strato superiore ricco della *Exogyra ratisbonensis* associata a varie altre specie, che ricorda bene la divisione del Cenomaniano proposta dal Coquand in Rotomagiano e Carentoniano.

D' altro canto deplorando le condizioni speciali degli strati e dei fossili per le quali la fauna non si è potuta studiare stratigraficamente, ho potuto pure segnalare talune associazioni che accennerebbero a miscela di faune o per lo meno al passaggio di talune specie da una ad altra zona. Così per esempio la comunissima *Exogyra flabellata* trovasi sin dagli strati inferiori dove associasi all' *Ostrea Delettrei*, alla *Exogyra oxyntas*, alla *Alectryonia syphax*, cioè trovasi in piena formazione rotomagiana.

Questi risultamenti stratigrafici ci danno diritto a ritenere le principali partizioni proposte, siccome già abbiamo conchiuso, cioè abbiamo veduto che il cretaceo dell' Italia meridionale rappresenta il Cenomaniano ed il Turoniano, e che il primo piano ci fa credere che anco in Italia possa ammettersi la partizione che ne fa il Coquand in Rotomagiano e Carentoniano.

I risultamenti paleontologici confermano pienamente tali vedute.

Delle 223 specie descritte in questo lavoro una metà circa appartiene alle già note cioè 119, e 104 sono riconosciute siccome nuove affatto.

Esaminando a quali piani geologici si appartengono le specie note si hanno i seguenti risultamenti:

Sei specie sono di più antica data, cioè si rapportano a forme riconosciute nella formazione aptiana, ma sono quasi tutte di quelle tali specie che fanno passaggio all'Albiano e taluna ai piani superiori, o per lo meno sono ritenute come tali, lo che importa, avuto riguardo al tenue numero, che esse giacciono insieme associate alla fauna del cretaceo medio.

Lo stesso dee dirsi delle specie albiane: esse sono dieci e quasi tutte riconosciute siccome comuni al Gault ed al Cenomaniano.

La parte principale della fauna poi è costituita da specie cenomaniane, difatti ve ne sono 31 riconosciute come tali dal D'Orbigny; 69 poi sono riconosciute come tali dal Coquand, il quale le riparte 55 nel *Rotomagiano* e 14 nel *Carentoniano.*

Del Turoniano del D'Orbigny ce ne ha 4 specie soltanto, ma a queste bisogna aggiungere 11 specie raccolte dal Coquand nel suo Mornasiano, che dipende dallo smembramento del Turoniano, perlochè quest'ultimo è ben rappresentato anche esso.

Una sola specie del Provinciano si associa anco alle precedenti del Turoniano, del quale il Provinciano è l'ultimo membro.

Cinque specie infine spetterebbero ai varî membri del cretaceo superiore, ma queste non possono darci alcuno importante risultamento, da un canto pel loro piccolo numero, ma più ancora perchè raccolte in unici esemplari e taluno anco dubbio.

A questo proposito io devo qui ricordare che una di tali specie, la *Voluta Baylei* Coquand, fu raccolta in unico e mal conservato modello nel calcare a *Cypricardia calabra* della contrada S. Giorgio presso Brancaleone. Questa roccia costituita quasi intieramente dall'assembramento di immenso numero di conchiglie di *Cypricardia* par che costituisca l'ultimo membro del cretaceo da me studiato, ma a quale zona debba rapportarsi non è agevole il determinarlo. Le specie che essa racchiude sono poco numerose, abbondantemente sparse e tutte nuove, solamente la *Voluta Baylei* accennerebbe al cretaceo superiore, ma d'altro canto la *Cypricardia* e le altre specie in essa contenute si trovano miste in molti luoghi alle varie specie del

cretaceo medio, perlochè io inclino a riguardare questa roccia siccome una zona ultima del cretaceo medio.

Da tutto quanto ho esposto risulta chiaro che i dati paleontologici confermano pienamente i pochi ed incompleti dati stratigrafici e quindi da quanto è stato detto risulta:

1° Che il cretaceo da me studiato, sparso in piccoli lembi nell'Italia meridionale, spetta tutto quanto alla formazione media, isolato compiutamente dal cretaceo inferiore e dal cretaceo superiore.

2° Il piano albiano o gault quantunque abbia lasciato alcuni rappresentanti nel nostro cretaceo medio, pure bisogna ritenere che i suoi strati mancano affatto presso di noi.

3° Il nostro cretaceo medio consta dunque dei piani Cenomaniano e Turoniano, il primo dei quali par che si riparta in Rotomagiano e Carentoniano.

4° Il *facies* della fauna che caratterizza il nostro cretaceo medio la ravvicina viemmaggiormente alle formazioni coetanee della provincia di Costantina in Algeria, colla quale regione esso ha ottantanove specie di comune, tra le 119 conosciute.

5° Un carattere molto spiccato della nostra fauna cretacea è quello della immensa quantità di Ostreidi che la distingue, e se talune di esse la ravvicinano al Cenomaniano delle varie regioni d'Europa, tutte quasi trovansi in Algeria, e la maggior parte sono speciali a tutte le contrade cretacee circummediterranee e caratterizzano quindi tutti i lembi del cretaceo medio di questa vasta regione, costituendone un tutto uniforme che si estende dal Portogallo alla Palestina, e dall'Italia all'Africa.

Quadri sinottici della distribuzione stratigrafica e geografica delle specie.

Numero d' ordine	NOMI DELLE SPECIE ED AUTORI	GIACIMENTI NOTI		DISTRIBUZIONE GEOGRAFICA																											
				ITALIA MERIDIONALE														EUROPA						AFRICA				ASIA			
				PROVINCIA DI MESSINA						PROVINCIA DI REGGIO					PROVINCIA DI PALERMO		PROV. DI CATANIA														
		Secondo D'Orbigny, Pictet ecc.	Secondo H. Coquand	Magliardo	Valle di Lando	S. Paolo	Saittone	Piano di Casso	Alì	Bova	S. Giorgio pr. Brancaleone	Portella di Falcò	Guttà	Anconi	Caltavuturo e Scillato	S. Giovanni di Caccano	Borgonuovo	Francia	Inghilterra	Svizzera	Germania	Belgio	Spagna e Portogallo	Algeria	Tripoli	Tunisi	Egitto	Palestina	Monte Sinai	Monte Libano	Arabia
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	Tipo. VERTEBRATI.																														
	Classe. PESCI. — Gen. ODONTASPIS.																														
1	Odontaspis gracilis, Agassiz	Neoc. - Apt. Albiano	. . .	.	.	P	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	f	i	s	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. CORAX.																														
2	Corax falcatus, Agassiz	Alb. - Sen.	. . .	.	.	P	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	i	s	g	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Tipo. MOLLUSCHI.																														
	Classe. CEFALOPODI. — Gen. BELEMNITES.																														
3	Belemnites semicanaliculatus? Blainv. .	Aptiano	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	f	i	s	g	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
4	» ultimus? D'Orb.	Cenom.	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	f	i	s	g	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. NAUTILUS.																														
5	Nautilus triangularis, Montfort	Cenom.	Carent.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	f	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
6	» sublaevigatus, D'Orb.	Turoniano	. . .	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	C	.	.	f	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
7	» Brancaleonensis, n. sp. . . .	. . . . . .	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
8	» calabrus, n. sp.	. . . . . .	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. ACANTHOCERAS.																														
9	Acanthoceras Mantelli, (Sowerby) . . .	Alb. - Cen.	Rot.	M	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	C	.	.	f	i	s	g	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
10	» Gentoni, (Brongniart)	Cenom.	. . .	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	C	.	.	f	i	s	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
11	» Rhotomagensis, (Defrance) . . .	Cenom.	Rot.	.	.	.	.	.	.	B	G	.	.	.	C	.	.	f	i	s	g	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
12	» Cunningtoni, (Sharpe)	Cenom.	. . .	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	.	.	.	f	i	s	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. SCHLOEBACHIA.																														
13	Schloebachia varians, (Sowerby)	Alb. - Cen.	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	f	i	s	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
14	» Coupei, (Brongniart), ...	Alb. - Cen.	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	.	.	.	f	i	s	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
15	» inflata, (Sowerby)	Alb. - Cen.	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	f	i	s	g	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	Gen. TURRILITES.																														
16	Turrilites Bergeri, (Brongniart)	Alb. - Cen.									G							f	i	s											
17	» Gravesianus, D'Orbigny	Cenom.	Rot.								G							f	i					a							
18	» tuberculato-plicatus, n. sp.										G																				
19	» Puzosianus, D'Orbigny	Albiano										F						f	i	s	g			a							
20	» Scheuchzerianus, Bosc	Cenom.	Rot.								G	F						f	i	s	g			a							
	Classe. GASTEROPODI. — Gen. NERINAEA.																														
21	Nerinaea Calabro-sicula, n. sp.			M							G	F																			
	Gen. TYLOSTOMA.																														
22	Tylostoma gracile, n. sp.											F																			
23	» propinquum, n. sp.											F			C																
24	» breve, n. sp.											F																			
	Gen. NATICA.																														
25	Natica eburnoides, n. sp.										G																				
	Gen. STROMBUS.																														
26	Strombus inornatus, D'Orbigny.	Cenom.	Carent.								G	F						f						a							
27	» incertus, (D'Orbigny)	Cenom.	Rot.								G							f													
	Gen. PTEROCERA.																														
28	Pterocera marginata, D'Orbigny	Cenom.									G							f													
29	» foveolata, n. sp.												G																		
	Gen. VOLUTA.																														
30	Voluta Baylei Coquand		Camp.								G													a							
31	» Reynesii, n. sp.			M																											
32	» elongata, (Sowerby)	Turoniano									G							f			g										
33	» Ferruzzanensis, n. sp.											F																			
34	» longispira, n. sp.											F																			
	Gen. TROCHUS.																														
35	Trochus grano-lyratus, n. sp.														C																
	Classe SCAFOPODI. — Gen. DENTALIUM.																														
36	Dentalium prismiforme, n. sp.				L																										
	Classe LAMELLIBRANCHI. — Gen. COQUANDIA.																														
37	Coquandia italica, n. sp.			M	L	P	S				G	F	G																		
38	» minor, n. sp.														C																
	Gen. CORBULA.																														
39	Corbula subtruncata, n. sp.			M	L																										
40	» umbonata, n. sp.			M											C	G															

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	Gen. ANATINA.																														
41	Anatina ovata, n. sp.	.	.	M	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
42	» lucinoides, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. PHOLADOMYA.																														
43	Pholadomya Molli? Coquand	.	Rot.	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
44	» elata, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
45	» gracilis, n. sp.	.	.	M.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
46	» crassesulcata, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. SOLEN.																														
47	Solen cretaceus, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. MACTRA.																														
48	Mactra Didonis, Coquand	.	Rot.	M	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
49	» Moevusii, Coquand	.	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
50	» producta, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. LAVIGNON.																														
51	Lavignon Marcouti, Coquand.	.	Morn.	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. ARCOPAGIA.																														
52	Arcopagia compressa, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. VENUS.																														
53	Venus plana, Sowerby.	Cenom.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	C	.	.	f	i	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
54	» arcuata, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
55	» Cleopatra, Coquand.	.	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
56	» regularis, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
57	» Mauritanica, Coquand	.	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
58	» Nail, Coquand	.	Prov.	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
59	» trigona, n. sp.	.	.	M	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
60	» mactraeformis, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
61	» indistincta, Ciofalo.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
62	» Cherbonneaui, Coquand.	.	Morn.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
63	» Dutrugei, Coquand.	.	Rot.	M	L	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
64	» Reynesii, Coquand	.	Rot.	.	L	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	a	.
65	» meridionalis, n. sp.	.	.	M	L	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
66	» Calcarae, n. sp.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. TAPES.																														
67	Tapes minor, Ciofalo	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. DOSINIA.																														
68	Dosinia Delettrei, (Coquand).	.	Morn.	M	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
69	» Forgemolli, (Coquand)	.	Rot.	M	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	a	.

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	Gen. Astarte.																														
70	Astarte minima, n. sp.			M							G																				
71	» tenuicosta, n. sp.			M							G				C																
	Gen. Crassatella.																														
72	Crassatella Baudeti, Coquand		Rot.	M	L		S				G	F	G	A	C									a							
73	» dubia, n. sp.											F			C																
74	» Desvauxii, Coquand.		Sant.	M																				a							
75	» Tenoucklensis, Coquand.		Rot.	M							G				C									a							
76	» pusilla, Coquand		Rot.	M																				a							
77	» minima, n. sp.														C																
	Gen. Cyprina.																														
78	Cyprina Picteti, (Coquand)		Rot.								G													a							
79	» Calabra, n. sp.			M							G	F			C																
80	» trapezoidalis, Coquand		Rot.	M							G	F			C									a							
81	» obliquissima, n. sp.										G																				
82	» Ciofaloi, n. sp.														C																
83	» dilatata, n. sp.			M								F																			
84	» Africana, Coquand.		Rot.	M																				a							
85	» elata, n. sp.											F																			
86	» inflata, n. sp.											F		A																	
87	» Brancaleonensis, n. sp.										G	F																			
	Gen. Cypricardia.																														
88	Cypricardia calabra, (Seguenza)			M	L		S	C		B	G	F	G	A	C																
89	» Meneghinii, n. sp.										G		G																		
90	» Gemmellaroi, n sp.										G	F																			
	Gen. Opis.																														
91	Opis naviformis, n. sp.										G																				
92	» elegans? D' Orbigny	Cenom.									G							f													
	Gen. Isocardia.																														
93	Isocardia getulina, Coquand.		Rot.								G													a							
94	» aquilina, Coquand.		Rot.	M							G				C									a							
95	» Iubae, Coquand		Sant.	M																				a							
96	» nebrodensis, Ciofalo										G				C																
97	» numida, Coquand.		Rot.	M											C									a							
98	» neglecta, Coquand		Rot.				S																	a							
	Gen. Cardium.																														
99	Cardium ponderosum, n. sp.											F																			
100	» giganteum, n. sp.										G				C																
101	» nebrodense, n. sp.														C																
102	» proximum, n. sp.										G																				

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
103	Cardium Pauli, Coquand		Rot.	M	L						G	F	G	A	C									a							
104	» Coquandi, n. sp.			M							G	F	G		C																
105	» dilatatum, n. sp.			M																											
106	» subaequilaterum, Ciofalo										G				C																
107	» auressense, Coquand		Rot.	M							G	F												a							
108	» Platonis, Coquand		Rot.		L																			a							
109	» punicum, Coquand		Rot.								G													a							
110	» Hillanum, Sowerby	Cenom.	Rot.								G	F			C	G		f	i		g			a							
111	» regulare, Coquand		Rot.	M	L	P	S	C			G	F	G	A	C									a							
	Gen. Unicardium.																														
112	Unicardium Matheroni, Coquand		Rot.									F			C									a							
	Gen. Cardita.																														
113	Cardita Forgemolli, Coquand		Car.				S				G													a							
114	» Delettrei, Coquand		Car.	M																				a							
115	» acuteradiata, n. sp.											F	G																		
116	» tetraedra, n. sp.											F																			
	Gen. Corbis.																														
117	Corbis Tevesthensis, Coquand		Rot.								G													a							
118	» globosa, n. sp.										G	F																			
	Gen. Kellia.																														
119	Kellia cretacea, n. sp.														C																
	Gen. Trigonia.																														
120	Trigonia quatriformis, n. sp.											F			C																
121	» Daedalea, Parkinson.	Apt. Cen.									G							f	i	s											
122	» scabra, Lamarck	Turon.	Mor.	M							G				C			f						a							
123	» crenulata, Lamarck	Cenom.	Rot.					A										f						a							
124	» distans, Coquand		Car.	M							G	F		A	C									a							
125	» undaticosta, n. sp.														C																
	Gen. Nucula.																														
126	Nucula barcellonensis, n. sp.						S																								
127	» Luciae, n. sp.										G																				
	Gen. Arca.																														
128	Arca Delettrei, Coquand		Rot.							B	G	F			C									a							
129	» elegans, n. sp.										G	F																			
130	» Moutoniana, D'Orbigny.	Cenom.	Rot.								G	F						f						a							

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
131	Arca Tevesthensis, Coquand	......	Rot.	M	L	.	S	.	.	.	G	F	G	A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
132	» diceras, n. sp.	......	...	M	L	.	S	.	.	.	G	F	.	A	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
133	» obliquissima, n. sp.	......	...	M	.	.	.	.	.	.	G	F	.	A	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
134	» navis, n. sp.	......	...	.	.	.	.	.	.	.	G	F	.	A	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
135	» parallela, Coquand	......	Rot.	M	L	.	.	.	.	.	G	F	G	A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
136	» trigona n. sp.	......	...	.	.	.	.	.	.	.	G	F	.	A	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
137	» trapezoides n. sp.	......	...	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
138	» vendinnensis, D'Orbigny	Cenom.	...	.	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	.	.	.	f	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
139	» indistincta, n. sp.	......	...	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
140	» obscura, n. sp.	......	...	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
141	» pholadiformis, D'Orbigny	Cenom.	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	f	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
142	» tricostata, n. sp.	......	...	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Modiola.																														
143	Modiola inornata, n. sp.	......	...	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
144	» indifferens? Coquand	......	Rot.	M	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
145	» pseudo-fittoni, n. sp.	......	...	M	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Lithodomus.																														
146	Lithodomus ferruzzanensis, n. sp.	......	...	.	.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Pinna.																														
147	Pinna Galliennei, D'Orbigny	Cenom.	...	M	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	f	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
148	» fragmentaria, n. sp.	......	...	M	.	.	S	.	.	.	G	F	G	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Avicula.																														
149	Avicula gravida, Coquand	......	Mor.	M	L	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
150	» atra, Coquand	......	Mor.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
151	» Delettrei, Coquand	......	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Gervilia.																														
152	Gervilia consanguinea, n. sp.	......	...	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
153	» bicostata, n. sp.	......	...	M	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Vulsella.																														
154	Vulsella laeviuscula, n. sp	......	...	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Lima.																														
155	Lima alternicosta, n. sp.	......	...	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Pecten.																														
156	Pecten dichotomus, n. sp.	......	...	M	L	.	.	.	.	B	G	F	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
157	Pecten Calcarae, n. sp.	. . . . . .	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
158	» Desvauxii, Coquand	. . . . . .	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
159	» planatus, n. sp.	. . . . . .	. . .	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
160	» laevis? Nilson	. . . . . .	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	g	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Ianira.																														
161	Ianira quadricostata, (Sowerby)	. . . . . .	Rot.	M	L	.	S	.	.	.	G	F	G	A	C	.	.	f	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Plicatula.																														
162	Plicatula radiola? Lamarck.	Apt. Alb.	. . .	M	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	.	.	.	f	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
163	» paucicostata, n. sp.	. . . . . .	. . .	M	L	.	.	.	.	.	G	F	.	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
164	» auressensis. Coquand	. . . . . .	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
165	» Fourneli, Coquand	. . . . . .	Rot.	M	.	P	.	.	.	.	G	F	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
166	» tenuis, n. sp	. . . . . .	. . .	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
	Gen. Ostraea.																														
167	Ostraea Delettrei, Coquand	. . . . . .	Rot.	M	L	.	S	.	.	.	G	F	G	A	C	C	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	p	s	.	.
	Gen. Exogyra.																														
168	Exogyra flabellata, Lamarck.	Cenom.	Car.	M	L	.	S	C	.	B	G	F	G	A	C	.	B	f	.	.	.	.	s	a	.	.	.	.	s	l	a
169	» involuta, n. sp.	. . . . . .	. . .	M	L	.	S	.	.	.	G	F	G	.	C	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a
170	» haliotidea, (Sowerby)	Cenom.	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	C	.	.	f	i	.	g	b	.	a	.	.	.	.	.	.	.
171	» canaliculata, Sowerby)	Cenom.	Apt. Alb. Rot. Car.	M	L	.	S	.	.	.	G	F	G	.	C	.	.	f	i	.	.	b	.	.	.	.	.	.	.	.	.
172	» conica, (Sowerby).	Cenom.	Rot.	.	.	.	.	.	.	.	G	.	.	.	C	.	.	f	i	.	g	b	s	a	.	.	.	p	.	.	.
173	» africana, (Lamarck).	. . . . . .	Rot.	M	L	P	S	C	.	B	G	F	G	A	C	C	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	e	p	s	l	a
174	» Oxyntas, (Coquand)	. . . . . .	Rot.	M	L	P	S	C	A	B	G	F	G	A	C	C	B	f	.	.	.	.	s	a	t	t	.	p	.	.	.
175	» Trigeri, (Coquand)	. . . . . .	Car.	.	.	.	.	.	.	.	.	F	.	.	.	.	.	f	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	.
176	» Overwegi?, De Buch	. . . . . .	Dor.	M	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	f	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	s	.	.
177	» Olisoponensis, Sharpe	. . . . . .	Car.	M	L	P	S	.	.	.	G	F	G	A	C	.	.	f	.	.	.	.	sp	a	.	.	.	p	.	.	.
178	» digitata, Geinitz	. . . . . .	Rot.	.	L	.	.	.	.	.	G	.	.	.	.	.	.	f	i	.	g	b	.	a	.	.	.	.	.	.	.
179	» Ratisbonensis, (Schlotteim) . . .	Cenom.	Car.	M	L	.	S	C	.	B	G	F	G	.	C	.	.	f	i	.	g	.	s	a	.	.	.	p	.	.	.
180	» Mermeti, Coquand	. . . . . .	Car.	M	L	.	.	.	.	.	G	F	G	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	a	.	.	.	.	.	.	a
	Gen. Gryphaea.																														
181	Gryphaea vesiculosa, (Sowerby)	. . . . . .	Rot.	M	L	P	S	.	.	B	G	F	G	.	.	.	.	f	i	s	.	b	.	a	.	.	.	p	s	.	.
182	» Baylei, (Gueranger)	. . . . . .	Car.	M	L	.	S	C	.	B	G	F	G	.	.	.	.	f	.	.	.	.	p	a	.	.	.	p	.	.	.
	Gen. Alectryonia.																														
183	Alectryonia Syphax, (Coquand)	. . . . . .	Rot.	M	L	.	S	C	A	B	G	F	G	A	C	C	.	.	.	.	.	.	.	a	t	.	.	.	.	.	.
	Gen. Anomia.																														
184	Anomia papyracea, D'Orbigny	Cenom.	. . .	.	.	.	.	.	.	.	G	F	.	.	.	.	.	f	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
185	Anomia papillosa, n. sp.										G																				
186	» ornata, n. sp.											F																			
	Classe. Brachiopodi. — Gen. Discina.																														
187	Discina fragilis, Coquand		Mor.								G	F												a							
	Classe. Rudisti. — Gen. Sphaerulites.																														
188	Sphaerulites Nicaisei, Coquand		Rot.								G													a							
189	» multicostata, n. sp.								A																						
	Tipo. ARTROPODI.																														
	Classe. Crostacei. — Gen. Cythere.																														
190	Cythere reticulato-squamosa, n. sp.													A																	
	Gen. Cytheropteron.																														
191	Citheropteron trigonum, n. sp.											F																			
	Gen. Cytherella.																														
192	Cytherella leopolitana, (Reus.)											F									g										
	Tipo. VERMI.																														
	Classe. Anellidi. — Gen. Serpula.																														
193	Serpula filiformis, Sowerby	Aptiano									G							f		s	g		s	a							
	Gen. Vermilia.																														
194	Vermilia? cretacea, n. sp.														C																
	Gen. Psygmobranchus																														
195	Psygmobranchus? antiquus, n. sp.										G																				
	Classe. Briozoarii. — Gen. Membranipora.																														
196	Membranipora normaniana. D' Orb. Var. exagona. n										G							f													
197	» elliptica, (Reuss).			M																	g										
198	» longitheca, n. sp.			M																											
	Gen. Lepralia.																														
199	Lepralia impressa?, (Reuss)										G										g										
	Tipo. ECHINODERMI.																														
	Classe. Echinidi. — Gen. Magnosia.																														
200	Magnosia Desorii, Coquand		Car.		L																			a							
	Gen. Holectypus.																														
201	Holectypus serialis, Deshayes	Turon.	Mor.								G							f						a							

				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
	Gen. EPIASTER.																														
202	Epiaster Villei, Coquand		Rot.								G													a							
	Gen. HEMIASTER.																														
203	Hemiaster batnensis, Coquand		Mor.		L						G		G											a							
204	» gracilis n. sp.						S						G?																		
205	» ambiguus, n. sp.										G	F																			a
206	» ovatus, n. sp.			M							G																				
207	» Coquandi, (Seguenza)		Mor.				S				G	F		A										a							
208	» africanus, Coquand		Car.								G	F	G											a							
209	» Desvauxii, Coquand.		Mor.				S																	a							
210	» aumalensis, Coquand		Rot.								G													a							
211	» globulus, n. sp.										G																				
	Tipo. CELENTERATI.																														
	Classe. CORALLARII. — Gen. TROCHOSMILIA.																														
212	Trochosmilia tetracycla, n. sp.														C																
	Gen. LEPTOPHYLLIA.																														
213	Leptophyllia multisepta, n. sp.														C																
	Gen. CYCLOSERIS.																														
214	Cycloseris minima, n. sp.														C																
	Gen. CLADOCORA.																														
215	Cladocora brevis, n. sp.										G																				
	Classe SPONGIARII. — Gen. CLIONA.																														
216	Cliona cretacea, Portlock				L	P												f	i	s	g										
217	» perforata, n. sp.										G	F																			
218	» intricata, n. sp.			M																											
	Tipo. PROTOZOARII.																														
	Classe. RIZOPODI. — Gen. PLACOPSILINA.																														
219	Placopsilina vitrea, n. sp.										G	F																			
	Gen. GLOBIGERINA.																														
220	Globigerina cretacea D'Orb. var. foveolata n.		Senon.											A				f	i		g										
	Gen. DISCORBINA.																														
221	Discorbina plano-convexa, n. sp.													A																	
	Gen. PLANORBULINA.																														
222	Planorbulina cenomaniana, n. sp.										G	F																			
	Gen. LITUOLA.																														
223	Lituola cenomana, (D'Orb.).	Cenom.									G	F						f													

INDICE DELLE MATERIE

SPIEGAZIONE DELLA TAV. I.

Carta geologica dei territorî di Barcellona e di Castroreale.

TAVOLA I.

Contrade cretacee della provincia di Messina

M. Cretaceo della valle di Magliardo.
L. Cretaceo della valle di Lando.
P. Cretaceo della valle di S. Paolo.
S. Cretaceo della contrada Saittone.

N. B. Il cretaceo delle contrade Alì, e Piano di Casso trovasi lungi dal territorio rappresentato in questa carta.

DISTRIBUZIONE DEL CRETACEO MEDIO

nei territori di Barcellona e di Castroreale

Atti dei Lincei Classe sc. fis. ecc. Serie 3ª Vol.e XII — G. SEGUENZA. Sul Cretaceo medio Tav. Iª

MARE TIRRENO

SPIEGAZIONE DELLA TAV. II.

Carta geologica dei territorî di Brancaleone e di Ferruzzano.

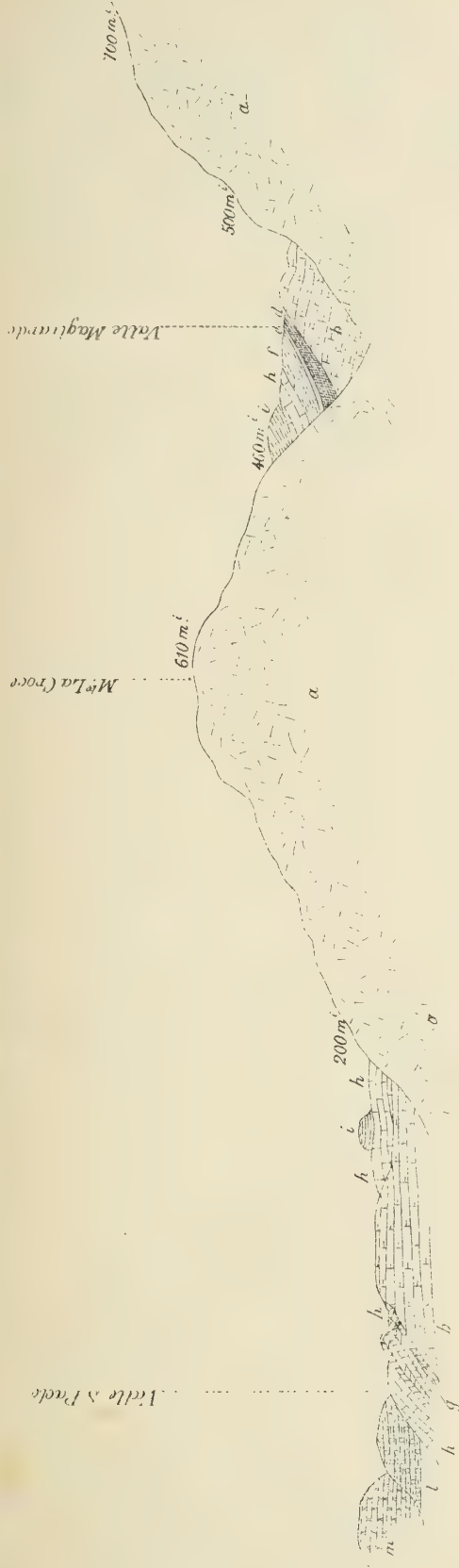
TAVOLA II.

Contrade cretacee della provincia di Reggio

Gu. Cretaceo della contrada Guttà.
F. Cretaceo della Portella di Falcò.
G. Cretaceo della contrada S. Giorgio.

N. B. Le contrade cretacee Bova e Ciriella, sono lontane dalle enumerate.

SEZIONI DEL CRETACEO MEDIO NELL' ITALIA MERIDIONALE

Atti dei Lincei Classe sc. fis. ecc. Serie 3ª Volᵉ XII — G. SEGUENZA Sul Cretaceo medio Tavª IIIª

Sezione 1ª Spaccato nel territorio di Barcellona (Provincia di Messina)
da Magliardo a S. Paolo da N-NO. a S-SE
Scala da 1 15,000

Sezione 2ª
dal piano d'Arioso al Mte Fasoleria da N-O. a S-E. Scala di 1: 15,000

G. Seguenza dis.

DISTRIBUZIONE DEL CRETACEO MEDIO

nei territori di Brancaleone e di Ferruzzano

Atti dei Lincei Classe sc. fis. ecc. Serie 3ª Vol.e XII

G. SEGUENZA. Sul Cretaceo medio Tav. IIª

MARE IONIO
Scoglio Monistili
C. 326.
C. 327.
C. 328.
C. 329.
Staz.ne
Marina di Brancaleone
C. 330
C. 331.
C. 332.
C. 333.
C.po SPARTIVENTO
C. 334.
C. 335
Punta di Spropoli
C. 336.
Brancaleone
Campolico
1 Recente. Sabbie marine e alluvioni attuali
2 Plioceno super. Marne e sabbie (Astiano)
3 Plioceno infer. Marne e sabbie (Zancleano)
4 Mioceno medio. Sabbie e conglomerati (Langhiano)
5 Mioceno infer. Argille scagliose, schisti bituminosi ecc. (Tongriano)
6 Eoceno superiore. Argille scagliose calc.i nummu.i (Liguriano)
7 Eoceno medio. Arenarie e conglomerati (Bartoniano)
8 Cretaceo medio. Argille scagliose e calcari (Turoniano e Cenoman.o)
9 Giurassico. Calcare brecciato.
10 Cristallino. Gneiss, calcare cristallino, ecc.

Atti dei Lincei Classe sc. fis. ecc. Serie 3ª Vol.e XII

G. SEGUENZA. Sul Cretaceo medio Tav. IIª

DISTRIBUZIONE DEL CRETACEO MEDIO
nei territori di Brancaleone e di Ferruzzano

MARE IONIO

1. Recente. *Sabbie marine e alluvioni attuali*
2. Plioceno super. *Marne e sabbie* (Astiano)
3. Plioceno infer. *Marne e sabbie* (Zancleano)
4. Mioceno medio. *Sabbie e conglomerati* (Langhiano)
5. Mioceno infer. *Argille scagliose, schisti bituminosi ecc.* (Tongriano)
6. Eoceno superiore. *Argille scagliose calc.e nummu.e* (Liguriano)
7. Eoceno medio. *Arenarie e conglomerati* (Bartoniano)
8. Cretaceo medio. *Argille scagliose e calcari* (Turoniano e Cenoman.o)
9. Giurassico. *Calcare brecciato.*
10. Cristallino. *Gneiss, calcare cristallino, ecc.*

SPIEGAZIONE DELLA TAV. III.

TAVOLA III.

Segni convenzionali.

		Descrizione	Piano
a		Gneiss, micaschisti, schisti amfibolici, calcare cristallino, pegmatite ecc.	Laurenziano
b		Argille grigio-scure, scagliose, marne, strati calcarei — *Cretaceo medio.*	Cenomaniano Turoniano
c		Arenarie micacee con straterelli argillosi. Conglomerati — Eoceno medio.	Bartoniano
d		Argille scagliose variegate con straterelli marnosi, calcarei e nummulitici — Eoceno superiore.	Liguriano
e		Calcari bianchi a piccole nummuliti, alveoline ed orbitoidi — Eoceno superiore.	
f		Marne scagliose con calcari bianchi e verdicci a fucoidi e picomaca — Mioceno inferiore.	Tongriano
g		Schisti bituminosi con piriti e cristalli di gesso — Mioceno inferiore.	
h		Argille scagliose verdi, rosse, grige con siderosio litoide e limonite in istrati, concrezioni ecc. — Mioceno inferiore.	
i		Arenaria a grani di quarzo ialino, bianca, rossa, giallastra — Mioceno inferiore.	
l		Arenaria in istrati alternanti con argille grige. Conglomerati — Miocene medio.	Langhiano
m		Sabbie e marne plioceniche, bianche, grigiastre e giallicce — Pliocene superiore.	Astiano

SPIEGAZIONE DELLA TAV. IV.

TAVOLA IV.

Segni convenzionali.

a	Gneiss, schisti micacei ed amfibolici, calcare cristallino ecc.	Laurenziano
(¹) *b*	Argille grigio-scure scagliose con strati marnosi e calcarei — *Cretaceo medio.*	Cenomaniano / Turoniano
c	Arenarie micacee con argille grige. Conglomerati — Eoceno medio.	Bartoniano
d	Argille scagliose variegate con calcari, marne, calc. numm. — Eoceno superiore.	Liguriano
e	Calcari bianchi a piccole nummuliti alveoline ecc. — Eoceno superiore.	Liguriano
f	Marne scagliose con calcari bianchi o verdicci a fucoidi — Mioceno inferiore.	Tongriano
g	Schisti bituminosi con piriti e cristalli di gesso — Mioceno inferiore.	Tongriano
h	Argille scagliose verdi, rosse, grige, siderosio, limonite — Mioceno inferiore.	Tongriano
i	Arenarie a grani di quarzo ialino, bianche, rosse, giallastre — Mioceno inferiore.	Tongriano
l	Arenaria in istrati altern. con argille. Conglomerati — Mioceno medio.	Langhiano
m	Sabbie, marne bianche, grigiastre, giallastre — Plioceno superiore.	Astiano

(¹) *Sezione* 5ª.

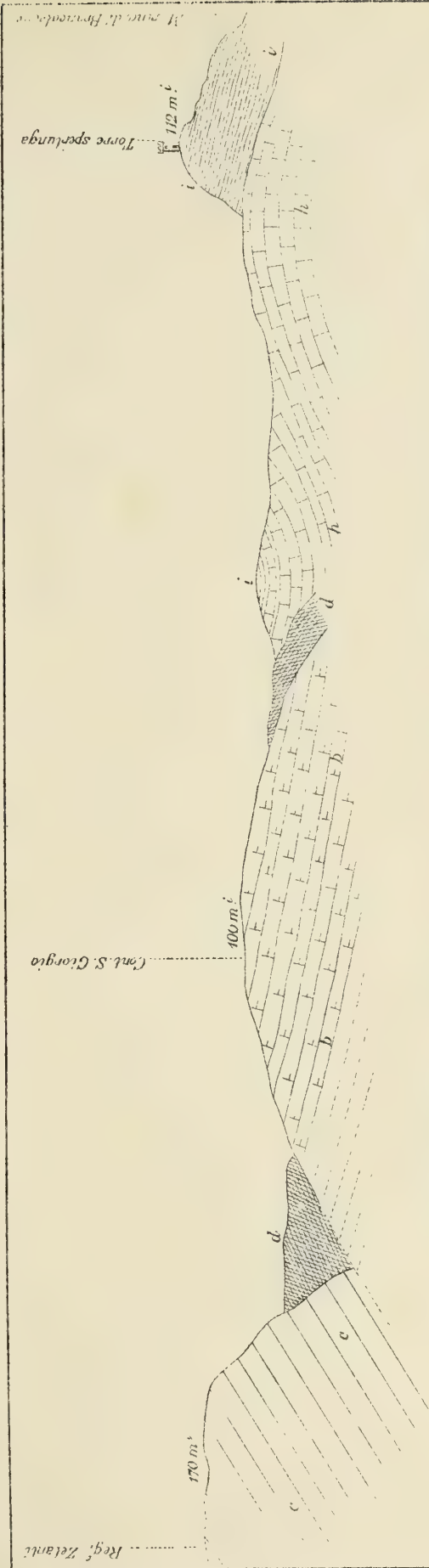
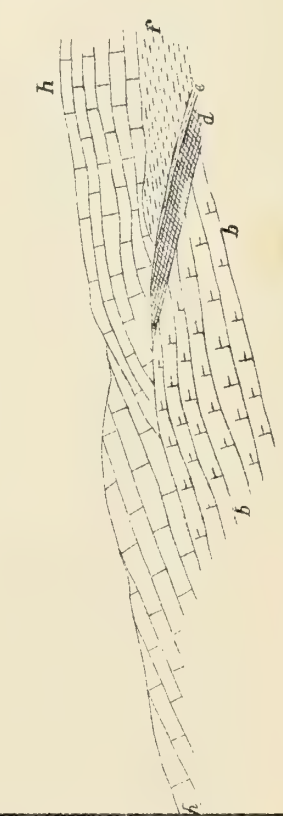
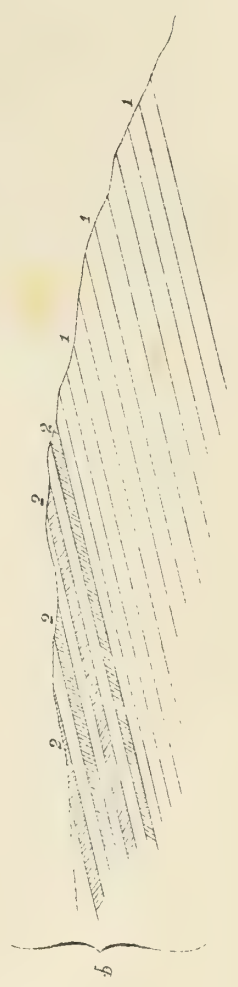
b	1	Argille scagliose a numerose ostriche.
	2	Marne e calcari a modelli numerosi di Cefalopodi e di Lamellibranchi varî.

SPIEGAZIONE DELLA TAV. V.

TAVOLA V.

Fig. 1. *Nautilus brancaleonensis* n. sp. — Esemplare raccolto a S. Giorgio presso Brancaleone.
» 2. *Nautilus calabrus* n. sp. — L'unico esemplare raccolto a S. Giorgio veduto in due posizioni, cioè lateralmente e dal dorso.
» 3. *Turrilites tuberculato-plicatus* n. sp. — Il solo esemplare raccolto a S. Giorgio.
» 4. *Nerinaea calabro-sicula* n. sp. — Un esemplare da S. Giorgio, e 4*a* un frammento sezionato dalla contrada Magliardo.
» 5. *Pterocera foveolata* n. sp. — Un esemplare da Ciriella.
» 6. *Voluta ferruzzanensis* n. sp. — Un esemplare dalla Portella di Falcò.
» 7. *Voluta Reynesii* n. sp. — Da Magliardo.
» 8. *Voluta longispira* n. sp. — Dalla Portella di Falcò.
» 9. *Tylostoma propinquum* n. sp. — Dalla Portella di Falcò.
» 10. *Tylostoma gracile* n. sp. — Dalla Portella di Falcò.
» 11. *Tylostoma breve* n. sp. — Dalla Portella di Falcò.
» 12. *Natica eburnoides* n. sp. — Raccolta a S. Giorgio.
» 13. *Trochus grano-lyratus* n. sp. — Esemplare da Caltavuturo.
» 14. *Dentalium prismiforme* n. sp. — Raccolto nella valle di Lando.

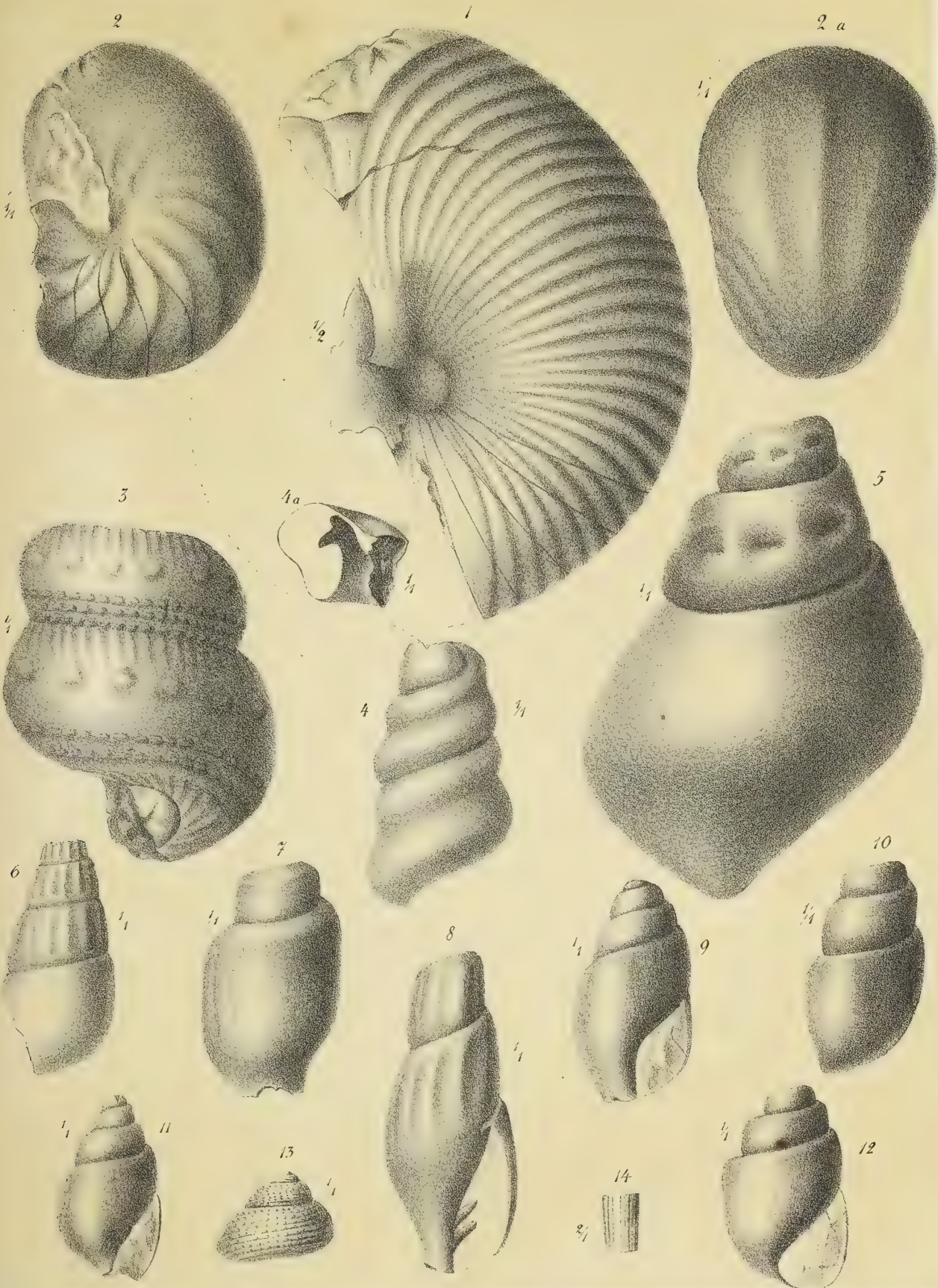
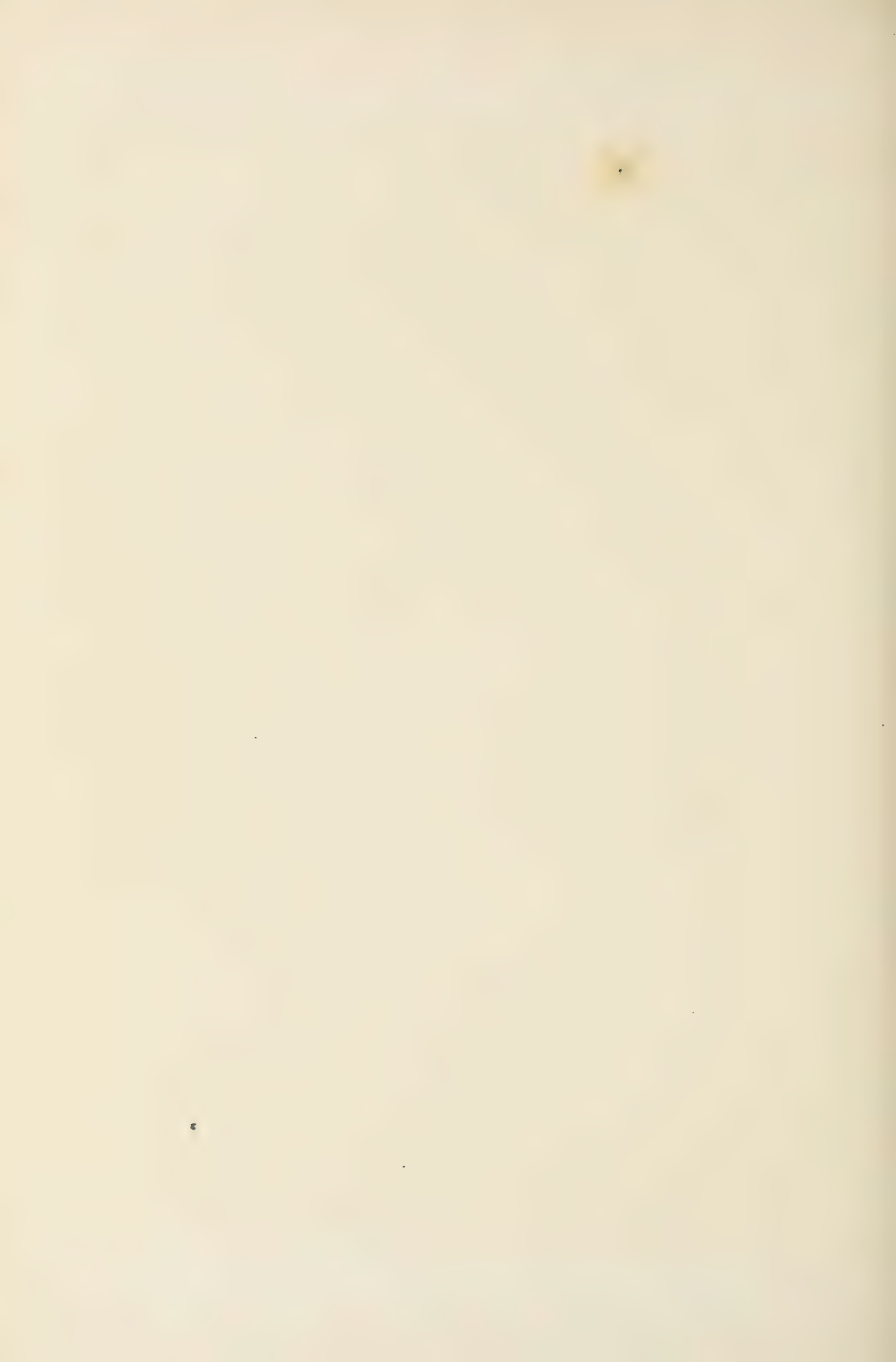
2
1
2 a
1/1
1/1
1/2
3
4a
5
1/1
1/1
1/1
4
1/1
6
7
10
1/1
1/1
1/1
8
9
1/1
1/1
1/1
11
13
14
12
1/1
1/1
2/1

SPIEGAZIONE DELLA TAV. VI.

TAVOLA VI.

Fig. 1. *Coquandia italica* n. sp. — Un esemplare raccolto alla contrada Saittone, e veduto in due posizioni.
» 2. *Coquandia minor* n. sp. — Un esemplare da Caltavuturo.
» 3. *Corbula subtruncata* n. sp. — Un esemplare da Magliardo veduto in due posizioni.
» 4. *Corbula umbonata* n. sp. — 4. Una valva raccolta a Magliardo. — *4a*, *4b*. Due modelli da Caltavuturo in diversa posizione.
» 5. *Anatina ovata* n. sp. — Un esemplare da S. Giorgio.
» 6. *Anatina lucinoides* n. sp. — Un esemplare dalla Portella di Falcò.
» 7. *Solen cretaceus* n. sp. — Un esemplare che viene da S. Giorgio.
» 8. *Pholadomya crassesulcata* n. sp. — Solo esemplare raccolto a S. Giorgio.
» 9. *Pholadomya gracilis* n. sp. — Il solo esemplare da Magliardo.
» 10. *Mactra producta* n. sp. — Da S. Giorgio.

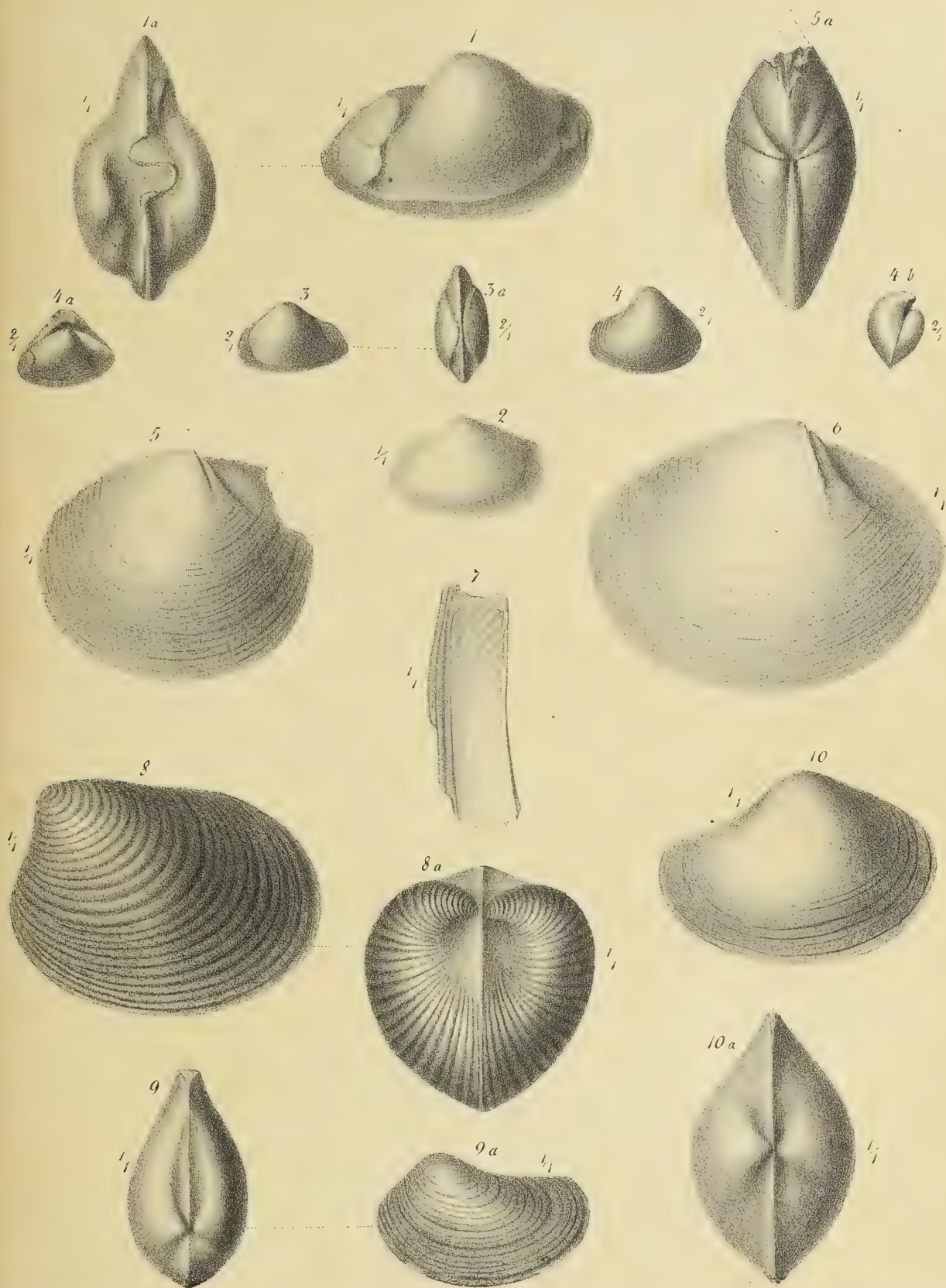
LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. VII.

TAVOLA VII.

Fig. 1. *Venus trigona* n. sp. — Un esemplare da Mag iardo, fig. 1 veduto lateralmente, fig. 1*a* veduto dalla regione cardinale.

» 2. *Venus mactraeformis* n. sp. — Esemplare da Caltavuturo, fig. 2 veduto lateralmente, fig. 2*a* veduto dagli apici.

» 3. *Venus arcuata* n. sp. — Da S. Giorgio, fig. 3 veduta lateralmente, fig. 3*a* veduta dalla regione cardinale.

» 4. *Venus Calcarae* n. sp. — Un esemplare da Caltavuturo veduto di lato e dagli omboni, fig. 4*a*.

» 5. *Venus regularis* n. sp. — Un esemplare da S. Giorgio vedu o di lato e dalla regione cardinale.

» 6. *Venus meridionalis* n. sp. — Un esemplare da S. Giorgio ve uto lateralmente e dalla regione cardinale.

» 7. *Astarte minima* n. sp. — Un esemplare veduto di lato raccolto a S. Giorgio; fig. 7*a* e 7*b* un modello dalla medesima contrada veduto di lato e dagli omboni.

» 8. *Astarte tenuicosta* n. sp. — Un' impronta esteriore, da Magliardo.

» 9. *Crassatella minima* n. sp. — Un esemplare da Caltavuturo veduto lateralmente e dalla regione cardinale.

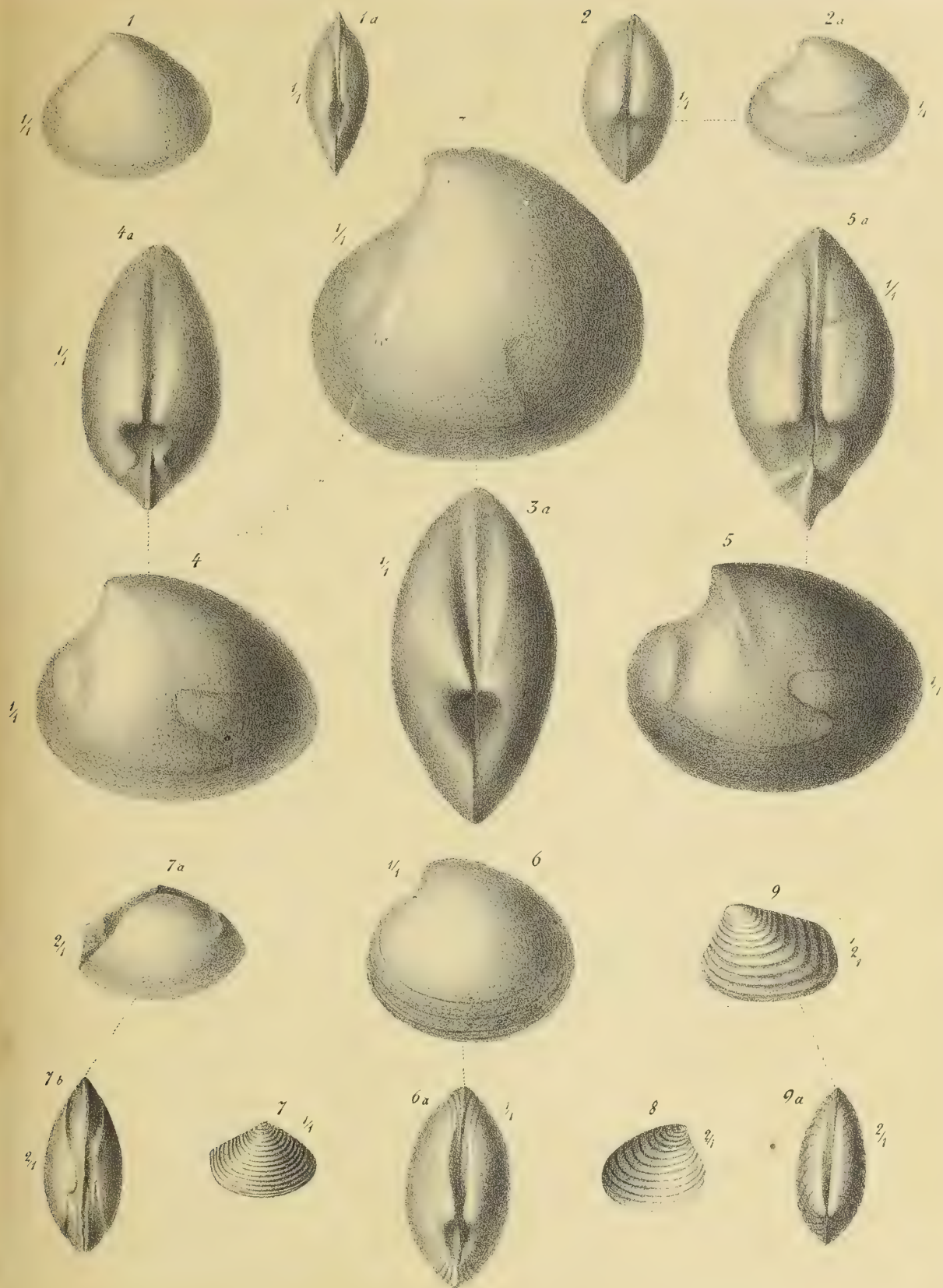
LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. VIII.

TAVOLA VIII.

Fig. 1. *Crassatella dubia* n. sp. — Un esemplare da Caltavuturo veduto lateralmente e dalla regione cardinale.

» 2. *Cyprina calabra* n. sp. — Un esemplare da S. Giorgio veduto in due posizioni.

» 3. *Cyprina obliquissima* n. sp. — Un esemplare della contrada S. Giorgio rappresentato in due diverse posizioni.

» 4. *Cyprina elata* n. sp. — Un esemplare raccolto alla Portella di Falcò e rappresentato in due posizioni differenti.

» 5. *Cyprina inflata* n. sp. — Un esemplare della Portella di Falcò in due differenti posizioni.

» 6. *Cyprina Brancaleonensis* n. sp. — Un esemplare da S. Giorgio presso Brancaleone veduto di lato e dalla regione cardinale.

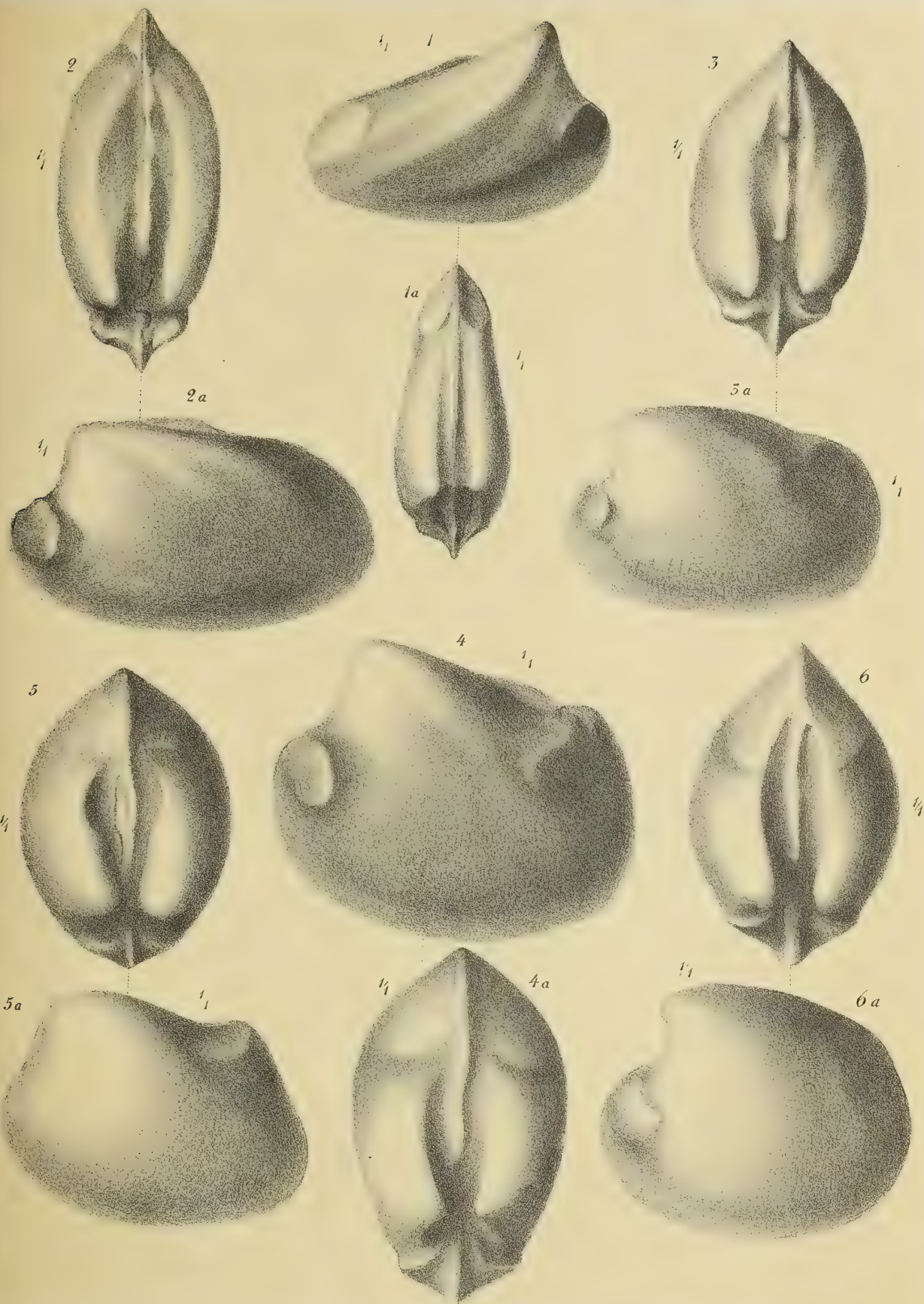
1
1a
2
2a
3
3a
4
4a
5
5a
6
6a

SPIEGAZIONE DELLA TAV. IX.

TAVOLA IX.

Fig. 1. *Cyprina Ciofaloi* n. sp. — Un esemplare da Caltavuturo veduto lateralmente e dalla regione cardinale.

» 2. *Cyprina dilatata* n. sp. — Un esemplare da S. Giorgio rappresentato di lato e dal cardine.

» 3. *Cypricardia calabra* (Seguenza) — Un modello della contrada S. Giorgio presso Brancaleone, rappresentato in due diverse posizioni.

» 4. *Cypricardia Meneghinii* n. sp. — Un incompleto esemplare da S. Giorgio in due posizioni.

» 5. *Cypricardia Gemmellaroi* n. sp. — Un esemplare dalla Portella di Falcò veduto di lato e dalla regione cardinale.

» 6. *Isocardia diceras* n. sp. — Un modello della contrada S. Giorgio, veduto di lato e dalla regione cardinale.

» 7. *Opis naviformis* n. sp. — Esemplare, con porzione della conchiglia, veduto di fianco, dalla regione anale e dalla regione boccale.

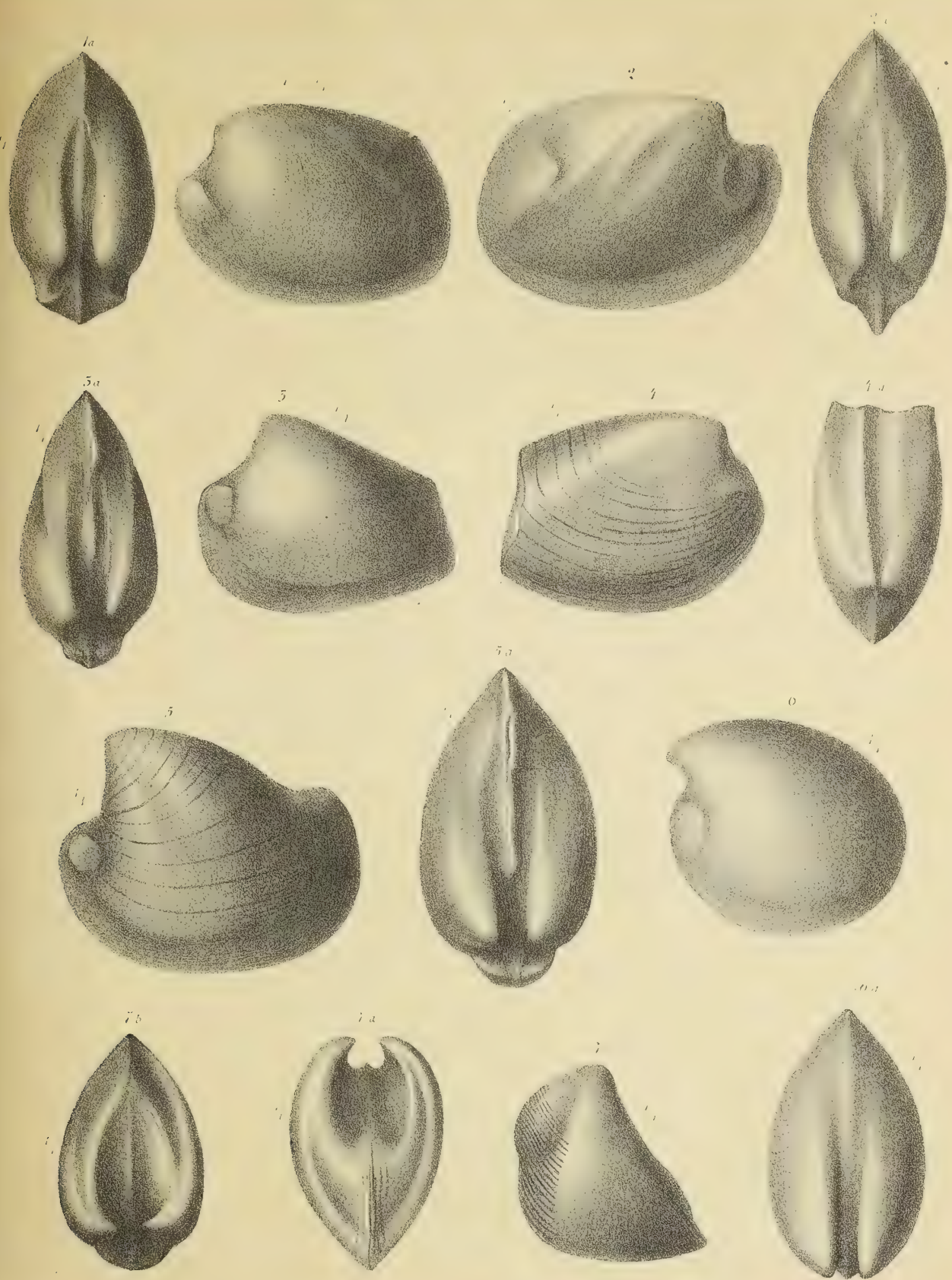
1a
2
2a
3a
3
4
4a
5
5a
6
6a
7b
7a
7

SPIEGAZIONE DELLA TAV. X.

TAVOLA X.

Fig. 1. *Cardium giganteum* n. sp. — Un esemplare la cui scultura è appena accennata, raccolto a S. Giorgio; 1*a* lo stesso veduto dalla regione degli omboni, 1*b* un frammento ben conservato ed ingrandito per vedere l'ornamentazione.

» 2. *Cardium dilatatum* n. sp. — Un esemplare veduto in due posizioni, raccolto nella valle di Magliardo.

» 3. *Cardium proximum* n. sp. — Un esemplare raccolto a S. Giorgio, rappresentato in due posizioni.

» 4. *Cardium ponderosum* n. sp. — Un esemplare incompleto, raccolto alla Portella di Falcò, che presenta indizii della scultura esteriore; 4*a* profilo dello stesso, veduto dalla regione cardinale; 4*b* scultura ingrandita.

» 5. *Cardium nebrodense* n. sp. — 5, 5*a* Un esemplare raccolto presso Caltavuturo, veduto in due posizioni — 5*b* Un modello del medesimo luogo.

G SEGUENZA

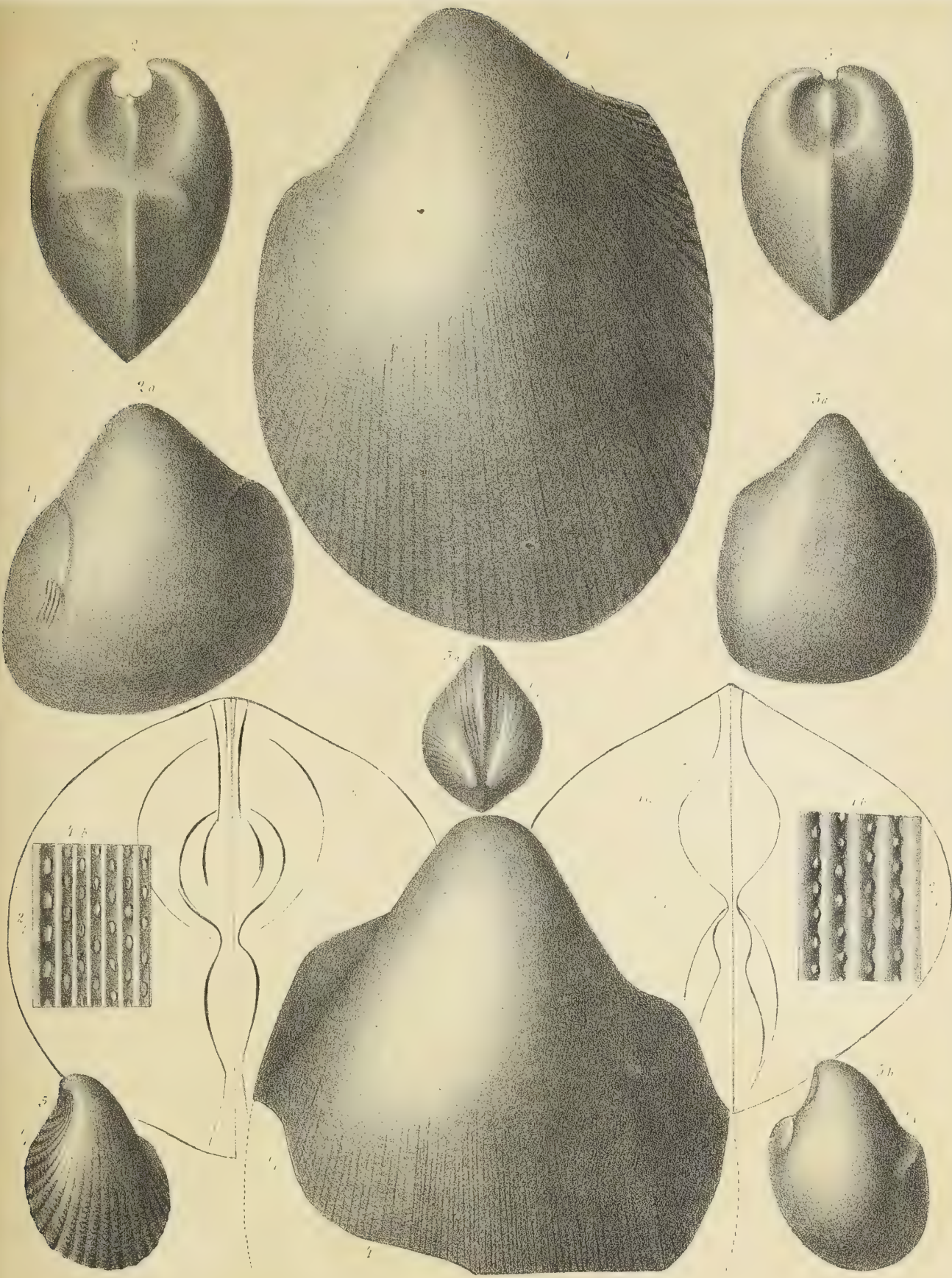
BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XI.

TAVOLA XI.

Fig. 1. *Cardium Coquandi* n. sp. — Un esemplare veduto in tre posizioni, raccolto alla contrada S. Giorgio.

» 2. *Unicardium Matheroni* Coquand. Var. *major*. — Un esemplare raccolto alla Portella di Falcò, rappresentato in due posizioni.

» 3. *Cardita aculeradiata* n. sp. — Un esemplare della contrada Guttà presso Ferruzzano.

» 4. *Corbis globosa* n. sp. — Un esemplare rappresentato in due posizioni, proveniente da S. Giorgio.

G. SEGUENZA DIS.

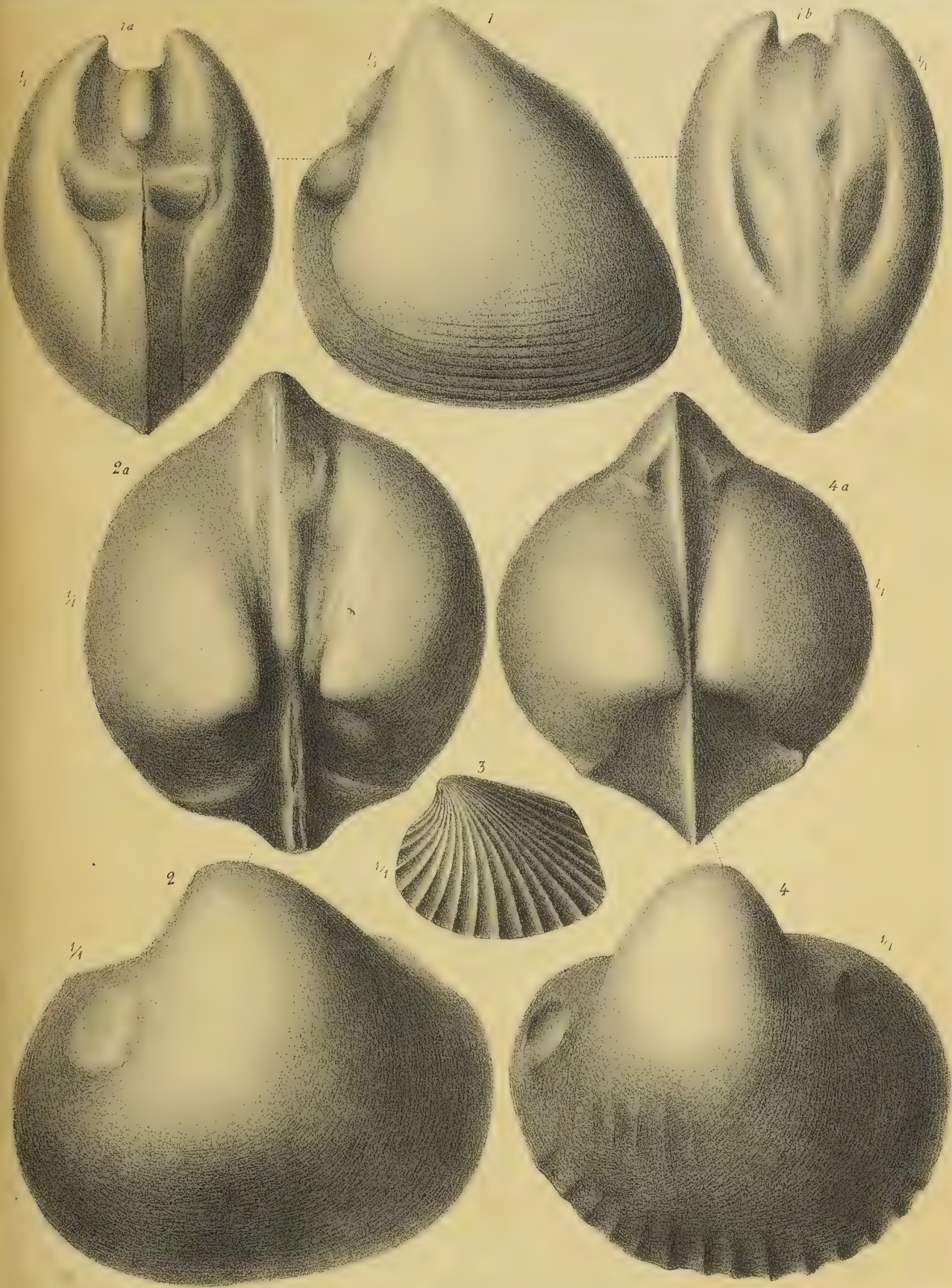
LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XII.

TAVOLA XII.

Fig. 1. *Trigonia quatriformis* n. sp. — 1. Un modello che porta i resti della conchiglia, proveniente da Caltavuturo. 1*a* Un modello dalla Portella di Falcò.

» 2. *Cardita tetraedra* n. sp. — Un esemplare della Portella di Falcò, rappresentato in due posizioni.

» 3. *Kellia cretacea* n. sp. — Un esemplare da Caltavuturo.

» 4. *Arca elegans* n. sp. — Un esemplare da S. Giorgio in due diverse posizioni.

» 5. *Trigonia undaticosta* n. sp. — Un esemplare in due posizioni, proveniente da Caltavuturo.

» 6. *Arca trigona* n. sp. — Un esemplare raccolto a S. Giorgio, rappresentato in due posizioni.

» 7. *Nucula Luciae* n. sp. — Il solo esemplare raccolto a S. Giorgio, rappresentato in due posizioni.

» 8. *Nucula Barcellonensis* n. sp. — Un esemplare della contrada Saittone presso Barcellona, rappresentato in due posizioni.

G. SEGUENZA DIS

LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XIII.

TAVOLA XIII.

Fig. 1. *Arca Moutoniana* D'Orb. Var. *magna* n. — Un esemplare da S. Giorgio in due posizioni.
» 2. *Arca trapezoides* n. sp. — 2, 2*a* Un esemplare di Magliardo della Var. *inflata*. 2*b*, 2*c* Un esemplare tipico della stessa provenienza in due posizioni entrambi.
» 3. *Arca obliquissima* n. sp. — Un esemplare di S. Giorgio, rappresentato in due posizioni.
» 4. *Arca navis* n. sp. — Un esemplare di S. Giorgio, veduto in due posizioni.
» 5. *Arca indistincta* n. sp. — Un esemplare di S. Giorgio.
» 6. *Arca obscura* n. sp. — Un esemplare, il solo raccolto alla contrada Magliardo.

G. SEGUENZA DIS.

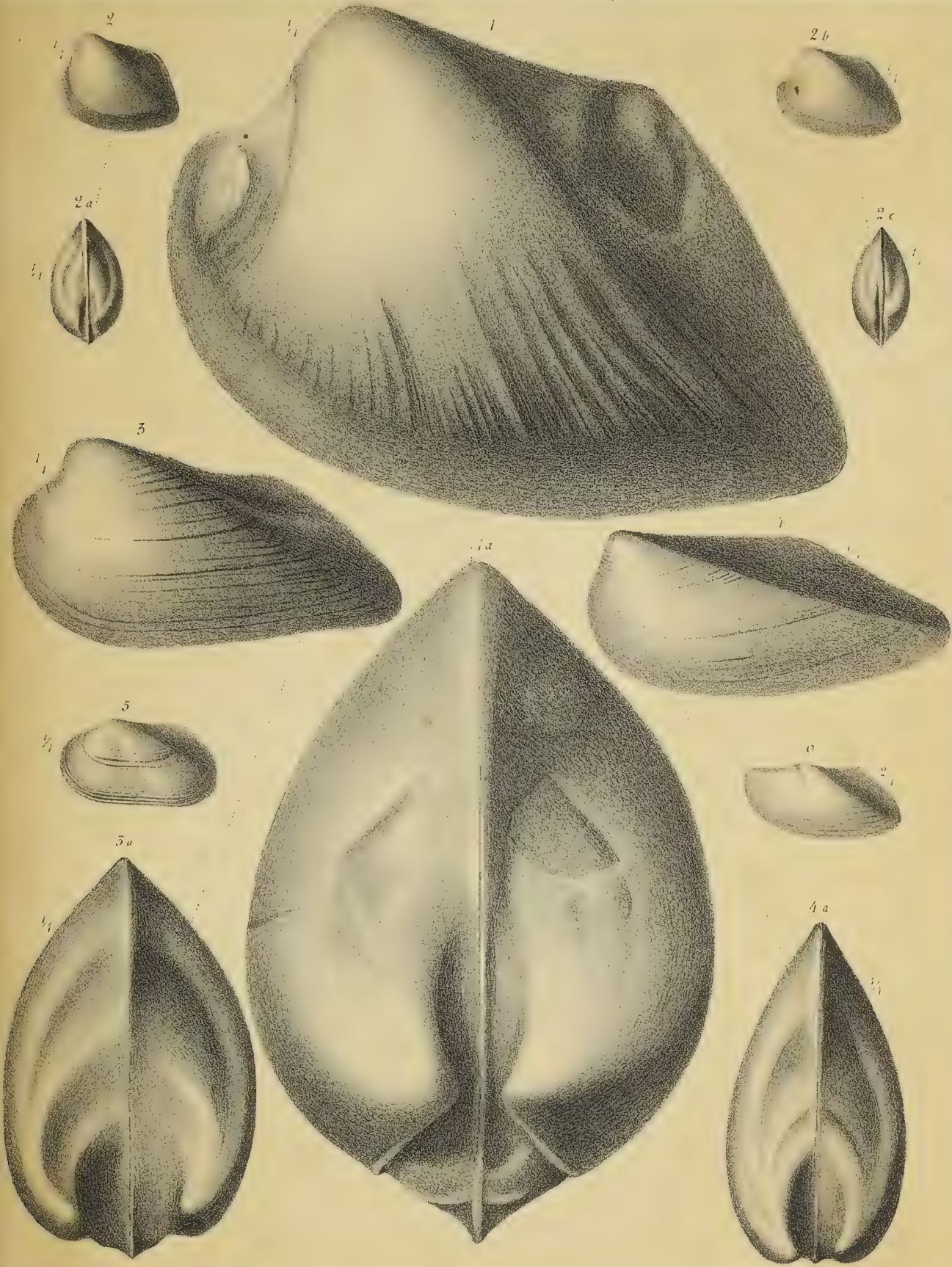
LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XIV.

TAVOLA XIV.

Fig. 1. *Arca aiceras* n. sp. — 1 e 1*a* Un esemplare della contrada S. Giorgio, veduto in due posizioni. 1*b* Un esemplare d'una varietà dello stesso luogo.

» 2. *Arca obliquissima* Var. *lata.* — Un esemplare della contrada S. Giorgio.

» 3. *Modiola inornata* n. sp. — Il solo esemplare raccolto a Magliardo, rappresentato in due posizioni.

» 4. *Modiola pseudofittoni* n. sp. — Un esemplare di S. Giorgio veduto in due posizioni.

» 5. *Lithodomus ferruzzanensis* n. sp. — Un esemplare della contrada Guttà, nel territorio di Ferruzzano.

» 6. *Pinna fragmentaria* n. sp. — Un frammento che mostra la scultura di due forme, da S. Giorgio.

» 7. *Gervilia bicostata* n. sp. — Un esemplare della contrada S. Giorgio, rappresentato in tre diverse posizioni.

G. SEGUENZA DIS

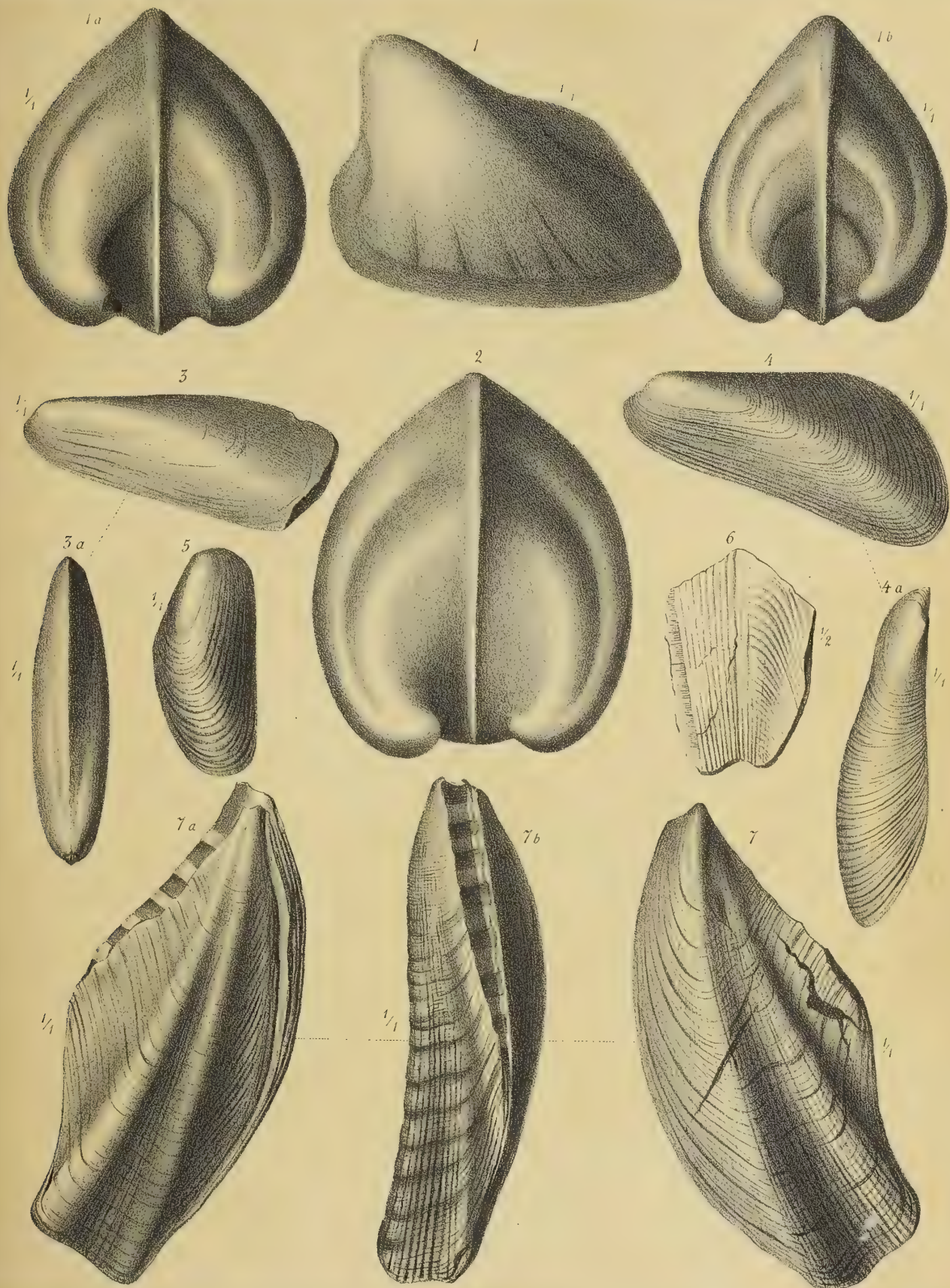
LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XV.

TAVOLA XV.

Fig. 1. *Gervilia consanguinea* n. sp. — Un esemplare della contrada Magliardo.

» 2. *Vulsella laeviuscula* n. sp. — Unico esemplare raccolto a Magliardo, rappresentato in due posizioni, perforato dalla *Cliona intricata* n. sp.

» 3. *Lima alternicosta* n. sp. — 3, 3*a*. Esemplare da S. Giorgio, presso Brancaleone — 3*b* 3*c*. Un esemplare della var. *crassicosta* n. della contrada S. Giorgio.

» 4. *Pecten dichotomus* n. sp. — 4. Una valva veduta dall'esterno — 4*a* Una valva opposta, rappresentata dalla superficie interna; entrambe dalla contrada Magliardo. — 4*b*. Un frammento ingrandito per mostrare la scultura.

» 5. *Pecten Calcarae* n. sp. — 5, 5*a*. Le due valve raccolte a S. Giorgio, vedute all'esterno una, all'interno l'altra. — 5*b*. Un frammento che mostra la tenue scultura perchè ingrandito.

» 6. *Pecten planatus* n. sp. — Interno d'una valva raccolta alla Portella di Falcò.

» 7. *Plicatula paucicostata* n. sp. — 7. 7*c*. Un esemplare di forma tipica. — 7*a*. Un esemplare della Var. *flabellata* n. — 7*b*. Individuo che rappresenta la Var. *crassicosta* n. — 7*d*. Var. *ostreiformis* n. Tutti raccolti a S. Giorgio.

» 8. *Anomia papillosa* n. sp. — Un individuo aderente all'*Exogyra olysoponensis*, raccolto a S. Giorgio.

» 9. *Anomia ornata* n. sp. — Unico esemplare raccolto alla Portella di Falcò.

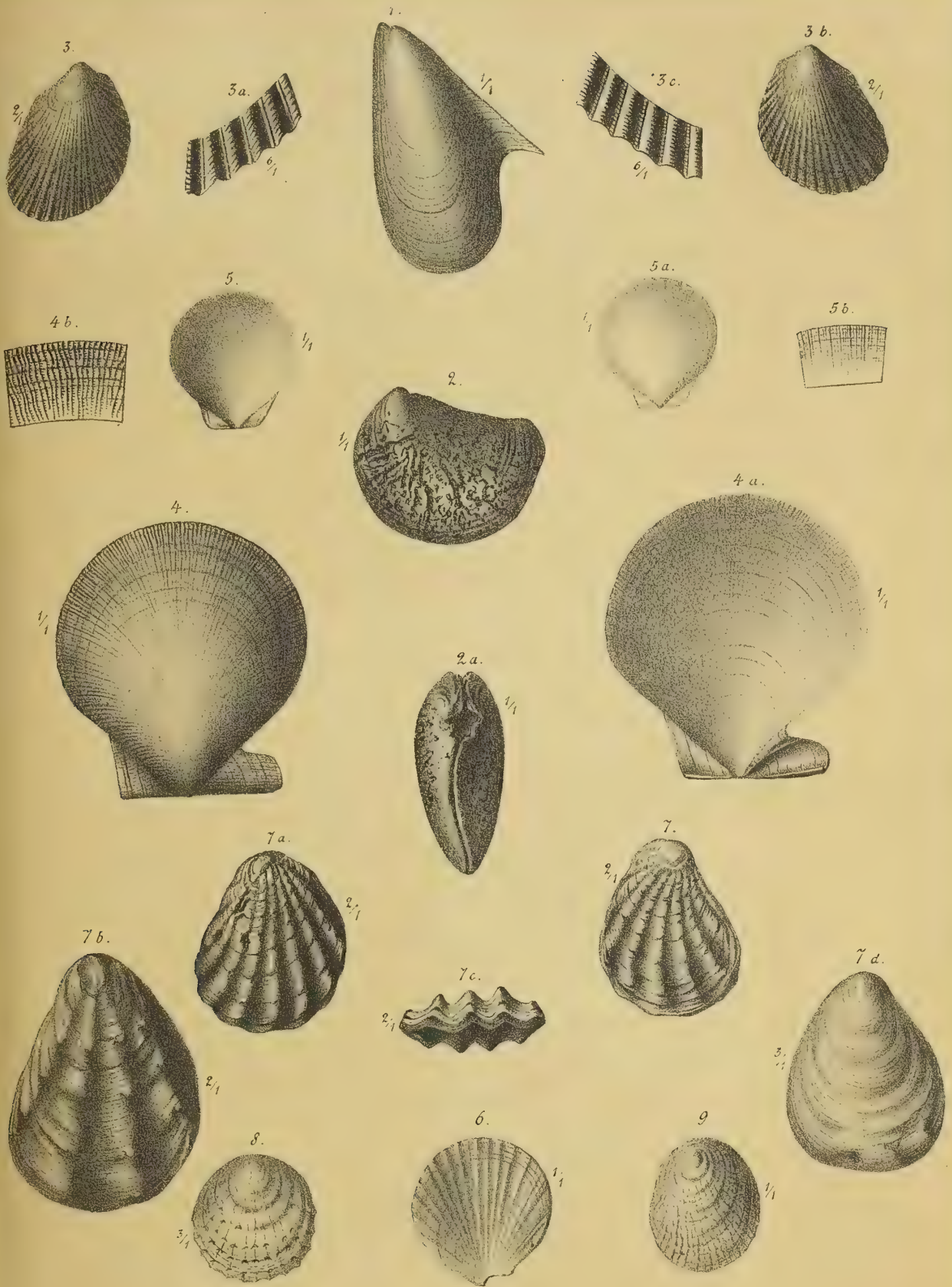
G. SEGUENZA DIS.   LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XVI.

TAVOLA XVI.

Fig. 1. *Ostrea Delettrei* Coquand. — 1. Un esemplare della Var. *simplex* n. raccolto a S. Giorgio e perforato dalla *Cliona perforata* n. sp. — 1*a*, 1*b*. Altro esemplare da S. Giorgio, che rappresenta la Var. *striata* n.

» 2. *Exogyra involuta* n. sp. — 2, 2*a*. Un esemplare veduto in due posizioni raccolto a S. Giorgio. — 2*b*. Un esemplare della Var. *A. tenuicosta* raccolto a Magliardo — 2*c*, 2*d*. Un individuo della Var. *B. major* veduto dalla valva inferiore, e lateralmente, raccolto a S. Giogio.

» 3. *Exogyra flabellata* Goldf. — Un individuo spettante alla Var. *G. semilunata* n. raccolto a S. Giorgio.

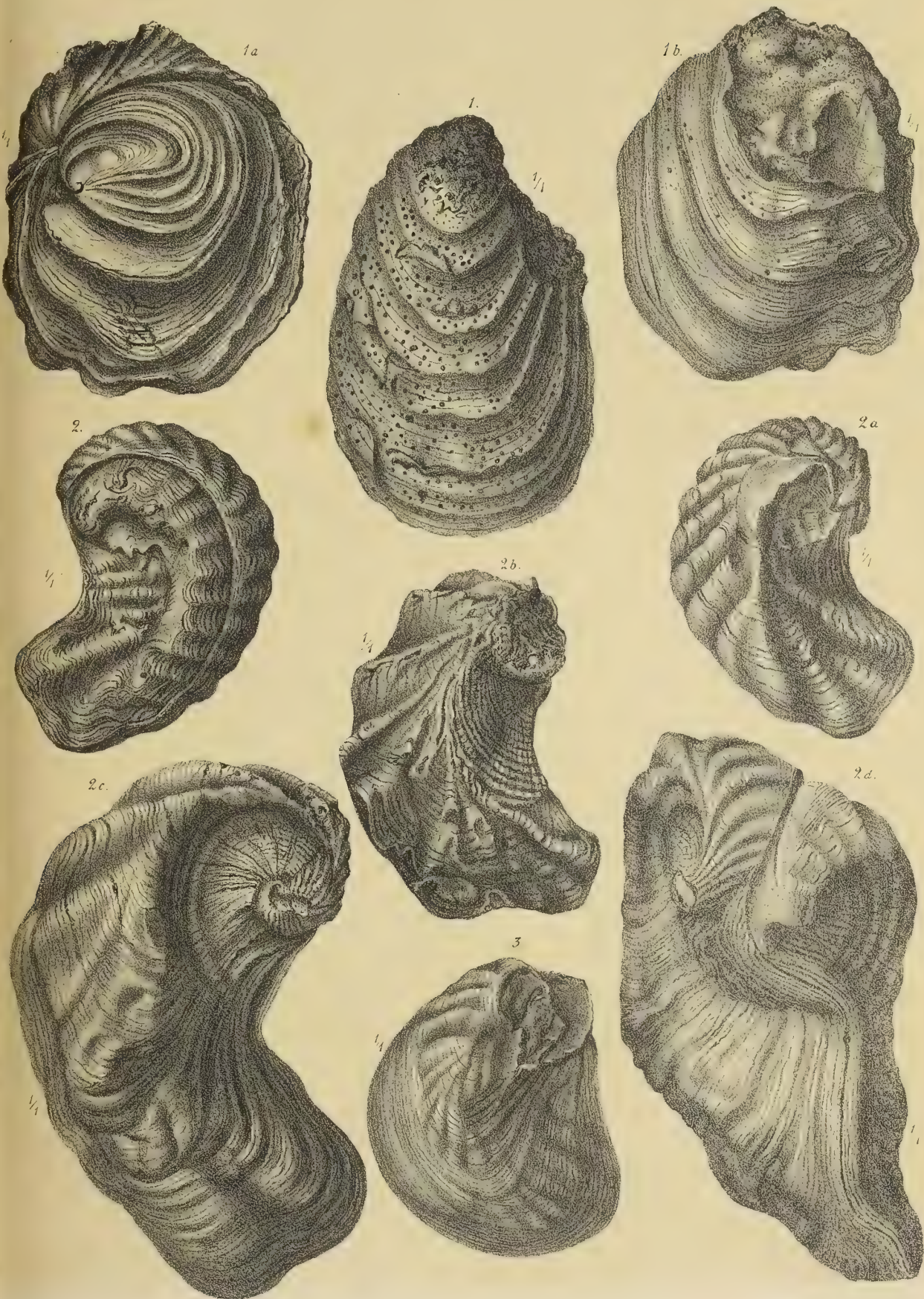
G. SEGUENZA DIS. LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XVII.

TAVOLA XVII.

Fig. 1. *Exogyra flabellata* Goldf. — 1. 1*a*. Un grande esemplare della Var. *B. dilatata* n. veduto d'ambe le valve, raccolto alla Portella di Falcò. — 1*b*. Individuo della Var. *A. trigona* n. trovato a S. Giorgio. — 1*c*. Un esemplare della Var. *F. ecostata* n. da S. Giorgio. — 1*d*. Un individuo che rappresenta la Var. *D. crasseplicata*, raccolto a S. Giorgio.

» 2. *Exogyra olysoponensis* Coq. — 2. Un individuo della Var. *ecostata* n., raccolto nella valle di Lando — 2*a*, 2*b*. Esemplare della Var. *prominens* n., rappresentato in due posizioni, raccolto a S. Giorgio.

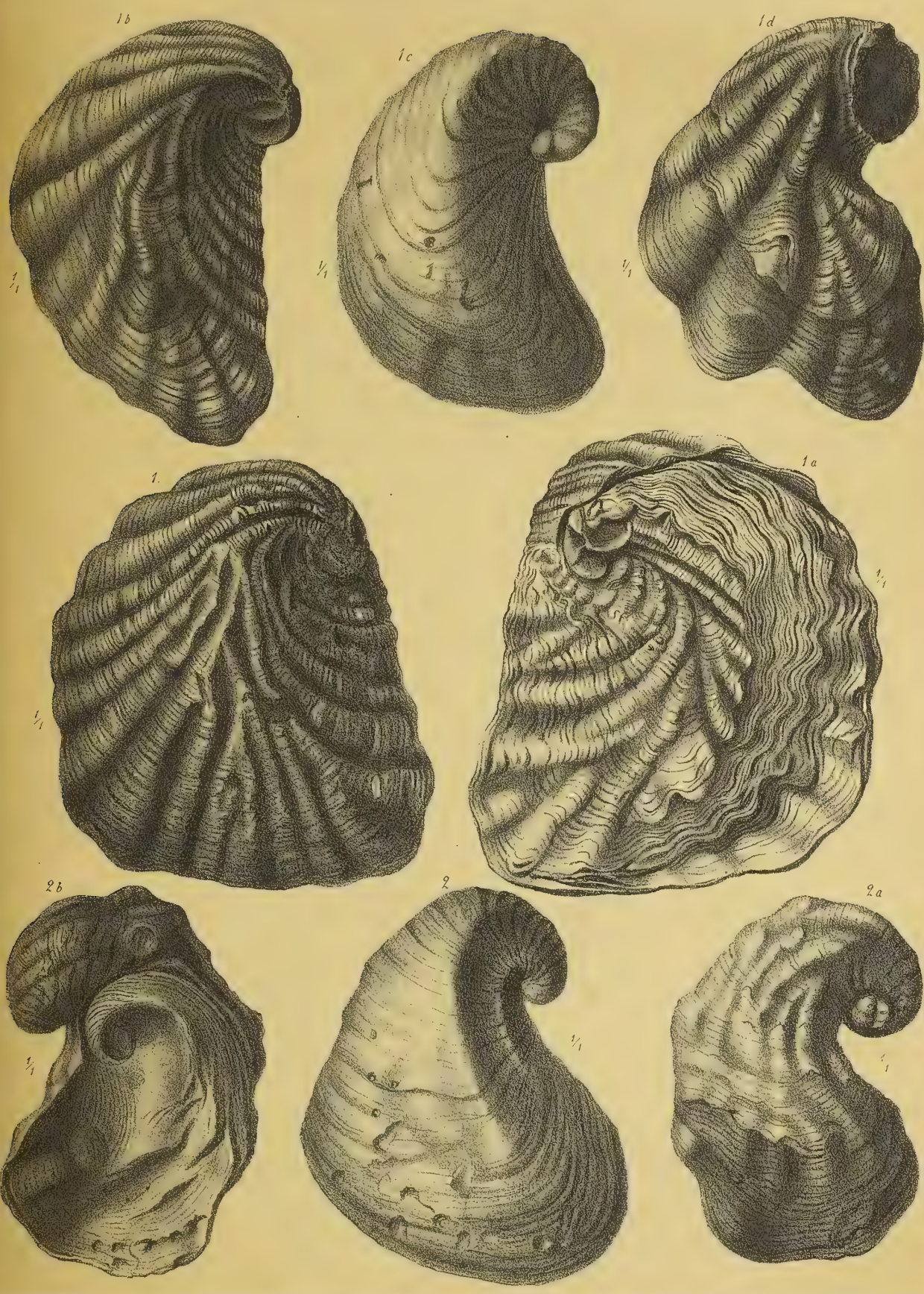
G. SEGUENZA DIS.

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XVIII.

TAVOLA XVIII.

Fig. 1. *Exogyra oxyntas* Coq. — Un grande esemplare della Var. *H. asperrima* n. raccolto a Magliardo. — 1*a*. Var. *G. italica* n. Individuo che proviene da S. Giorgio. — 1*b*, 1*c*. Un esemplare della distinta varietà *I. Brancaleonensis* n., raccolto presso Ferruzzano.

» 2. *Plicatula tenuis* n. sp. — Esemplare trovato aderente all' *E. oxyntas* della Portella di Falcò.

G. SEGUENZA DIS.		LIT. ...

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XIX.

TAVOLA XIX.

Fig. 1. *Exogyra Ratisbonensis* (Schlott.) — 1, 1*a*. Esemplare raccolto a S. Giorgio rappresentante la Var. *inflata* n. veduta in due posizioni. — 1*b*, 1*c*. Altri due esemplari dalla Portella di Falcò spettanti alla medesima varietà; — 1*c*. è giovane.

» 2. *Gryphaea vesciculosa* Gueranger — 2, 2*a*. Un esemplare della Var. *elongata* n. rappresentato in due posizioni, raccolto nella valle di Lando. — 2*b*. Altro individuo dello stesso luogo e della stessa varietà. — 2*c*. Altro esemplare veduto dalla valva superiore, raccolto presso Ferruzzano.

» 3. *Alectryonia syphax* Coq. — 3. Un esemplare da S. Giorgio della Var. *A. pectiniformis* n. — 3*a*. Un grande esemplare della Var. *B. tuberculata* n. proveniente dalla valle di Magliardo.

G. SEGUENZA DIS. LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XX.

TAVOLA XX.

Fig. 1. *Sphoerulites multicostata* n. sp. — 1. Il solo individuo raccolto ad Alì. — 1*a*. Contorno dell'estremità superiore, mostrante la conformazione esterna come l'interiore cavità.

» 2. *Cythere reticulato-squamosa* n. sp. — Un individuo raccolto ad Anconi veduto in due diverse posizioni.

» 3. *Cytheropteron trigonum* n. sp. — Un esemplare completo dalla contrada Falcò veduto in quattro diverse posizioni.

» 4. *Cytherella leopolitana* Reuss. — Esemplare raccolto a Falcò presso Ferruzzano figurato in due posizioni.

» 5. *Vermilia? cretacea* n. sp. — Uno degli individui aderenti ad un' *E. flabellata* raccolta a Caltavuturo.

» 6. *Membranipora normaniana* D'Orb. Var. *exagona* n. — Parte d'una colonia aderente all' *E. clisoponensis* da S. Giorgio.

» 7. *Membranipora longitheca* n. sp. — Porzione d'una colonia fissa sull'*O. Delettrei*, raccolta a Magliardo.

» 8. *Hemiaster Coquandi* Seg. — Esemplare conservatissimo raccolto alla Portella di Falcò e rappresentato in due posizioni.

» 9. *Hemiaster globulus* n. sp. — Il solo individuo raccolto a S. Giorgio e figurato in due posizioni.

» 10. *Hemiaster ovatus* n. sp. — Un esemplare veduto in due posizioni, raccolto a S. Giorgio.

» 11. *Hemiaster gracilis* n. sp. — Un esemplare raccolto a Saittone veduto in due posizioni diverse.

» 12. *Trochosmilia tetracycla* n. sp. — Unico esemplare trovato a Caltavuturo.

» 13. *Leptophyllia multisepta* n. sp. — Un individuo incompleto proveniente da Caltavuturo.

» 14. *Cycloseris minima* n. sp. — Un solo esemplare raccolto a Caltavuturo, figurato in tre posizioni.

» 15. *Cladocora brevis* n. sp. — 15. Una piccola colonia fissa sull'*E. oxyntas* raccolta a S. Giorgio — 15*a*. Un calice ingrandito.

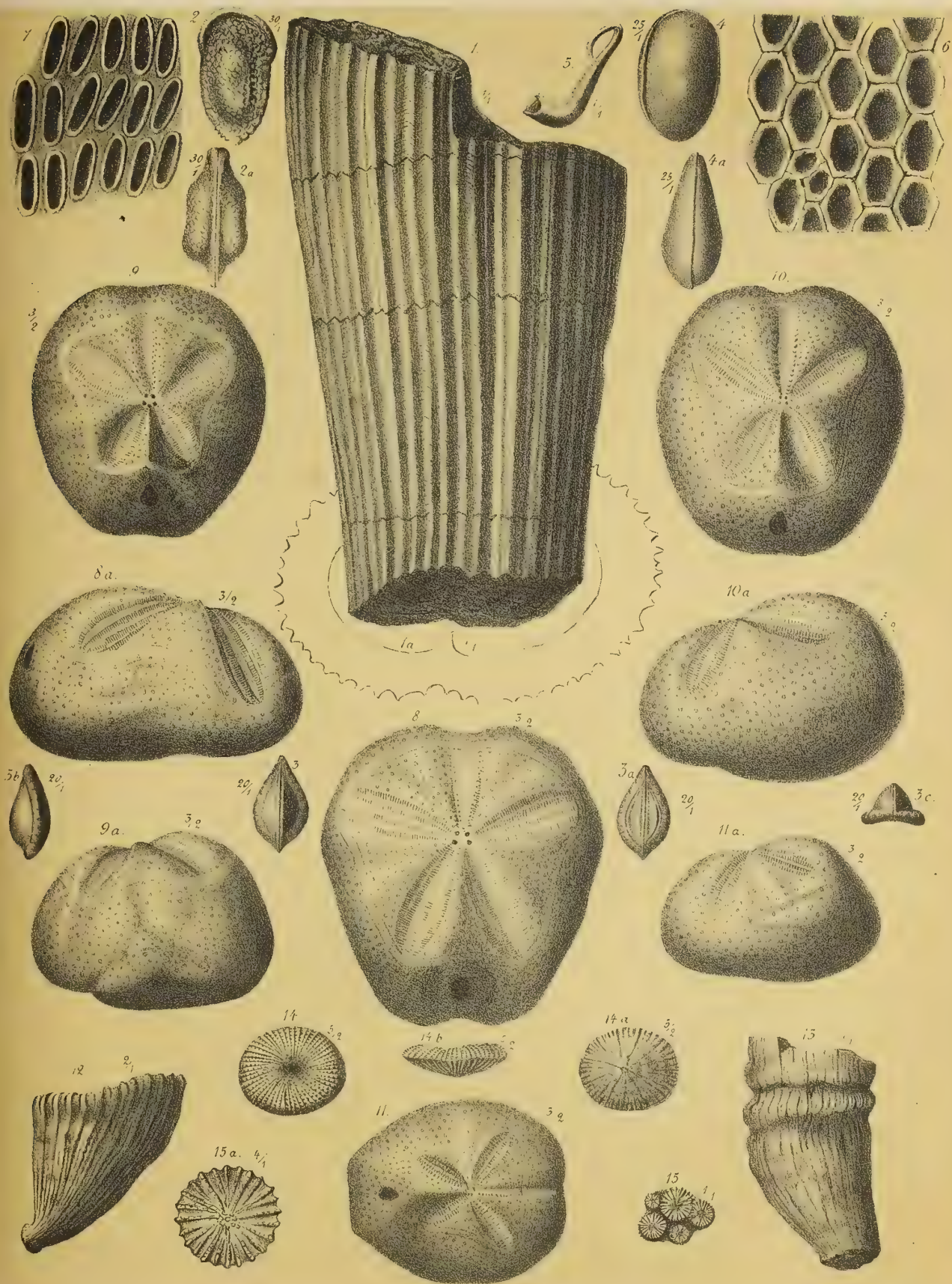
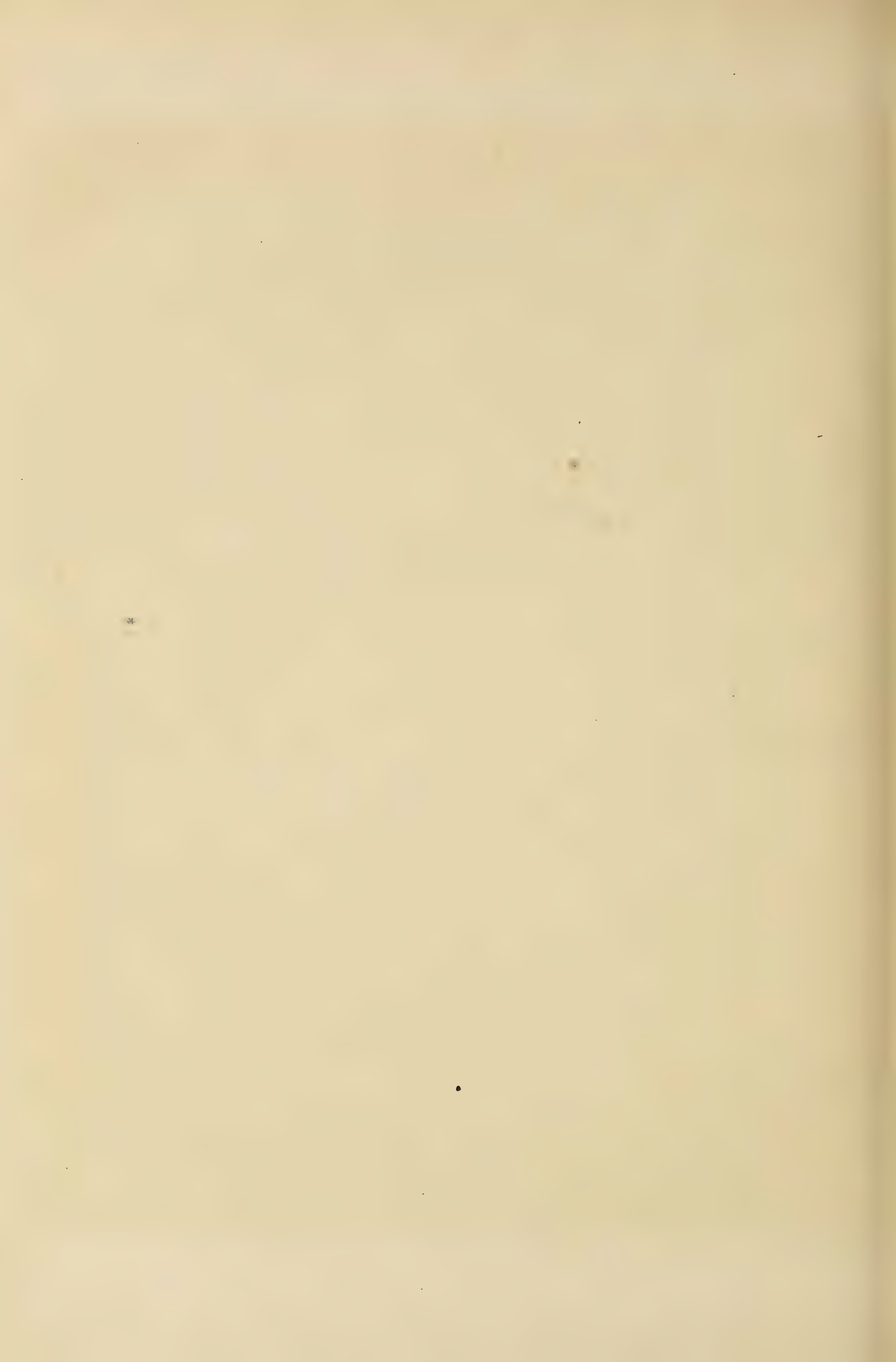
G. SEGUENZA DIS. LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

SPIEGAZIONE DELLA TAV. XXI.

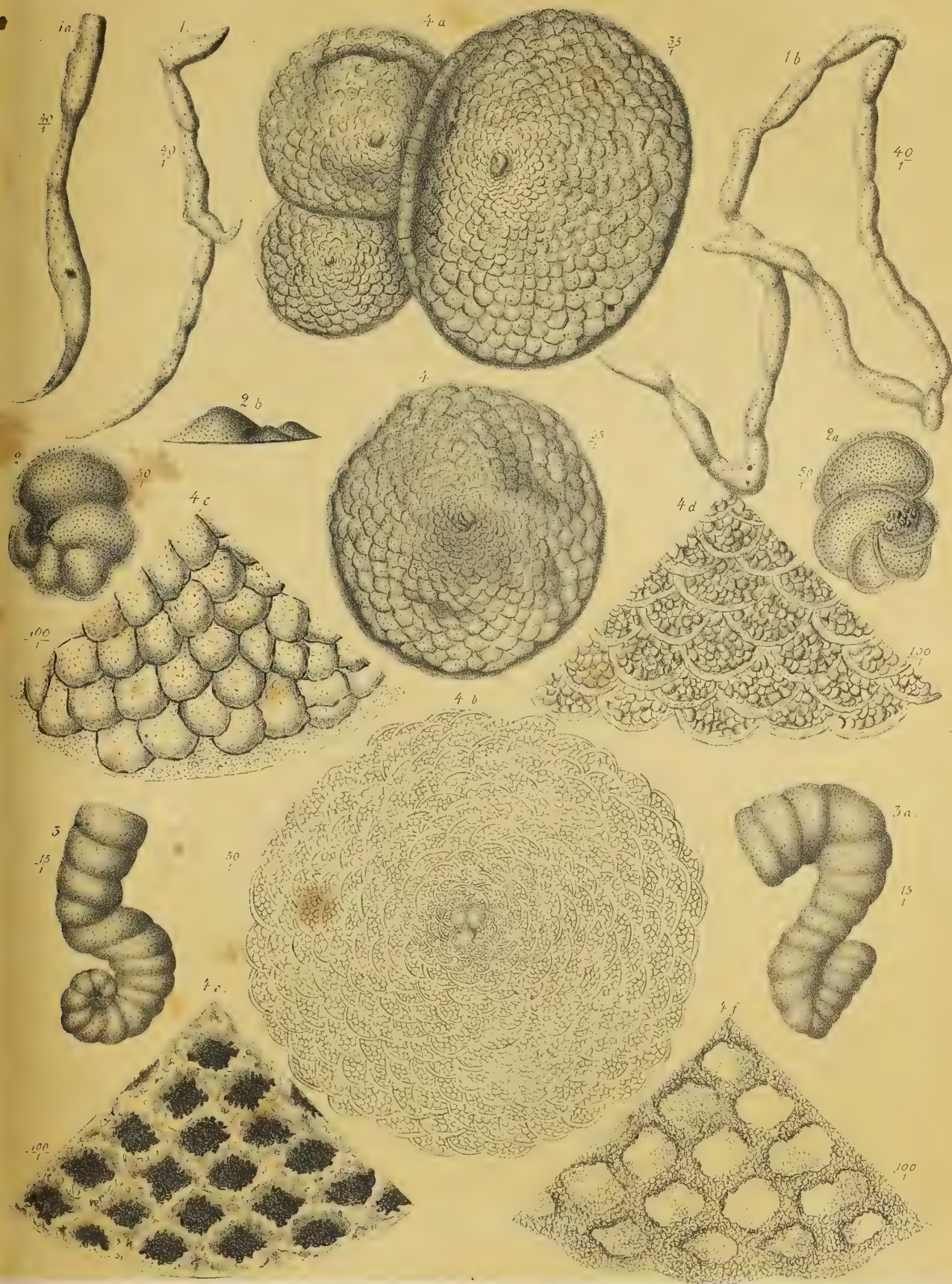
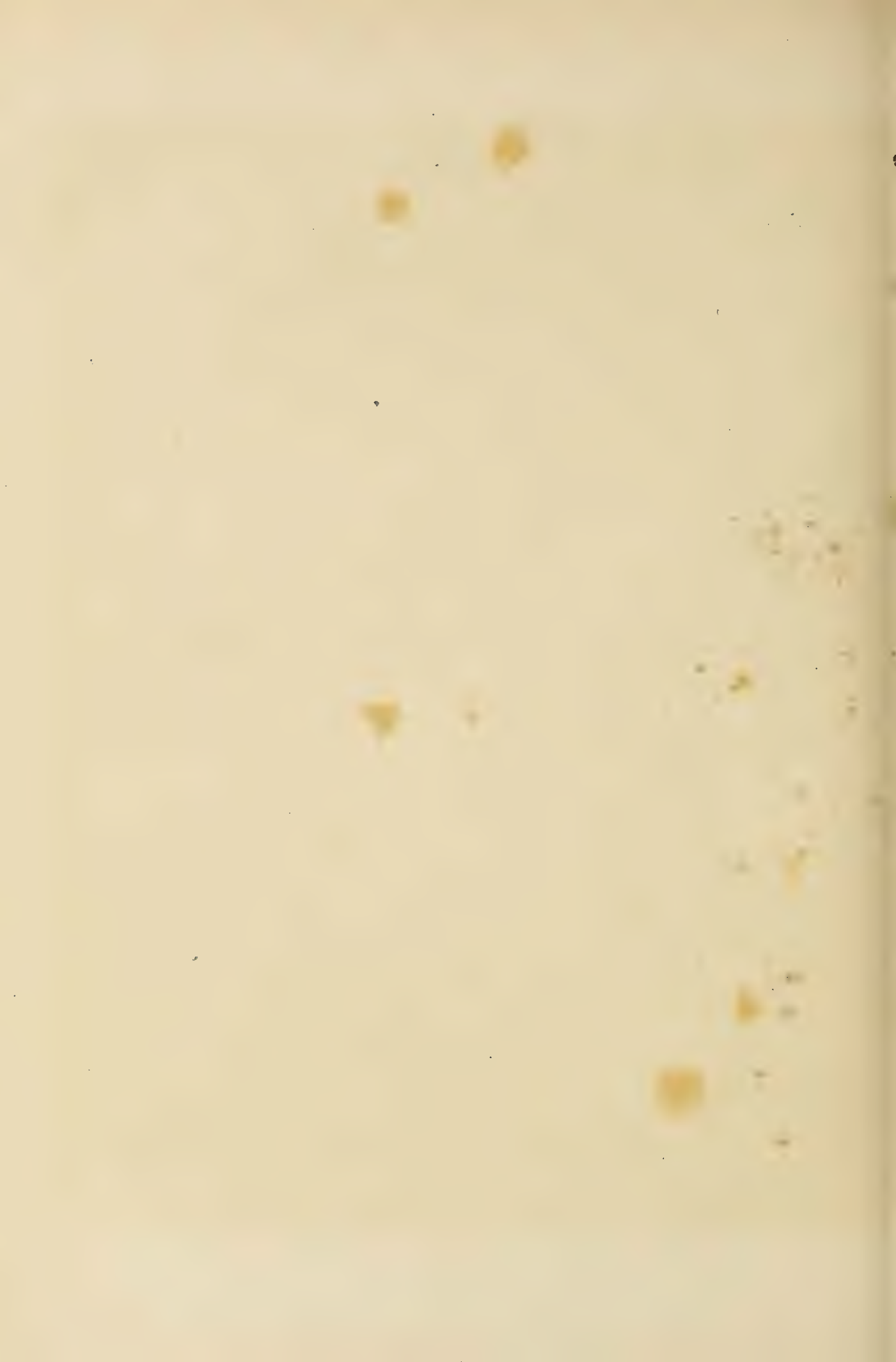
TAVOLA XXI.

Fig. 1. *Placopsilina vitrea* n. sp. — Tre differenti esemplari incrostanti le lamelle dell'*O. Deletrei* raccolta a S. Giorgio.

» 2. *Discorbina plano-convexa* n. sp. — Un esemplare raccolto ad Anconi e veduto in tre posizioni.

» 3. *Lituola cenomana* D'Orb. — Due diverse forme aderenti all'*O. Delettrei* raccolte a S. Giorgio.

» 4. *Planorbulina cenomaniana* n. sp. — 4. Un esemplare regolarmente sviluppato, raccolto a S. Giorgio. — 4*a*. Tre individui non bene sviluppati perchè ostacolati reciprocamente. Esemplare raccolto a S. Giorgio. — 4*c*. Una porzione molto ingrandita guardata dalla superficie. — 4*b*, 4*d*. Un intiero esemplare ed una porzione molto ingranditi, tratti da preparazioni al balsamo per vederne l'interna struttura. — 4*e*, 4*f*. Due porzioni molto ingrandite trattate coll'acido cloridrico, la prima illuminata per mezzo d'una lente, l'altra preparata al balsamo, e veduta per trasparenza.

G. SEGUENZA DIS. LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

Intorno un organo di alcuni embrioni vegetali.
Osservazioni dell'ing. G. BRIOSI [1]
approvate per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 4 dicembre 1881.
(Con tre tavole)

Da un lavoro inedito molto esteso, del quale sino dall'anno scorso ho mandato a codesta r. Accademia in plico sigillato per prenderne data una breve Memoria e più di 100 figure [2], tolgo quanto riguarda un organo — non saprei come altrimenti chiamarlo — che si rinviene in alcuni embrioni vegetali.

Se prendesi ad esaminare un seme di *Eucalyptus globulus* si trova che il suo embrione risulta composto di 2 cotiledoni che rovesciandosi all'indietro abbracciano e rivestono un corpicino centrale, più o meno cilindrico, che costituisce quanto generalmente suolsi denominare la radichetta. L'embrione non è accompagnato nè da endosperma, nè da perisperma, ed è privo di piumetta, nudo essendo il suo cono meristemale caulinare.

I cotiledoni si avvolgono a spira attorno al detto corpicino, in modo cioè che di un cotiledone (sono reniformi) il lobo sinistro *a* (fig. 1), viene ricoperto dal lobo destro *b* dell' altro cotiledone, ed il lobo destro *a'* del primo, copre invece il lobo sinistro del secondo cotiledone.

La fig. 1 che rappresenta appunto uno di questi embrioni, nel quale si sono cogli aghi sollevati i cotiledoni, mostra chiaramente tale disposizione. E sin qui nulla di straordinario, poichè i semi delle mirtacee, alle quali gli eucalipti appartengono, non posseggono albume, e constano unicamente della buccia, dei cotiledoni e della radichetta.

Esaminiamo ora con maggiore attenzione questo ultimo corpicciuolo, che non è così semplice come si presenta. Prima di tutto una osservazione più minuta mostra come realmente non sia cilindrico, ma invece quasi sempre vada ingrossando verso la estremità inferiore ove diviene leggermente claviforme. Se poi lo si osserva con qualche accuratezza al microscopio, anche senza alcuna preventiva preparazione, o si vede sporgere dal mezzo della estremità inferiore un piccolo corpicino mammellonare, o, quanto meno, si vede che questa estremità è aperta e terminante con un lembo di struttura irregolare, quale non suolsi rinvenire nelle radichette embrionali delle piante dicotiledoni. E se si opera una sezione longitudinale e centrale secondo l'asse della detta radichetta ottiensi una lamina che il microscopio mostra avere la forma rappresentata nella fig. 3.

[1] Questa Memoria fu presentata alla Accademia nel giugno del 1881.

[2] Le figure 7, 8, 9, 10, 11 di questa Memoria fanno parte di quelle depositate all'Accademia nell'anno passato.

Il detto corpicino centrale quindi non è formato dalla sola radichetta, ma consta invece, nella sua massima parte, dell'asse ipocotile, e solo l'ultima estremità costituisce la radichetta, la quale è sempre cortissima ed appena accennata (fig. 3). Questa radichetta poi, non è nuda ma invece è circondata tutta all' ingiro da un corpo che ha forma di manicotto, o meglio di calotta aperta alla sommità, manicotto che abbraccia e involge tutta la radichetta all'infuori dell'estremità.

Le fig. 4 e 12, la prima delle quali rappresenta l'estremità del corpicino centrale visto di fronte, ove *r* è la punta della radichetta e *o* il corpo che l'attornia, permettono di formarsi facilmente un' idea di tale singolare struttura.

Che cosa rappresenta ora, e che funzione esercita, questo speciale corpo attorno alla radice embrionale?

Per arrivare a comprenderne qualcosa vediamo a quali trasformazioni va esso soggetto nel processo della germinazione.

Se si mettono a germinare semi di *Eucalyptus globulus*, dapprima incomincia a svilupparsi l'asse ipocotile che, allungandosi, esce rompendo la buccia del seme. Quasi contemporaneamente il manicotto della radice embrionale incomincia a rigonfiare, si fa più grosso del fusticino, e allontanandosi a poco a poco dalla radichetta che in sè racchiude, assume la forma di una specie di turbante, fig. 5 [1].

Questo corpo continua ad allargarsi e a distendersi sino a prendere una posizione pressochè normale all' asse del fusticino stesso, formando una specie di disco solido, lievemente concavo convesso, e colla concavità costantemente rivolta verso la punta radicale, come vedesi in sezione nella fig. 10. Mentre questo manicotto si apre, tutta la sua superficie, tanto esterna che interna, o superiore ed inferiore, si va ricoprendo di peli bianchi. Questi peli sono molto lunghi, semplici (una sola volta ne ho visto uno ramificato) unicellulari, con parete sottile e plasma incolore, arrotondati all' estremità, ritti, disposti in un piano pressochè normale all' asse del fusticino o leggermente rivolto verso la radice, in modo da formare come un bellissimo collarino bianco, che dà a queste piante un aspetto elegante durante la loro germinazione. La fig. 7 non è in alcun modo esagerata, anzi se la germinazione ha luogo in uno degli apparecchi di terra cotta di Nobbe e non viene disturbata, si ottengono esemplari anco più appariscenti di quello rappresentato nella figura.

Questi peli sono produzioni epidermoidali, provengono cioè dalle cellule dell'epidermide di questo organo, le quali rigonfiando la loro parete superiore libera, prendono forma di bottiglia da prima, e poi quella di peli molto lunghi, quali appunto si vedono disegnati nelle figure 10 e 11. Mentre il disco ed i suoi peli finiscono di svilupparsi, la radichetta comincia ad allungarsi, ma non si ricopre subito di peli radicali, invece rimane per qualche tempo perfettamente nuda (fig. 7). Più tardi i peli appaiono

[1] Questa figura rappresenta un seme che conteneva 2 embrioni perfettamente sviluppati e completi, benchè avessero i cotiledoni meno grandi del consueto. È un esempio di poliembriogenia che pare raro negli eucalipti, poichè fu l'unico che vidi sopra migliaia di semi che osservai a germinare. Esempi di simile poliembriogenia si hanno nel mandorlo, nel caprifico ecc. (Vedi, fra gli altri, il nostro G. Gasparini, *Ricerche sulla origine dell'embrione seminale in alcune piante fanerogame*. Napoli 1846, pag. 37).

anche sulla radichetta fittonale; allorquando però questi sonosi ben bene sviluppati, quelli del manicotto incominciano ad avvizzire e ben presto, raggrizzandosi, muoiono e scompaiono interamente.

Il manicotto solido che li aveva prodotti rimane ancora per qualche tempo, ma non esercita più alcuna funzione, e col crescere della piantina si ammortizza e cade, non rimanendo di lui alcuna traccia. È quindi un organo embrionale temporaneo la cui funzione si esercita unicamente durante la germinazione, organo del quale, questa compiuta, la pianta si libera come di cosa che per essa non ha più alcun valore

Quale funzione esercita quest'organo? Io credo non vi possa essere dubbio che trattasi di un organo di nutrizione, poichè i suoi peli non sono punto dissimili da quelli dei quali più tardi si ricopre la radice fittonale, e perchè simile è il loro modo di comportarsi nel terreno.

Ho infatti messo a germinare semi di *E. globulus* oltre che nell' atmosfera, entro terra vegetale, entro sabbia ed entro argilla pura, a diverse profondità; e non solo essi hanno sempre prodotto detto collarino di peli, e nessuna diversità ho avvertito nel suo sviluppo, ma sempre ai peli del collarino aderirono fortemente le particelle del terreno, assolutamente come avviene pei peli della radice.

Quest' organo è formato di solo tessuto parenchimatoso, e non contiene alcun fascio fibro-vascolare, ciò che pur bene si accorda colla funzione che compie ed il breve tempo che dura. Più sopra ho detto che nell'embrione la radichetta è appena accennata; or bene non direbbesi quasi che natura appunto per questo avesse provvisto tali embrioni di un organo speciale, onde assumere nei primordi della vita di queste piante, che crescono tanto rapidamente, le funzioni della radice e dare tempo a questa di svilupparsi?

Lo studio della sua formazione entro il sacco embrionale, studio che io non ho potuto ora seguire, dirà con precisione il come e da che esso abbia origine; cioè se provenga da una specie di ripiegamento del tessuto corticale dell'asse ipocotile, oppure da tessuto apicale simile a quello delle coleorizze; quì noto solo che esso occupa il posto del colletto, di quel colletto che i nostri buoni vecchi dicevano esistere nelle piante, in forma di rigonfiamento o di ristringimento, nel luogo di separazione del fusto dalla radice, ove segnava il piano di separazione dal quale, secondo essi, partivano le fibre ascendenti e le fibre discendenti della parte aerea e della parte sotterranea della pianta ([1]).

Nessuno di questi probabilmente aveva visto germinare eucalipti, certo nessuno di essi ne ha mai parlato; ora è strano come questa idea di colletto abbandonata dai botanici moderni, perchè ipotetica, così bene si adatti, morfologicamente, agli eucalipti. Si direbbe che questa idea fosse nata nella mente dei botanici osservando la germinazione di tali piante, perchè nulla più e meglio dell'organo sopra descritto assomiglia appunto ad un collarino; ad uno di quei collarini per es. che vedonsi nei costumi spagnuoli dipinti dal Velasquez e da altri sulla fine del cinquecento ed il principio del seicento.

([1]) Le Maout et Decaisne, *Traité général de botanique,* p. 2.

Eucalipti. — Quest'organo non è esclusivo dell'*E. globulus*, anzi deve essere comune a tutti gli eucalipti, poichè lo ho rinvenuto in tutte le specie che ho preso ad esaminare, senza alcuna eccezione. Lo osservai infatti direttamente negli embrioni dell'*E. calophylla*, dell'*E. marginata*, dell'*E. erythrocoryx*, dell'*E. gigantea*, dell'*E. urnigera*, dell' *E. coccifera*, e dell' *E. pauciflora*, e vidi svilupparsi il collarino solito di peli colla germinazione, dall'*E. paniculata*, dall'*E. obliqua*, dall'*E. gunnii*, dall'*E. polyanthema*, dall' *E. fissilis*, dall'*E. goniocalyx*, dall'*E. amygdalina*, dall'*E. macrosera*, dall'*E. colossea*, dall'*E. capitellata*, dall' *E. dichromoploia*, dall' *E. corymbosa*, dall'*E. dealbata*, dall'*E. sieberiana*, dall'*E. haemastoma*, e dall'*E. maculata* (¹).

La fig. 15 rappresenta l' estremità dell' asse ipocotile dal quale sporge la radichetta *r* d' un embrione di *E. erythrocoryx*, e le fig. 13, 14 rappresentano sezioni centrali e longitudinali di fusticino embrionale di *E. calophylla* e di *E. marginata*. In questa ultima il manicotto *cc* vedesi allontanato dalla radichetta, non perchè così si rinvenga nel seme, nel quale anzi ad essa sempre è addossato, ma perchè ne fu discostato dal rasoio nell' eseguire il preparato. Nella fig. 14, *d* rappresenta il meristema caulinare, onde vedesi come nell'*E. marginata* l'asse ipocotile embrionale sia estremamente corto.

Come è ben naturale, oltre che agli eucalipti, avrei desiderato estendere queste ricerche a tutti i generi delle mirtacee, ed anco alle specie delle famiglie che a questa più strettamente si rannodano, ma sventuratamente pochi semi ho potuto avere a mia disposizione (²), e quindi non complete ancora sono le osservazioni che sopra di esse posseggo e che quì brevemente riferisco.

Callistemon. — Ho esaminato 6 specie di *Callistemon*, il *C. rigidum* R. Br., lo *speciosum* D. C., il *pinnifolium*, il *brachyandrus* Lindl. il *lanuginosum*, e il *Sieberi* D. C. In queste tutte, nel germinare si rigonfia l'estremità inferiore dell'asse ipocotile, e si formano come negli eucalipti delle specie di clave, le quali ricopronsi di peli unicellulari, mentre dal di sotto del rigonfiamento vedesi sporgere la radichetta più o meno cuneiforme.

Fabricia. — Nella *Fabricia levigata* al piano di separazione della radice dal fusto producesi pure durante la germinazione un grosso anello di peli come vedesi nella figura 18.

Leptospermum. — Qualche cosa di simile osservai colla germinazione nelle 2 specie, *stypheloides*, e *grandiflorum* Lodd, come pure in 2 specie di *Melaleuca*, la *M. glaberina* e la *M. linarifolia*.

Se però nell' embrione di tutte queste piante preesista come negli embrioni degli eucalipti, l' organo a manicotto o a calotta aperta che avvolge la radichetta, attesa la piccolezza di questi semi, io non mi sono occupato di verificare.

Myrtus. — Il *Myrtus Tarentina* ed il *M. romana* nel germinare producono pure un anello simile al descritto (fig. 19); solo generalmente più inclinato verso l'apice

(¹) Eccettuati i semi delle specie *E. urnigera*, *coccifera*, e *pauciflora* i quali gentilmente mi furono forniti dal Ministero di Agricoltura, che li aveva avuti direttamente dall'Australia, tutte le altre specie provengono da Wilmorin di Parigi.

(²) Debbo questi ultimi semi alla cortesia del prof. G. Kraus direttore dell' Orto Botanico di Halle, e del prof. N. Pedicino, direttore dell'Orto Botanico di Roma, ai quali rendo vive grazie.

radicale; ma in esse nessun organo speciale preesiste nell'embrione, nè alcun ricrescimento si forma durante la germinazione.

Onagrarieae.

Epilobium. — Di questo genere ho potuto esaminare 3 specie, l'*Ep. montanum* L., l'*Ep. Dodonaei* Will., e l'*Ep. alsinifolium* Will., e qui pure si ha lo sviluppo dell' anello di peli come nei *Callistemon*, nei *Leptospermum* ecc., mentre in 4 specie di *Oenothereae*, la *biennis* L., la *Sellowii* Link et Otto, la *missouriensis* Sims, e la *tetraptera* Cav. non che, nella *Godetia Schamii* Lind., nella *Godetia Wildenoviana* Spach. e nella *Clarkia elegans*, nulla di tal genere ho potuto osservare.

Lythrarieae.

Il *Lythrum Salicaria* L. e l' *Hemia salicifolia* svilupparono pure colla germinazione un bellissimo anello di peli lunghissimi.

SPIEGAZIONE DELLE FIGURE

FIG. 1. Embrione d'*Eucalyptus globulus* coi cotiledoni *a a'*, *b b'* sollevati; *i* asse ipocotile; *r* radichetta; *o* manicotto. Ingr. 25 D. circa.

» 2. Asse ipocotile dell'embrione di *E. gl.*; *r* radichetta; *o* manicotto ovvero collarino della radichetta; *c*, *c* picciuolo dei cotiledoni; *m* meristema caulinare. Ingr. 30 D. circa.

» 3. Sezione longitudinale centrale del fusticino ipocotile ed embrionale dell'*E. gl.*; *r* radichetta; *o manicotto*. ecc. Ingr. 30 D. circa.

» 4. Estremità inferiore del fusticino embrionale di *E. gl.* visto di fronte; *r* punta della radichetta; *o* manicotto. Ingr. 70 D. circa.

» 5. Seme di *E. gl.* germinante e contenente 2 embrioni: *r.* radichetta; *o* manicotto; *p* peli del manicotto in via di sviluppo. Ingr. 30 D. circa.

» 6. Seme germinante e molto ingrandito di *E. gl.*; *r* radichetta; *o* collarino di peli; *i* asse ipocotile; *c* cotiledoni; *b* buccia seminale.

» 7. Id. più sviluppato, *R* radice fittonale: resto id.

» 8. Id. stadio ancora più sviluppato; anche la radichetta fittonale *R* è ora ricoperta di peli *p*; resto id.

» 9. Sezione longitudinale e centrale attraverso il collarino di *E. gl.* in germinazione: *x x* manicotto di tessuto parenchimatoso; *p* peli (i rimanenti non si sono disegnati per non confondere la fig.) *Pl.* regione dei fasci fibro-vasali e del midollo; *Pi* cilindro corticale parenchimatoso. Ingr. 60 D. circa.

» 10. Sezione longitudinale attraverso il collarino di *E. gl.*; *A* collarino; *p* peli; *Pi* corteccia del fusticino; a destra della linea *c c* comincia il libro. Ingr. 100 D. circa.

» 11. Sezione trasversale del fusticino di *E. gl.* attraverso il collarino di peli *p*: *Pi* corteccia e manicotto, *a* fasci fibro-vasali primitivi. *Pl* midollo. Ingr. 100 D. circa.

» 12. Sezione longitudinale e centrale attraverso la radichetta *r* ed il manicotto *o*, di embrione di *E gl.* Della porzione di destra del manicotto è solo indicato il contorno per essersi il preparato guasto da questa parte. Ingr. 100 D. circa. Questa figura nella regione meristemale non venne esattamente riprodotta dal litografo.

» 13. Sezione longitudinale e centrale attraverso asse ipocotile embrionale di *E. marginata*: *r* radichetta; *c* manicotto. Ingr. 30 D. circa.

» 14. Id. di *E. calophylla.*

» 15. Parte inferiore di asse ipocotile embrionale di *E. erythrocoryx.* Ingr. 40 D. circa.

» 16. Id. di *Callistemon rigidum.* Ingr. 40 D. circa.

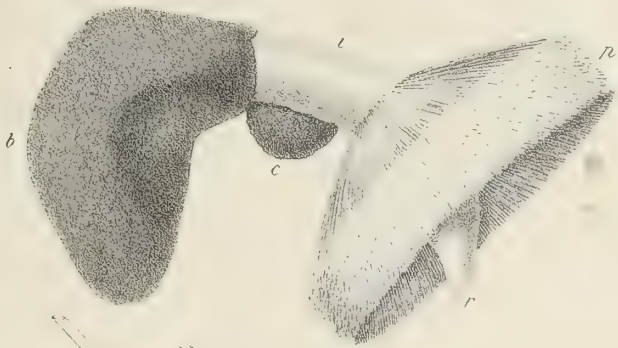
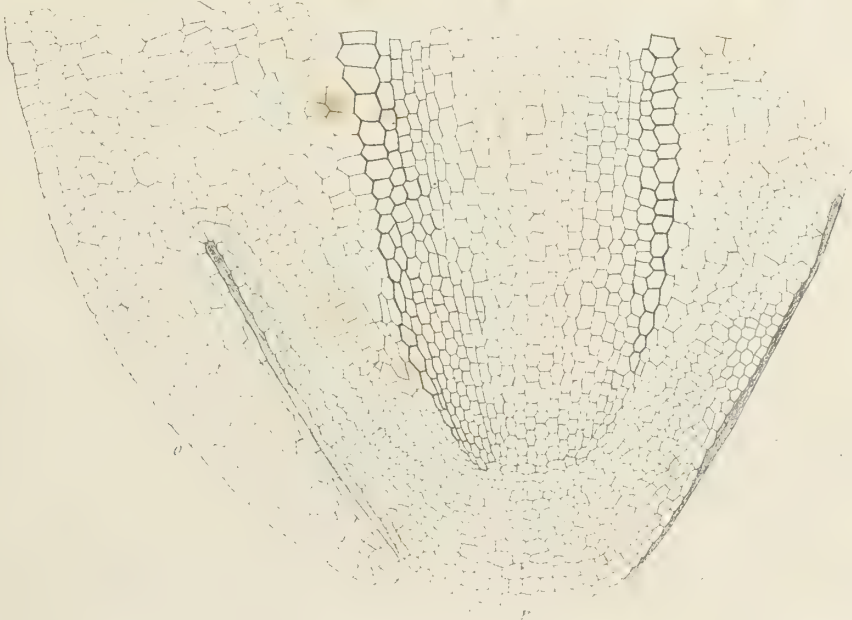
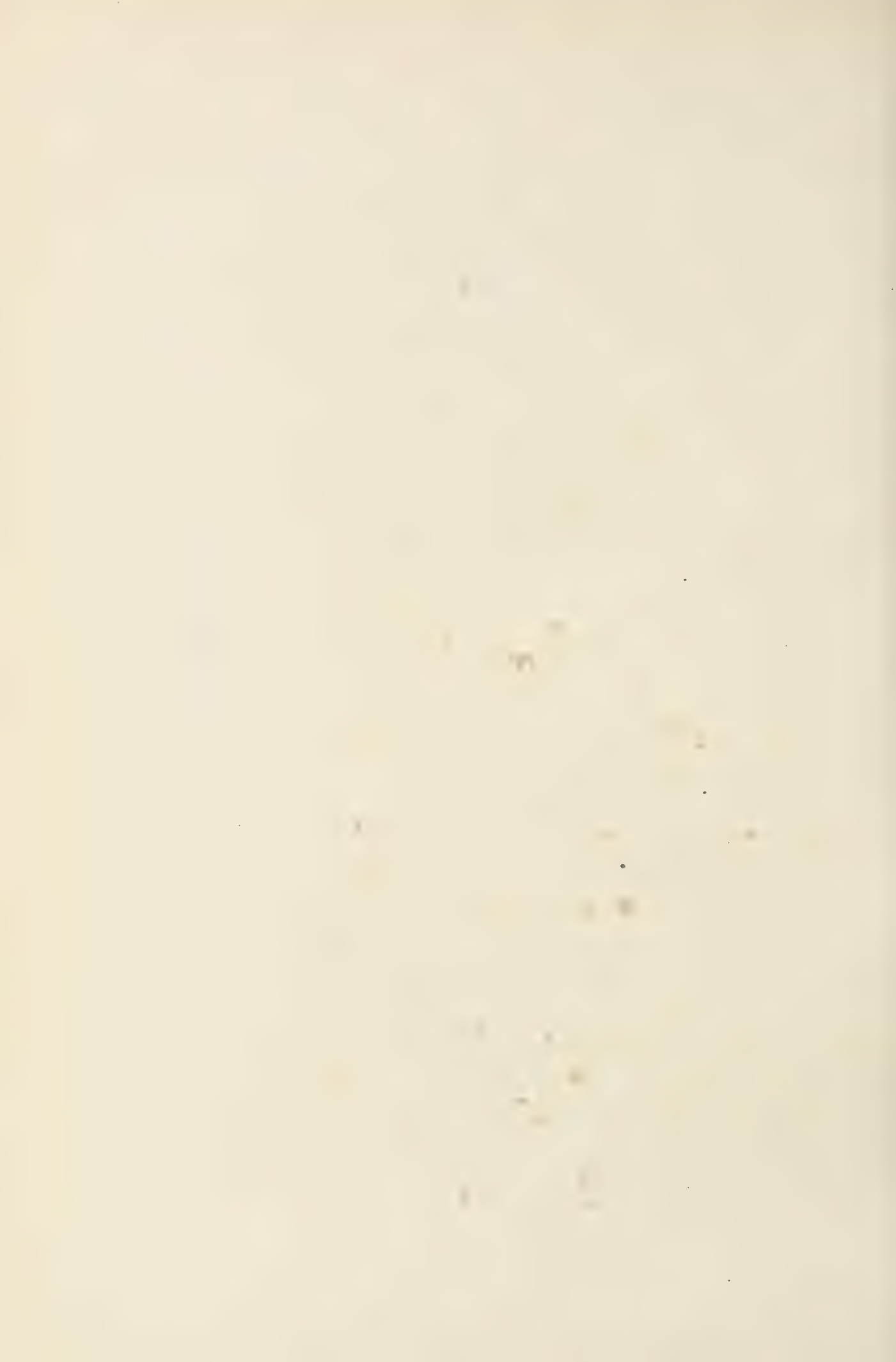
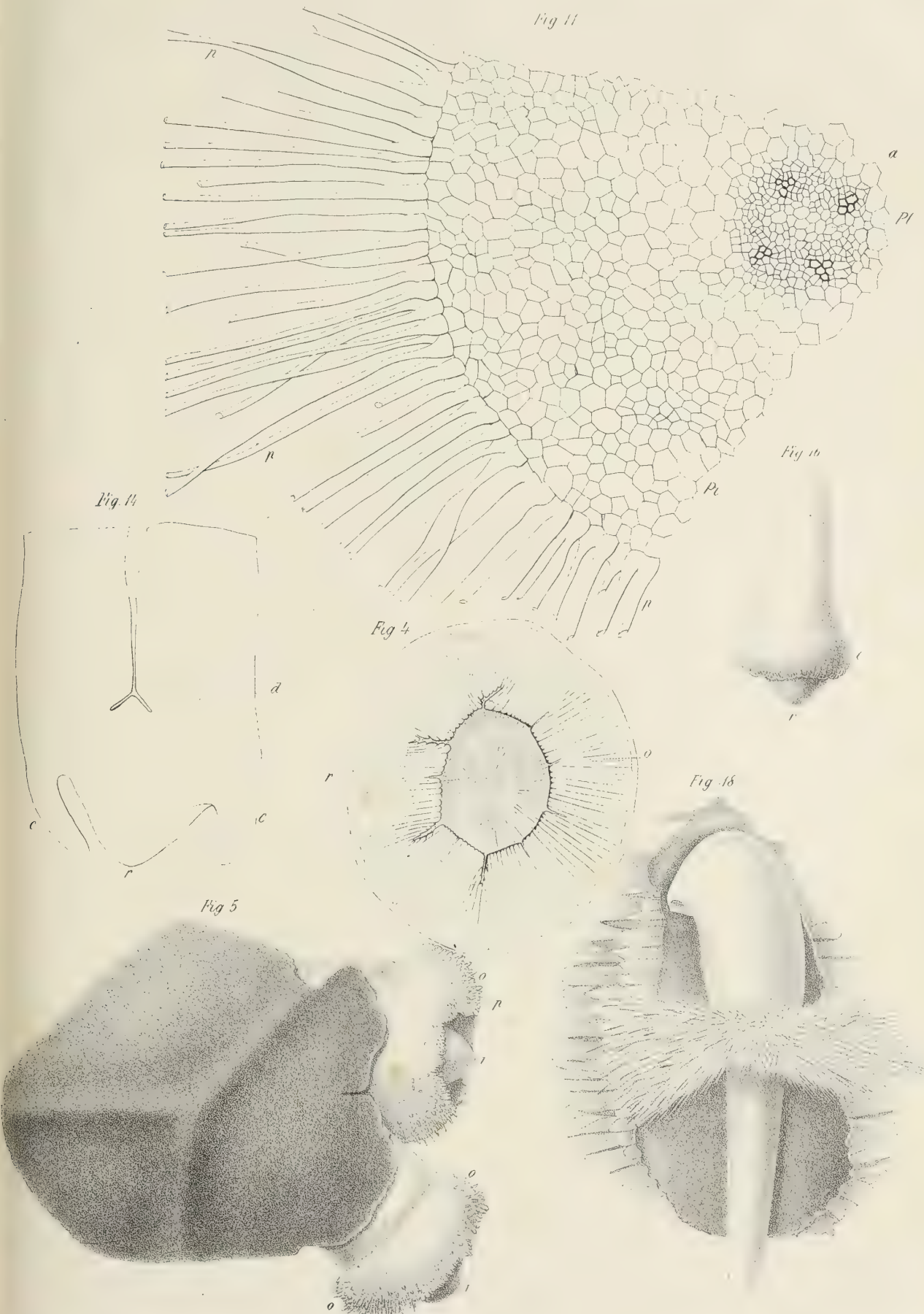
» 17. Seme germinante di *Callistemon pinifolium*; *r*. radichetta; *b* buccia del seme. Molto ingrandito.

» 18. Id. di *Fabricia levigata.* Ingr. 30 D. circa.

» 19. Id. di *Myrtus Tarentina*, molto ingrandito; *c* porzione della buccia del seme sollevata dalla radichetta nell'uscire.

Lit. Bruno e Salomone Roma

Fig. 19
Fig. 13
Fig. 11
Fig. 15
Fig. 12

Fig 11
p
a
Pl
p
Pl
p
Fig 16
Fig. 14
d
c
c
r
Fig 4
r
o
Fig 18
Fig 5
o
p
o

Studî sui composti della serie del pirolo. I derivati della pirocolla.

Iª Memoria di G. L. CIAMICIAN e L. DANESI.

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 4 dicembre 1881.

La poca stabilità dei derivati del pirolo oppose sino ad ora difficoltà quasi insuperabili allo studio di queste interessanti sostanze. Basti il ricordare che, quantunque già da molto tempo si conosca il pirolo e l'acido carbopirolico, non sono descritti ancora nè i derivati alogenati, nè i nitroderivati di questi due corpi.

Fino ad ora non sono noti che alcuni bromoderivati dell'etil- ed acetilpirolo. — R. Schiff [1] ottenne, per azione diretta del bromo sull'acetilpirolo, un composto di addizione con due atomi di bromo ($C_4 H_4 Br_2 N. C_2 H_3 O$). Ch. A. Bell [2] descrisse più tardi il tetrabromoetilpirolo ($C_4 Br_4 N. C_2 H_5$), da lui prima [3] creduto un composto di addizione, ottenuto per azione dell'acqua di bromo sull'etilpirolo; e la tribromodietilcarbopirolamide ($C_4 Br_3 N C_2 H_5. C O N H C_2 H_5$), ottenuta pure per la stessa via.

Come noi già accennammo in una Nota preliminare, presentata a questa Accademia nello scorso giugno, è facile ottenere i prodotti di sostituzione dell'acido carbopirolico, partendo dalla pirocolla. Questa sostanza, scoperta fra i prodotti della distillazione secca della gelatina da Weidel e da uno di noi [4], si trasforma per azione della potassa bollente in acido α) carbopirolico. Partendo perciò dai derivati alogenati e dai nitrocomposti della pirocolla, si deve giungere ai corrispondenti derivati dell'acido α) carbopirolico.

Noi abbiamo tenuto questa via, e pubblichiamo in questa prima Memoria i risultati da noi finora ottenuti, riserbandoci di ritornare fra breve sull'argomento.

Preparazione della pirocolla.

Intorno alla preparazione della pirocolla, poco abbiamo da aggiungere a quello che è stato detto nella Memoria già citata. I rendimenti di questa sostanza, che sono sempre assai cattivi, variano a seconda della qualità della gelatina, in modo che le qualità più scadenti ne danno assai meno di quelle migliori, mentre che dalla colla forte non se ne ottiene punto. La quantità di pirocolla che si ricava dipende ancora dal modo con cui viene condotta la distillazione, sicchè distillando a temperatura relativamente bassa non se ne forma quasi niente. Per la buona riuscita di questa preparazione è necessario scaldare poco da principio, ma di elevare poi la temperatura prima che il carbonato ammonico abbia tempo di condensarsi nel tubo.

(¹) Berl. Ber. X, 1500.— (²) Berl. Ber. XI. 1813.— (³) Berl. Ber. X, 1863.— (⁴) Monatshefte f Chemie I. 512 e Gazz. chim. ital. XI, 28.

Azione del bromo sulla pirocolla.

Il bromo agisce sulla pirocolla a temperatura ordinaria, per completare la reazione abbiamo riscaldato per circa due ore, in tubi chiusi, a 120°, una parte di pirocolla e due parti di bromo, con una quantità di acido acetico glaciale sufficiente a sciogliere la prima. Nell'aprire i tubi si svolge molto acido bromidrico. Si versa il contenuto dei medesimi, che è in parte solidificato ed ha un colore rosso bruno, in molt'acqua, ottenendo un precipitato fioccoso. Il bromo-composto ottenuto nel modo descritto, viene trattato di nuovo con acido acetico glaciale bollente, nel quale si scioglie quasi completamente. Si separa filtrando questo piccolo residuo insolubile, che ancora non abbiamo studiato, e si tratta la soluzione rosso-bruna con carbone animale. Si ottiene così un liquido colorato in giallo chiaro, che concentrato si versa in molt'acqua. Il precipitato che in tal modo si produce è colorato lievemente in giallo; questa materia è però un miscuglio di due corpi, l'uno dei quali si scioglie facilmente nell'acido acetico glaciale e nell'etere, mentre che l'altro è assai meno solubile in questi due solventi.

Per separare questi bromo-composti ci siamo serviti della proprietà di questi due corpi di sublimare a temperature molto diverse. La sostanza più solubile nell' etere sublima molto facilmente a temperatura poco elevata, mentre che per volatilizzare l'altra bisogna riscaldare molto più forte.

Dopo ripetute sublimazioni siamo riesciti a separare le seguenti sostanze: la *Monobromopirocolla* che è la più volatile e che si ottiene in maggiore quantità; la *Bibromopirocolla* che è assai più difficilmente sublimabile, ed alcune tracce di pirocolla rimasta inalterata.

Monobromopirocolla. — Questa sostanza forma delle squamette quasi incolori, in massa tinte lievemente in giallo, d'uno splendore madreperlaceo, solubilissime nell' etere e nell'acido acetico. Per lento svaporamento della soluzione eterea si ottiene in forma di prismi incolori. Fonde a 190°-192°.

Le analisi diedero numeri corrispondenti alla formola:

$$« C_{10} H_5 Br N_2 O_2 »$$

I. 0,1830 gr. di sostanza diedero 0,1306 gr. di Ag Br.

II. 0,1570 gr. di sostanza diedero 0,2623 gr. di CO_2 e 0,0352 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per $C_{10} H_5 Br N_2 O_2$
	I	II	
Br	30,37	—	30,19
C	—	45,56	45,28
H	—	2,49	1,89

Dalla formazione di questo monobromocomposto risulta dimostrato ancora una volta, che la pirocolla ha realmente la doppia formola « $C_{10} H_6 N_2 O_2$ ».

Bibromopirocolla. — La parte che sublima a temperatura più elevata ha un aspetto assai diverso da quello della sostanza ora descritta. Forma delle pagliette gialle, pesanti, che hanno forma di penna; insolubili quasi nell'etere e fondenti a 288°-290°.

La piccola quantità della sostanza non ci permise di fare che una determinazione di bromo, dalla quale risulta essere questo corpo una pirocolla bibromurata, dalla formola:

$$C_{10} H_4 Br_2 N_2 O_2$$

0,1343 gr. di materia diedero 0,1492 gr. di Ag Br.

In 100 parti:

	trovato	calcolato
Br —	47,27	46,51

Noi intendiamo di continuare lo studio dei derivati bromurati della pirocolla, facendovi agire direttamente il bromo.

Azione del pentacloruro di fosforo sulla pirocolla.

Per stabilire definitivamente la costituzione della pirocolla, era importante di conoscere il suo comportamento verso il pentacloruro di fosforo, onde vedere se per questa via potevasi eliminare l'ossigeno. L'esperienza ci condusse a dei risultati diversi da quelli che ci aspettavamo, ma che tuttavia ci sembrano adatti a portare degli schiarimenti sulla natura del pirolo.

Il pentacloruro di fosforo non agisce sulla pirocolla a temperatura ordinaria. Per ottenere l'azione completa, bisogna operare nel modo seguente: Si riscalda in tubi chiusi un grammo di pirocolla con circa 12 gr. di pentacloruro di fosforo per sei ore a 210-220°. Nell'aprire i tubi si svolge una grande quantità di acido cloridrico; il contenuto dei medesimi è formato da una sostanza cristallina e da un liquido giallo. Si tratta tutto con etere e si separa filtrando il residuo insolubile e cristallino (A), dalla soluzione eterea (B).

(A). — La massa dei cristalli raccolta sul filtro, viene lavata ripetutamente con etere e poscia gettata nell'acqua per distruggere il pentacloruro di fosforo rimasto in eccesso. La sostanza in tal modo ottenuta forma delle squamette gialle, che sono quasi insolubili nell'etere e nell'acido acetico bollenti; ed è quasi pura, sicchè non occorre altro, per portarla allo stato di massima purezza, che bollirla per qualche tempo con poco acido acetico glaciale, onde toglierví le ultime tracce delle sostanze contenute nel liquido (B).

Questo nuovo corpo è una pirocolla in cui gli atomi d'idrogeno sono completamente sostituiti dal cloro; e noi la chiameremo perciò

« *Percloropirocolla* ($C_{10} Cl_6 N_2 O_2$) ».

Essa è, come abbiamo detto, un poco solubile nell'etere e nell'acido acetico bollenti e non si scioglie punto in questi due solventi a freddo; parimenti è insolubile nell'alcool e nell'acqua. Dalla sua soluzione in acido acetico bollente, cristallizza in finissime pagliette colorate lievemente in giallo, però quando si ottiene, nel modo che descriveremo più tardi, in squame di più grande spessore ha un colore giallo intenso; alcuni di questi cristalli furono determinati cristallograficamente dal dott. Ruggiero Panebianco, il quale ebbe la gentilezza di comunicarci quanto segue:

« Sistema cristallino: triclino.

« $\alpha = 001:010 = 44^\circ 22'$ misurati 2 spigoli.

« $\beta = 001:100 = 78^\circ 49'$ . . . 3 . .

« $\gamma = 100:010 = 92^\circ 5'$ . . . 3 . .

« Sfaldatura perfetta (001).

« I cristalli sono in generale lamelle parallelamente a 100.

« Sulla faccia 100 un piano di massima estinzione è prossimamente paral-
« lelo allo spigolo [100:001].

« I cristalli sono gialli di varie tinte più o meno sbiadite. Le lamelle di un « certo spessore ($^1/_4$ mm. circa) sono di un giallo limone e normalmente alle facce « lamellari presentano dicroismo distintissimo: giallo paglia sbiadito e giallo aranciato ».

La difficoltà di ottenere cristalli ben formati spiega sufficientemente la incompleta determinazione cristallografica di questo corpo. La percloropirocolla si mantiene ancor solida ed inalterata a 310°; fonde, scomponendosi, sopra i 320° ed è un poco sublimabile.

Le analisi conducono alla formola « $C_{10}Cl_6N_2O_2$ ».

I.) 0,2100 gr. di sostanza diedero 0,4600 gr. di Ag Cl.

II.) 0,5066 gr. di sostanza diedero 0,5730 gr. di CO_2 e 0,0090 gr. di H_2O.

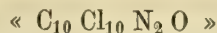
In 100 parti:

	trovato		calcolato
	I	II	
Cl	54,18	—	54,20
C	—	30,84	30,53
H	—	0,18	0,00

(B). — La soluzione eterea venne distillata a b. m. per scacciare l'etere, il tricloruro e l'ossicloruro di fosforo, i vapori dei quali vengono facilmente trascinati da quelli del primo; rimane un liquido oleoso, che si rapprende per raffreddamento in una massa gialloscura, formata da una sostanza cristallina e da un poco di resina, che si toglie facilmente lavando con alcool freddo, nel quale la prima è quasi insolubile. La sostanza ottenuta in tal modo è colorata in giallo e viene purificata trattandola con acido acetico glaciale bollente, nel quale facilmente si scioglie, ad eccezione di una piccola quantità di percloropirocolla contenuta nella soluzione eterea primitiva in causa della presenza del tricloruro di fosforo. Si separa questo residuo, quasi insolubile, filtrando e si chiarifica la soluzione acetica con carbone animale. Cristallizza per raffreddamento in aghi quasi incolori, assieme ancora a delle tracce di percloropirocolla, che si possono facilmente togliere, trattando il miscuglio con etere a freddo, nel quale la nuova sostanza facilmente si scioglie, mentre resta indietro la percloropirocolla. La massa cristallina ricavata per lo svaporamento dell'etere viene cristallizzata nell'acido acetico bollente ed in tal modo si ha allo stato di perfetta purezza [1].

[1] Si deve però notare che in questa reazione, si formano sempre, assieme alla percloropirocolla, piccole quantità (specialmente se si impiega meno PCl_5 e se si riscalda solo fino a 180°) di sostanze gialle, cristalline, simili alla percloropirocolla, ma solubili nell' acido acetico e nell' etere e fondenti sotto i 300°, che sono probabilmente prodotti di sostituzione della pirocolla meno clorurati, dalle quali è difficile a liberarla.

Le analisi di questo corpo condussero alla formola:

« $C_{10}Cl_{10}N_2O$ »

I. 0,2283 gr. di sostanza diedero 0,6305 gr. di Ag Cl.

II. 0,2056 gr. di sostanza diedero 0,5684 gr. di Ag Cl.

III. 0,5768 gr. di sostanza diedero 0,4951 di CO_2 e 0,0106 di H_2O.

IV. 0,2800 gr. di sostanza diedero 13 c. c. di azoto a 16° e 755, 2 mm.

V. 0,5237 gr. di sostanza dettero 0,4461 gr. di CO_2 e 0,0126 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato					calcolato per $C_{10}Cl_{10}N_2O$
	I	II	III	IV	V	
Cl	68,39	68,43	—	—	—	. . . 68,40
C	—	—	23,41	—	23,23	 23,12
H	—	—	0,20	—	0,27	. . . —
N	—	—	—	5,39	—	. . . 5,39
O	—	—	—	—	—	. . . 3,08
						99,99

La sostanza che descriviamo forma, se ottenuta per lento raffreddamento della soluzione acetica, dei bellissimi prismi appiattiti, incolori, d'uno splendore madreperlaceo, raggruppati ad un centro.

La determinazione cristallografica, che fu fatta pure dal dott. R. Panebianco, diede i seguenti risultati:

« Sistema cristallino: trimetrico

« $a:b:c = 2,20620:1:0,61196$

« Forme osservate: (100), (110), (101), (001)

« Combinazioni osservate: (100) (110) (101); (100) (110) (001)

« 100:101 = 74° 50′

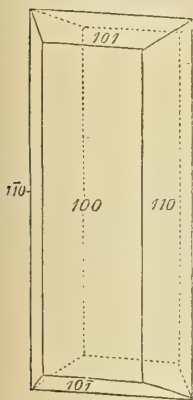
« 100:110 = 65° 37′

« I cristalli sono lamelle sottilissime parallelamente a 100, e da 3 o 4 volte più lunghe nella direzione dell'asse *c* che in quella delle asse *b* ».

Essa fonde a 195°-197°; è poco solubile nell'acido acetico glaciale freddo e nell'alcool, facilmente solubile nell'acido acetico bollente e nell'etere; insolubile nell'acqua. Scaldata al disopra del suo punto di fusione, si volatilizza scomponendosi parzialmente.

Noi non abbiamo fatto fin'ora nessun passo per scoprire la costituzione di questo corpo, e resta riservato ad ulteriori ricerche lo stabilire il nesso che esiste fra esso e la pirocolla.

L'acido acetico che ha servito alla purificazione della sostanza descritta, contiene sempre, oltre ad un poco di resina che si produce nella reazione, una sostanza che si forma per azione del pentacloruro di fosforo sulla percloropirocolla, della quale tratteremo più tardi.

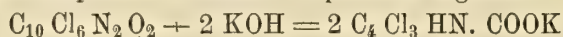
I due corpi che si ottengono per l'azione del pentacloruro di fosforo sulla pirocolla, non si formano in quantità eguali; la quantità di percloropirocolla è circa tre volte maggiore di quella dell'altra sostanza ($C_{10}Cl_{10}N_2O$).

Azione della potassa sulla percloropirocolla.

La percloropirocolla non viene intaccata a freddo da una soluzione acquosa di potassa caustica; mantenendo però il liquido in ebollizione per qualche tempo si scioglie completamente. Per estrarre il nuovo corpo che con tal reazione si forma, si acidifica, dopo completo raffreddamento, la soluzione con acido solforico diluito; con ciò si ottiene un voluminoso precipitato bianco e cristallino. Il liquido separato per filtrazione, viene trattato parecchie volte con etere, per estrarre quella piccola parte di materia che rimase sciolta nell'acqua.

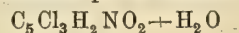
La sostanza così ottenuta viene purificata sciogliendola nell'acqua bollente, ove facilmente si scioglie, e chiarificando la soluzione con carbone animale. Per raffreddamento si separa quasi completamente cristallizzata in forma di finissimi aghi, lunghi, raggruppati ad un centro, incolori e di splendore setaceo. Essa è, come fu ricavato dalle analisi che seguono:

« *l'acido triclorocarbopirolico* ($C_5 Cl_3 H_2 NO_2$) »

che si forma dalla percloropirocolla secondo l'equazione seguente:

$$C_{10} Cl_6 N_2 O_2 + 2\ KOH = 2\ C_4 Cl_3 HN. COOK$$

L'acido triclorocarbopirolico cristallizza con una molecola d'acqua, che perde facilmente e completamente nel vuoto, ed anche parzialmente se si tiene per lungo tempo in una atmosfera asciutta, perdendo in tal modo il suo splendore setaceo e trasformandosi in una massa bianca. Noi abbiamo determinato l'acqua di cristallizzazione tenendo la sostanza, seccata prima con cura fra carta asciugante, nel vuoto, sino ad avere un peso costante.

0,1872 gr. di sostanza perdettero 0,0145 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per la formola $C_5 Cl_3 H_2 NO_2 + H_2O$
H_2O	7,74	7,74

Le analisi fatte colla sostanza seccata nel vuoto diedero i seguenti numeri:

I. 0,3310 gr. di sostanza diedero 0,3352 gr. di CO_2 e 0,0351 gr. di H_2O.

II. 0,2140 gr. di sostanza diedero 0,4296 gr. di Ag Cl.

III. 0,2972 gr. di sostanza diedero 18,2 c. c. di azoto a 27° e 760,75 mm.

In 100 parti:

	trovato			calcolato per la formola $C_5 Cl_3 H_2 NO_2$
	I	II	III	
C	27,86	—	—	27,97
H	1,18	—	—	0,93
Cl	—	49,66	—	49,65
N	—	—	6,57	6,52

L'acido triclorocarbopirolico è solubilissimo nell'alcool e nell'etere, assai poco solubile nell'acqua fredda, ma molto in quella bollente. La sua soluzione acquosa emana, quando si riscalda, un odore particolare e si comporta coi diversi reattivi nel modo seguente:

L'acetato di piombo (neutro) produce un precipitato bianco solùbile nell'eccesso del reagente.

Il nitrato d'argento non manifesta alcuna reazione.

Il cloruro ferrico produce un intenso coloramento rosso, ed in soluzioni concentrate un precipitato rosso bruno.

Il nuovo acido è stabilissimo all'aria ed alla luce, come pure non si altera se viene scaldato a 100°. A 105° prende un coloramento grigio senza però diminuire di peso. Non è possibile di determinare il suo punto di fusione, perchè scaldato sino a circa 150° si decompone violentemente.

L'acido nitrico lo intacca anche a freddo scomponendolo con viva reazione.

Sale ammonico. — Si ottiene sciogliendo l'acido in un eccesso di ammoniaca e svaporando la soluzione nel vuoto sull'acido solforico. Forma dei finissimi aghi incolori, solubili nell'acqua.

La sua soluzione acquosa dà col nitrato d'argento un precipitato bianco e si comporta con gli altri reagenti come quella dell'acido.

Sale baritico. — Si prepara questo sale trattando una soluzione bollente dell'acido nell'acqua con idrato baritico in eccesso, togliendo questo con acido carbonico e svaporando a b. m. sino a secchezza. Il sale ottenuto forma delle squamette colorate in rosso per parziale decomposizione. Si purifica sciogliendolo in alcool bollente e chiarificando la soluzione con carbone animale. Svaporando questa a b. m., si ottengono delle squamette bianche e lucenti, abbastanza solubili nell'alcool, poco nell'acqua.

Questo sale cristallizza con una molecola d'acqua che perde a 105.°

0,3486 gr. di sostanza perdettero 0,0114 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per la formola $(C_5Cl_3HNO_2)_2Ba + H_2O$
H_2O	3,27	3,09

0,3372 gr. di sostanza seccata a 105° diedero 0,1395 gr. di Ba SO_4

In 100 parti:

	trovato	calcolato per la formola $(C_5Cl_3HNO_2)_2Ba$
Ba	24,32	24,29

Azione del pentacloruro di fosforo sulla percloropirocolla.

Come abbiamo or ora esposto, la pirocolla perde per azione del pentacloruro di fosforo tutti gli atomi d'idrogeno, trasformandosi nelle due sostanze clorurate già descritte.

Credemmo necessario di vedere come si comportasse la percloropirocolla, ripetendo questo trattamento.

Due grammi di percloropirocolla vennero riscaldati in tubi chiusi a 250° per cinque ore, con quattro grammi di pentacloruro di fosforo. Nell'aprire i tubi non si notò sensibile pressione ed il contenuto dei medesimi era costituito da un liquido, che si vide essere del tricloruro di fosforo e da una massa solida, formata da grossi cristalli bianchi di una nuova sostanza e da poca percloropirocolla rimasta inalterata,

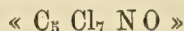
la quale si ottiene in forma di squame di un certo spessore ed intensamento colorate, che qualche volta hanno dimensioni sufficienti per essere determinate cristallograficamente. I cristalli di questa sostanza, studiati dal dott. R. Panebianco, sono stati appunto ottenuti con questo mezzo.

Si separa per decantazione il tricloruro di fosforo dalla massa solida e si tratta il residuo con acqua. La massa cristallina viene posta su di un filtro e lavata con alcool freddo, ove è pressochè insolubile, per toglievi così alcune tracce di materia resinosa. Per separare la nuova sostanza dalla percloropirocolla, si tratta a freddo con etere, nel quale facilmente si scioglie. Per lento svaporamento della soluzione eterea si riottiene in grossi cristalli, che hanno apparenza di romboedri.

Il liquido separato dalla massa solida contiene, oltre a poca resina, la stessa sostanza che si ottiene scacciando il tricloruro di fosforo a b. m. lavando con alcool freddo e poscia trattando nel modo già detto.

Per purificare questo corpo si scioglie in acido acetico glaciale bollente, dal quale cristallizza per raffreddamento, e si riprendono i cristalli con etere. È però molto difficile di ottenere questa sostanza perfettamente pura seguendo la via già descritta; per toglierví le ultime tracce di materia resinosa, bisogna ricorrere alla sublimazione. Il nuovo composto sublima facilmente già a bassa temperatura in forma di lunghi e sottilissimi aghi.

Le analisi fatte colla sostanza sublimata più volte e seccata sull'acido solforico nel vuoto, diedero numeri che concordano colla formola

$$« C_5 Cl_7 NO »$$

I. 0,2032 gr. di sostanza diedero 0,6055 gr. di ClAg.

II. 0,5636 gr. di sostanza diedero 0,3664 gr. di CO_2 e 0,0049 gr. di H_2O.

III. 0,2364 gr. di sostanza diedero 8,6 c. c. di azoto a 16° e 756,15 mm.

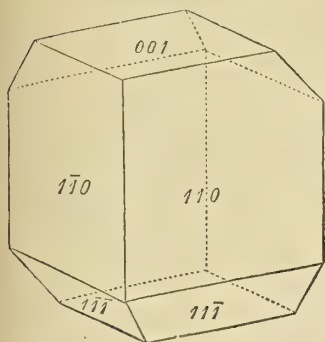
Su 100 parti:

	trovato			calcolato
	I	II	III	
Cl	73,71	—	—	73,41
C	—	17,73	—	17,72
H	—	0,09	—	—
N	—	—	4,27	4,14
O	—	—	—	4,73
				100,00

Abbenchè questo corpo sublimi con facilità già ad una temperatura di circa 100°, pure non ci fu possibile di determinare il suo peso molecolare mediante la densità di vapore, perchè tanto a pressione ordinaria, quanto a pressione ridotta, la volatilizzazione non segue mai senza parziale scomposizione.

La formola che noi diamo non è altro che l'espressione più semplice della composizione di questo corpo. Esso fonde, in tubetti chiusi, a 146-147°,5. Il suo vapore, come pure in minor grado la sostanza solida, ha un odore caratteristico, che ricorda quello della canfora, ed intacca le mucose del naso e degli occhi. Si scioglie facilmente nell'etere e nell'acido acetico glaciale bollente, poco in quello freddo e nell'alcool, punto nell'acqua.

Per lento svaporamento della sua soluzione eterea e per raffreddamento della soluzione acetica, si ottiene in cristalli la di cui determinazione cristallografica ci venne gentilmente comunicata dal dott. R. Panebianco:

« Sistema cristallino: monoclino ».

« $a:b:c = 0,73505:1:0,66191$

« $\eta = + X : + Z = 102° 10' 50''$

« Forme osservate: (110), (001), ($\bar{1}$11)

« Combinazioni osservate: (110) (001); id. con ($\bar{1}$11) vedi figura

« 110 : 001 = 80° 8' misurati 4 spigoli.

« 110 : 1$\bar{1}$0 = 71° 23' » 2 »

« 001 : $\bar{1}$11 = 53° 27' » 2 »

« I cristalli sono incolori.

« Un piano di massima estinzione fa sul piano di simmetria un angolo di circa 6° con l'asse + a verso l'asse + c.

« Sulla base si vede un apice dell'iperbole.

« Doppia rifrazione: negativa.

« Dispersione: inclinata $\rho < v$ ».

Dalla soluzione acetica od eterea non si ottengono che cristalli con sei facce. I cristalli segnati in figura furono ottenuti per lento svaporamento di quella parte della sostanza che resta sciolta nel tricloruro di fosforo.

Per ora non ci è possibile di stabilire la natura chimica della sostanza in questione; un fatto però che ci sembra degno di speciale menzione, e che ci fa supporre che questo corpo abbia costituzione affatto diversa dalla sostanza da cui deriva, è il suo comportamento con la potassa caustica. Diversamente da tutti i derivati della pirocolla, questo composto svolge, bollendolo con una soluzione acquosa di potassa caustica, abbondanti quantità d'ammoniaca, trasformandosi in un acido oltremodo deliquescente. Speriamo di potere fra breve mettere in chiaro questa reazione, che ricorda tanto la saponificazione dei nitrili.

Azione dell'acido nitrico sulla pirocolla.

La pirocolla si scioglie nell'acido nitrico ordinario a freddo; trattandola con acido nitrico fumante si ha una viva reazione con sviluppo di vapori nitrosi e riscaldamento del liquido. Per rallentare l'azione, si introduce la pirocolla in piccole porzioni in un eccesso d'acido nitrico fumante e si scalda poi a bagno maria, fino a che non si nota più sensibile sviluppo di vapori nitrosi. Versando il tutto in molta acqua si ha un precipitato giallo aranciato che costituisce il nitro composto. Per purificare il nuovo corpo, si scioglie in acido acetico glaciale bollente e si chiarifica la soluzione con carbone animale. Pel raffreddamento si ottengono pagliette gialle, che seccate a 110° vennero analizzate.

I risultati dell'analisi conducono alla formola di una

« *Dinitropirocolla* $(C_{10}H_4(NO_2)_2N_2O_2)$ »

I. 0,2258 gr. di materia diedero 0,3581 gr. di CO_2 e 0,0396 gr. di H_2O.

II. 0,1273 gr. di materia diedero 23 c. c. d'azoto a 21° e 760.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per la formola $C_{10}H_4N_4O_6$
	I	II	
C	43,25	—	43,48
H	1,94	—	1,45
N	—	20,50	20,29

La dinitropirocolla forma piccoli cristalli intensamente colorati in giallo, che sotto il microscopio hanno l'apparenza di corti prismi, o di piccole pagliette. Essa è pochissimo solubile nell'etere e nell'alcool, tanto freddi che bollenti, ed abbastanza facilmente solubile nell'acido acetico glaciale bollente. Scaldandola su di una lamina di platino, brucia con leggiera deflagrazione e lascia un aureola di carbone. Non fu possibile di determinare il suo punto di fusione, perchè incomincia a decomporsi prima di fondere, emettendo vapori nitrosi.

Azione della potassa caustica sulla dinitropirocolla.

La dinitropirocolla si scioglie facilmente a freddo nella potassa acquosa, formando un liquido intensamente colorato in giallo aranciato, il quale si fa bollire fintanto che non precipita più quando viene acidificato. Dopo completo raffreddamento, si tratta con acido solforico diluito, ottenendo in tal modo uno scoloramento del liquido, e si agita parecchie volte con etere.

L'estratto etereo è una massa gialla cristallina, che si purifica sciogliendola nell'acqua bollente, trattando con carbone animale e svaporando la soluzione acquosa nel vuoto sull'acido solforico.

Il nuovo corpo ottenuto in tal modo è un acido

« *Mononitrocarbopirolico* (α) ».

Esso forma dei finissimi aghi microscopici, aggruppati, ed ha in massa un colore lievemente giallo, con splendore setaceo. Cristallizza con una molecola d'acqua, che perde completamente stando per lungo tempo nel vuoto sull'acido solforico, perdendo nel tempo stesso il suo splendore setaceo e trasformandosi in una massa quasi bianca.

Una determinazione di acqua, fatta colla sostanza seccata da prima sull'acido solforico e tenuta poi nel vuoto fino ad avere un peso costante, diede i seguenti risultati:

1,6052 gr. di materia perdettero 0,1630 gr. di H_2O.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_5H_4N_2O_4+H_2O$
H_2O	10,15	10,34

Le analisi della sostanza deacquificata concordano colla formola

« $C_5H_4(NO_2)NO_2$ ».

I. 0,2792 gr. di materia diedero 0,3965 di CO_2 e 0,0682 gr. di H_2O.
II. 0,2433 gr. di materia dettero 0,3399 di CO_2 e 0,0665 gr. di H_2O.
III. 0,1938 gr. di sostanza diedero 29,6 c. c. d'azoto a 15°, 5 e 767 mm.

In 100 parti:

	trovato			calcolato
	I	II	III	
C	38,73	38,10	—	38,46
H	2,71	3,03	—	2,56
N	—	—	18,00	17,95

L'acido mononitro (α) carbopirolico è assai solubile nell'etere e nell'acqua, tanto fredda che calda; si scioglie pure nell'alcool. Esso fonde, se privo d'acqua, a 144-146° in un liquido giallo. La sua soluzione acquosa dà con l'acetato di piombo un precipitato giallo, solubile nell'eccesso del reattivo; il cloruro ferrico vi produce pure un precipitato giallo. Il nitrato d'argento non dà sensibile reazione.

L'acido libero, e molto più ancora i suoi sali deflagrano vivamente se scaldati su di una lamina di platino, lasciando un aureola di carbone.

I sali dell'acido nitro (α) carbopirolico sono tutti più o meno colorati in giallo.

Sale ammonico [$C_4H_3(NO_2)N.COONH_4$]. — Si ottiene questo sale sciogliendo l'acido in un eccesso d'ammoniaca e lasciando svaporare la soluzione, colorata intensamente in giallo, lentamente sull'acido solforico. Forma dei prismi appiattiti o delle larghe squame d'un colore giallo sbiadito, che sono abbastanza facilmente solubili nell'acqua fredda.

Le analisi fatte con la sostanza seccata nel vuoto sull'acido solforico corrispondono alla formola $C_5H_7N_3O_4$.

I. 0,3133 gr. di sostanza dettero 0,3941 gr. di CO_2 e 0,1182 gr. di H_2O.

II. 0,1487 gr. di materia svolsero 30,2 c. c. d'azoto, misurati a 12° e 767 mm.

In 100 parti:

	trovato		calcolato
	I	II	
C	34,31	—	34,68
H	4,19	—	4,05
N	—	24,31	24,27
O	—	—	36,99
			99,99

La soluzione acquosa del sale ammonico dà col nitrato argentico un precipitato voluminoso, d'un colore giallo aranciato, quasi insolubile nell'acqua e solubile nell'ammoniaca.

Sale baritico. — Si ottiene un sale baritico trattando la soluzione dell'acido con un eccesso di acqua di barite. Per evaporazione del liquido, liberato dall'eccesso di barite coll'acido carbonico, si ottengono delle squamette d'un colore giallo aranciato, poco solubili nell'acqua fredda.

L'acido mononitro (α) carbopirolico si forma dalla dinitropirocolla secondo l'equazione seguente.

$$C_{10}H_4(NO_2)_2N_2O_2 + 2\,KOH = 2\,C_4H_3(NO_2)NCOOK.$$

La dinitropirocolla deve contenere i due residui nitrici simmetricamente disposti

nei due nuclei pirolici, perchè si trasforma colla potassa caustica in un solo acido mononitrocarbopirolico.

Dalle esperienze descritte risulta che i derivati del pirolo, se non vengono distrutti dall'azione dell'acido nitrico, facilmente si trasformano in nitrocomposti, imitando così il ben noto comportamento delle sostanze aromatiche. Noi speriamo perciò di poter con eguale facilità ottenere gli amido derivati corrispondenti e di trasformarli in composti diazoici.

Sulle forme quaternarie bilineari.

Nota del Socio G. BATTAGLINI

letta nella seduta del 4 dicembre 1881.

Oggetto di questa Nota è la rappresentazione geometrica di una forma quaternaria bilineare.

1. Siano in uno spazio a tre dimensioni (x_1, x_2, x_3, x_4) le coordinate di un punto X, ed in un altro spazio a tre dimensioni (y_1, y_2, y_3, y_4) le coordinate di un punto Y, ciascun punto essendo riferito ad una quaterna fondamentale di piani, facce del tetraedro fondamentale: ponendo per brevità

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 = (Ax), \quad B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3 + B_4 y_4 = (By),$$

una forma bilineare tra le x e le y sarà espressa simbolicamente da $(\varphi\psi) = (Ax)(By)$, intendendo che le *ombre* A_i, B_j, per $i, j = 1, 2, 3, 4$, abbiano significato di quantità solo nelle combinazioni $A_i B_j = B_j A_i$.

L'equazione $(\varphi\psi) = 0$ stabilisce una corrispondenza *correlativa* tra i punti X, ed Y dei due spazi, essendo corrispondenti due punti quando con le loro coordinate verificano l'equazione proposta. Preso ad arbitrio nel primo spazio un punto X, ad esso corrisponderà nel secondo spazio un punto qualunque Y appartenente al piano y determinato dall'equazione

$$(Ax) B_1 y_1 + (Ax) B_2 y_2 + (Ax) B_3 y_3 + (Ax) B_4 y_4 = 0,$$

che si dirà piano corrispondente al punto X nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questo piano (rispetto alla quaterna fondamentale di punti nel secondo spazio, vertici del tetraedro fondamentale) siano

$$(1) \qquad Y_1 = (Ax) B_1, \quad Y_2 = (Ax) B_2, \quad Y_3 = (Ax) B_3, \quad Y_4 = (Ax) B_4;$$

similmente preso ad arbitrio nel secondo spazio un punto Y, ad esso corrisponderà nel primo spazio un punto qualunque X appartenente al piano x determinato dall'equazione

$$(By) A_1 x_1 + (By) A_2 x_2 + (By) A_3 x_3 + (By) A_4 x_4 = 0,$$

che si dirà piano corrispondente al punto Y nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questo piano (rispetto alla quaterna fondamentale di punti nel primo spazio, vertici del tetraedro fondamentale) siano

$$(1) \qquad X_1 = (By) A_1, \quad X_2 = (By) A_2, \quad X_3 = (By) A_3, \quad X_4 = (By) A_4.$$

Se nel primo spazio il punto X appartiene al piano x, o pure nel secondo spazio il punto Y appartiene al piano y, si avrà la condizione $(Xx) = 0$, o pure $(Yy) = 0$,

sicchè eliminando le x_i tra la prima di queste equazioni ed il primo sistema delle (1), o pure eliminando le y_i tra la seconda di queste equazioni ed il secondo sistema delle (1), si avrà

$$(2)\quad (\Phi\Psi) = -\begin{vmatrix} A_1B_1, & A_2B_1, & A_3B_1, & A_4B_1, & Y_1 \\ A_1B_2, & A_2B_2, & A_3B_2, & A_4B_2, & Y_2 \\ A_1B_3, & A_2B_3, & A_3B_3, & A_4B_3, & Y_3 \\ A_1B_4, & A_2B_4, & A_3B_4, & A_4B_4, & Y_4 \\ X_1, & X_2, & X_3, & X_4, & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ o pure } (\Psi\Phi) = -\begin{vmatrix} B_1A_1, & B_2A_1, & B_3A_1, & B_4A_1, & X_1 \\ B_1A_2, & B_2A_2, & B_3A_2, & B_4A_2, & X_2 \\ B_1A_3, & B_2A_3, & B_3A_3, & B_4A_3, & X_3 \\ B_1A_4, & B_2A_4, & B_3A_4, & B_4A_4, & X_4 \\ Y_1, & Y_2, & Y_3 & Y_4, & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Segue da ciò che ponendo

$$(A, B) = \begin{vmatrix} A_1B_1 & A_2B_1, & A_3B_1, & A_4B_1 \\ A_1B_2, & A_2B_2, & A_3B_2, & A_4B_2 \\ A_1B_3, & A_2B_3, & A_3B_3, & A_4B_3 \\ A_1B_4, & A_2B_4, & A_3B_4, & A_4B_4 \end{vmatrix},\quad (B, A) = \begin{vmatrix} B_1A_1, & B_2A_1, & B_3A_1, & B_4A_1 \\ B_1A_2, & B_2A_2, & B_3A_2, & B_4A_2 \\ B_1A_3, & B_2A_3, & B_3A_3, & B_4A_3 \\ B_1A_4, & B_2A_4, & B_3A_4, & B_4A_4 \end{vmatrix},$$

ed indicando con $a_ib_j = b_ja_i$ l'elemento reciproco dell' elemento $A_iB_j = B_jA_i$ del determinante $(A,B) = (B,A)$, l'una o l'altra delle equazioni (2) diverrà $(\Phi\Psi) = (aX)(bY) = 0$. Il determinante $(A, B) = (B, A)$ si dirà il *discriminante* della forma bilineare $(\varphi\psi)$, e la forma bilineare $(\Phi\Psi)$ tra le X e le Y si dirà forma *congiunta* della forma $(\varphi\psi)$.

L'equazione $(\Phi\Psi) = 0$ stabilisce una corrispondenza *correlativa* tra i piani x ed y dei due spazi, essendo corrispondenti due piani quando con le loro coordinate verificano l'equazione proposta. Preso ad arbitrio nel primo spazio il piano x, ad esso corrisponderà nel secondo spazio un piano qualunque y appartenente al punto Y determinato dall'equazione

$$(aX)\,b_1Y_1 + (aX)\,b_2Y_2 + (aX)\,b_3Y_3 + (aX)\,b_4Y_4 = 0,$$

che si dirà punto corrispondente al piano x nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questo punto siano

$$(3)\quad y_1 = (aX)\,b_1,\quad y_2 = (aX)\,b_2,\quad y_3 = (aX)\,b_3,\quad y_4 = (aX)\,b_4;$$

similmente preso ad arbitrio nel secondo spazio il piano y, ad esso corrisponderà nel primo spazio un piano qualunque x appartenente al punto X determinato dall'equazione

$$(bY)\,a_1X_1 + (bY)\,a_2X_2 + (bY)\,a_3X_3 + (bY)\,a_4X_4 = 0,$$

che si dirà punto corrispondente al piano y nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questo punto siano

$$(3)\quad x_1 = (bY)\,a_1,\quad x_2 = (bY)\,a_2,\quad x_3 = (bY)\,a_3,\quad x_4 = (bY)\,a_4.$$

Indicando con $[\varphi\psi] = [\psi\varphi]$, e con $(a, b) = (b, a)$ la forma congiunta ed il descriminante della forma $(\Phi\Psi) = (\Psi\Phi)$, vale a dire ponendo

$$(4)\quad [\varphi\psi] = -\begin{vmatrix} a_1b_1, & a_2b_1, & a_3b_1, & a_4b_1, & y_1 \\ a_1b_2, & a_2b_2, & a_3b_2, & a_4b_2, & y_2 \\ a_1b_3, & a_2b_3, & a_3b_3, & a_4b_3, & y_3 \\ a_1b_4, & a_2b_4, & a_3b_4, & a_4b_4, & y_4 \\ x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & 0 \end{vmatrix},\ \text{o pure } [\psi\varphi] = -\begin{vmatrix} b_1a_1, & b_2a_1, & b_3a_1, & b_4a_1, & x_1 \\ b_1a_2, & b_2a_2, & b_3a_2, & b_4a_2, & x_2 \\ b_1a_3, & b_2a_3, & b_3a_3, & b_4a_3, & x_3 \\ b_1a_4, & b_2a_4, & b_3a_4, & b_4a_4, & x_4 \\ y_1, & y_2, & y_3, & y_4, & 0 \end{vmatrix},$$

$$(a, b) = \begin{vmatrix} a_1b_1, & a_2b_1, & a_3b_1, & a_4b_1 \\ a_1b_2, & a_2b_2, & a_3b_2, & a_4b_2 \\ a_1b_3, & a_2b_3, & a_3b_3, & a_4b_3 \\ a_1b_4, & a_2b_4, & a_3b_4, & a_4b_4 \end{vmatrix},\quad (b, a) = \begin{vmatrix} b_1a_1, & b_2a_1, & b_3a_1, & b_4a_1 \\ b_1a_2, & b_2a_2, & b_3a_2, & b_4a_2 \\ b_1a_3, & b_2a_3, & b_3a_3, & b_4a_3 \\ b_1a_4, & b_2a_4, & b_3a_4, & b_4a_4 \end{vmatrix},$$

sarà $[\varphi\psi] = (A, B)^2(\varphi\psi) = [\psi\varphi] = (B, A)^2(\psi\varphi),\ (a, b) = (A, B)^3 = (b, a) = (B, A)^3,$

e l'elemento reciproco dell'elemento $a_i\, b_j = b_j\, a_i$ del determinante $(a, b) = (b, a)$ sarà eguale all'elemento $A_i B_j = B_j A_i$ del determinante $(A, B) = (B, A)$ moltiplicato pel quadrato dello stesso determinante. Allorchè il discriminante della forma bilineare $(\varphi\psi)$ è diverso da zero, si potrà supporlo eguale all'unità, introducendo nei coefficienti della forma un fattore conveniente, ed allora la forma $(\varphi\psi)$ ed il determinante (A, B) si dedurranno dalla forma $(\Phi\Psi)$ e dal determinante (a, b) come viceversa $(\Phi\Psi)$ ed (a, b) si sono dedotti da $(\varphi\psi)$ ed (A, B).

Nella correlazione dei due spazi ai punti X', X'' del primo corrispondano i piani y', y'' del secondo, e per conseguenza a due punti Y', Y'' del secondo, appartenenti alla retta $y'\, y''$, corrispondano due piani x', x'' del primo appartenenti alla retta $X'\, X''$; indichiamo con U, o u, la retta $X'\, X''$, o $x'\, x''$, e con V, o v, la retta $Y'\, Y''$, o $y'\, y''$, e siano le coordinate di queste rette (riferite alle sestuple fondamentali di rette, nel primo e nel secondo spazio, spigoli del tetraedro fondamentale) rispettivamente (per i, h, j, $k = 1, 2, 3, 4$)

$$u_{ih} = x'_i x''_h - x'_h x''_i,\ U_{ih} = X'_i X''_h - X'_h X''_i,\ v_{jk} = y'_j y''_k - y'_k y''_j,\ V_{jk} = Y'_j Y''_k - Y'_k Y''_j;$$

esprimendo che ad un punto X appartenente alla retta u corrisponde nella correlazione un piano y appartenente alla retta v, o pure che ad un punto Y appartenente alla retta v corrisponde nella correlazione un piano x appartenente alla retta u, si avranno le equazioni

$$n' Y'_j + n'' Y''_j = (Ax) B_j,\ (\text{per } j = 1, 2, 3, 4),\ (X'x) = 0,\ (X''x) = 0,$$

o pure

$$m' X'_i + m'' X''_i = (By) A_i,\ (\text{per } i = 1, 2, 3, 4),\ (Y'y) = 0,\ (Y''y) = 0,$$

quindi eliminando tra le prime le indeterminate n', n'' e le coordinate x, o pure eliminando tra le seconde le indeterminate m', m'' e le coordinate y, si troverà

$$(5)\qquad (XP) = -\begin{vmatrix} A_1B_1, A_2B_1, A_3B_1, A_4B_1, Y'_1, Y''_1 \\ A_1B_2, A_2B_2, A_3B_2, A_4B_2, Y'_2, Y''_2 \\ A_1B_3, A_2B_3, A_3B_3, A_4B_3, Y'_3, Y''_3 \\ A_1B_4, A_2B_4, A_3B_4, A_4B_4, Y'_4, Y''_4 \\ X'_1, \quad X'_2, \quad X'_3, \quad X'_4, \quad 0, \quad 0 \\ X''_1, \quad X''_2, \quad X''_3, \quad X''_4, \quad 0, \quad 0 \end{vmatrix} = 0, \text{ o pure } (PX) = -\begin{vmatrix} B_1A_1, B_2A_1, B_3A_1, B_4A_1, X'_1, X''_1 \\ B_1A_2, B_2A_2, B_3A_2, B_4A_2, X'_2, X''_2 \\ B_1A_3, B_2A_3, B_3A_3, B_4A_3, X'_3, X''_3 \\ B_1A_4, B_2A_4, B_3A_4, B_4A_4, X'_4, X''_4 \\ Y'_1, \quad Y'_2, \quad Y'_3, \quad Y'_4, \quad 0, \quad 0 \\ Y''_1, \quad Y''_2, \quad Y''_3, \quad Y''_4, \quad 0, \quad 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sicchè indicando con $f_{ih}\, g_{jk} = g_{jk}\, f_{ih}$ il determinante minore di 2° ordine del determinante $(A, B) = (B, A)$ complementare di quello che è definito dalle colonne d'indici i ed h e dalle linee d'indici j e k, e ponendo per brevità

$$f_{23} U_{23} + \ldots + f_{14} U_{14} + \ldots = (fU),\ g_{23} V_{23} + \ldots g_{14} V_{14} + \ldots = (gV),$$

l'una e l'altra delle equazioni (5) prenderà la forma simbolica $(XP) = (fU)\ (gV) = 0$.

Analogamente esprimendo che ad un piano x appartenente alla retta U corrisponde nella correlazione un punto Y appartenente alla retta V, o pure che ad un piano y appartenente alla retta V corrisponde nella correlazione un punto X appartenente alla retta U, si avranno le equazioni

$$N' y'_j + N'' y''_j = (aX)\, b_j,\ (\text{per } j = 1, 2, 3, 4),\ (x'X) = 0,\ (x''X) = 0,$$

o pure

$$M' x'_i + M'' x''_i = (bY)\, a_i,\ (\text{per } i = 1, 2, 3, 4),\ (y'Y) = 0,\ (y''Y) = 0,$$

quindi eliminando tra le prime le indeterminate N′, N″ e le coordinate X, o pure eliminando tra le seconde le indeterminate M′, M″ e le coordinate Y, si troverà

$$(6)\qquad (\chi\rho) = -\begin{vmatrix} a_1b_1, a_2b_1, a_3b_1, a_4b_1, y'_1, y''_1 \\ a_1b_2, a_2b_2, a_3b_2, a_4b_2, y'_2, y''_2 \\ a_1b_3, a_2b_3, a_3b_3, a_4b_3, y'_3, y''_3 \\ a_1b_4, a_2b_4, a_3b_4, a_4b_4, y'_4, y''_4 \\ x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, 0, 0 \\ x''_1, x''_2, x''_3, x''_4, 0, 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{o pure} \quad (\rho\chi) = -\begin{vmatrix} b_1a_1, b_2a_1, b_3a_1, b_4a_1, x'_1, x''_1 \\ b_1a_2, b_2a_2, b_3a_2, b_4a_2, x'_2, x''_2 \\ b_1a_3, b_2a_3, b_3a_3, b_4a_3, x'_3, x''_3 \\ b_1a_4, b_2a_4, b_3a_4, b_4a_4, x'_4, x''_4 \\ y'_1, y'_2, y'_3, y'_4, 0, 0 \\ y''_1, y''_2, y''_3, y''_4, 0, 0 \end{vmatrix} = 0,$$

sicchè indicando con $F_{ih} G_{jk} = G_{jk} F_{ih}$ il determinante minore di 2° ordine del determinante $(a, b) = (b, a)$ complementare di quello che è definito dalle colonne d'indici i ed h e dalle linee d'indici j e k, e ponendo per brevità

$$F_{23} u_{23} + \dots + F_{14} u_{14} + \dots = (Fu), \quad G_{23} v_{23} + \dots + G_{14} v_{14} + \dots = (Gv),$$

l'una o l'altra delle equazioni (6) prenderà la forma simbolica $(\chi\rho) = (Fu)(Gv) = 0$.

La forma bilineare $(\chi\rho)$ tra le u e le v, o la forma bilineare (XP) tra le U e le V, si dirà forma *intermedia* rispetto alla forma bilineare $(\Phi\Psi)$ o $(\varphi\psi)$. L'una o l'altra delle equazioni $(\chi\rho) = 0$, e $(XP) = 0$ stabilisce una stessa corrispondenza correlativa tra le rette U e V, o u e v, dei due spazi, essendo corrispondenti due rette quando con le loro coordinate verificano l'equazione proposta: presa ad arbitrio nel primo spazio una retta U, o u, ad essa corrisponderà nel secondo spazio una retta qualunque V, o v, del complesso lineare speciale di rette (cioè complesso di rette che si appoggiano ad una stessa retta v, o V) determinato dall'equazione

$$(Fu) G_{23} v_{23} + \dots + (Fu) G_{14} v_{14} + \dots = 0, \quad \text{o} \quad (fU) g_{23} V_{23} + \dots + (fU) g_{14} V_{14} + \dots = 0;$$

la retta v, o V, si dirà corrispondente alla retta U, o u, nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questa retta siano

$$(7)\quad V_{23} = (Fu) G_{23}, \dots V_{14} = (Fu) G_{14}, \dots, \quad \text{o} \quad (8)\quad v_{23} = (fU) g_{23}, \dots v_{14} = (fU) g_{14}, \dots:$$

similmente presa ad arbitrio nel secondo spazio una retta V, o v, ad essa corrisponderà nel primo spazio una retta qualunque U, o u, del complesso lineare speciale di rette (cioè di rette che si appoggiano ad una stessa retta u, o U) determinato dall'equazione

$$(Gv) F_{23} u_{23} + \dots + (Gv) F_{14} u_{14} + \dots = 0, \quad \text{o} \quad (gV) f_{23} U_{23} + \dots + (gV) f_{14} U_{14} + \dots = 0;$$

la retta u, o U, si dirà corrispondente alla retta V, o v, nella correlazione, e si potrà supporre che le coordinate di questa retta siano

$$(7)\quad U_{23} = (Gv) F_{23}, \dots U_{14} = (Gv) F_{14}, \dots, \quad \text{o} \quad (8)\quad u_{23} = (gV) f_{23}, \dots u_{14} = (gV) f_{14}, \dots .$$

Tra le forme intermedie $(\chi\rho)$ e (XP) si ha l'identità $(\chi\rho) = (A, B)(XP)$, o $(XP) = (a, b)(\chi\rho)$, secondo che si riguardi come primitiva la forma bilineare $(\varphi\psi)$ o la $(\Phi\Psi)$; supposto $(A, B) = 1$, e quindi anche $(a, b) = 1$, o viceversa, si avrà adunque l'identità $(\chi\rho) = (XP)$, supponendo che rappresentino una stessa retta U ed u, del pari che V e v, ed osservando che tra le loro coordinate si possono supporre le relazioni

$$u_{23} = U_{14}, \dots u_{14} = U_{23}, \dots, v_{23} = V_{14}, \dots v_{14} = V_{23}, \dots .$$

Se tra le coordinate di tre punti X, X′, X″, o di tre piani x, x', x'' del primo spazio si hanno le relazioni

$$(9)\qquad x_i = \omega' x'_i + \omega'' x''_i, \quad X_i = \Omega' X'_i + \Omega'' X''_i,$$

sicchè quei tre punti, o quei tre piani, appartengano ad una stessa retta, tra le coordinate dei tre piani y, y', y'', o dei tre punti Y, Y′, Y″, del secondo spazio, corrispondenti nella correlazione, si avranno le relazioni

$$(9)\qquad Y_j = \omega' Y'_j + \omega'' Y''_j, \quad y_j = \Omega' y'_j + \Omega'' y''_j,$$

sicchè nel seeondo spazio quei tre piani, o quei tre punti, apparterranno ad una stessa retta, e viceversa; e se tra le coordinate di quattro punti X, X′, X″, X‴, o di quattro piani x, x', x'', x''', del primo spazio si hanno le relazioni

$$(10)\qquad x_i = \omega' x'_i + \omega'' x''_i + \omega''' x'''_i, \quad X_i = \Omega' X'_i + \Omega'' X''_i + \Omega''' X'''_i,$$

sicchè appartengano quei quattro punti ad uno stesso piano, o quei quattro piani ad uno stesso punto, tra le coordinate dei quattro piani y, y', y'', y''', o dei quattro punti Y, Y′, Y″, Y‴, del secondo spazio, corrispondenti nella correlazione, si avranno le relazioni

$$(10)\qquad Y_j = \omega' Y'_j + \omega'' Y''_j + \omega''' Y'''_j, \quad y_j = \Omega' y'_j + \Omega'' y''_j + \Omega''' y'''_j,$$

sicchè nel secondo spazio apparterranno quei quattro piani ad uno stesso punto, e quei quattro punti ad uno stesso piano, e viceversa; finalmente se tra le coordinate di cinque punti qualunque X, X′, ... X^{IV}, o di cinqne piani qualunque x, x', ... x^{IV}, del primo spazio si hanno le relazioni

$$(11)\qquad x_i = \omega' x'_i + \ldots + \omega^{IV} x_i^{IV} \quad X_i = \Omega' X'_i + \ldots + \Omega^{IV} X_i^{IV},$$

tra le coordinate dei cinque piani y, y', ... y^{IV}, o dei cinque punti Y, Y′, ... Y^{IV} del secondo spazio, corrispondenti nella correlazione, si avranno le relazioni

$$(11)\qquad Y_j = \omega' Y'_j + \ldots + \omega^{IV} Y_j^{IV}, \quad y_j = \Omega' y'_j + \ldots + \Omega^{IV} y_j^{IV},$$

e viceversa.

Prendendo per quaterne fondamentali di punti e di piani, nei due spazi, quaterne di punti e di piani corrispondenti nella correlazione, le equazioni della forma bilineare proposta $(\varphi\psi)$, e della sna forma congiunta $(\Phi\Psi)$, prenderanno la forma canonica

$$(12)\qquad \begin{aligned} (\varphi\psi) &= A_1B_1 x_1 y_1 + A_2B_2 x_2 y_2 + A_3B_3 x_3 y_3 + A_4B_4 x_4 y_4 = 0, \\ (\Phi\Psi) &= a_1 b_1 X_1Y_1 + a_2 b_2 X_2Y_2 + a_3 b_3 X_3Y_3 + a_4 b_4 X_4Y_4 = 0. \end{aligned}$$

Rispetto alle sestuple fondamentali di rette corrispondenti nei due spazi, le forme bilineari intermedie $(\chi\rho)$ e (XP) prenderanno poi la forma canonica

$$(13)\qquad \begin{aligned} (\chi\rho) &= a_1 b_1 \,.\, a_4 b_4\, u_{23} v_{23} + \ldots + a_2 b_2 \,.\, a_3 b_3\, u_{14} v_{14} + \ldots = 0, \\ (XP) &= A_1B_1 \,.\, A_4B_4\, U_{23}V_{23} + \ldots + A_2B_2 \,.\, A_3B_3\, U_{14}V_{14} + \ldots = 0. \end{aligned}$$

Introducendo nelle coordinate dei punti, o dei piani, nei due spazi, fattori convenienti, si potrà supporre nelle equazioni (12) e (13), (per $i = 1, 2, 3, 4$), $A_i B_i = 1$, e quindi anche $a_i b_i = 1$, o viceversa; si avranno allora tra le coordinate dei punti,

dei piani, e delle rette dei due spazi, corrispondenti nella correlazione, relazioni della forma

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 \therefore Y_1 : Y_2 : Y_3 : Y_4 \therefore \omega_1 : \omega_2 : \omega_3 : \omega_4 ,$$
$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 \therefore y_1 : y_2 : y_3 : y_4 \therefore \Omega_1 : \Omega_2 : \Omega_3 : \Omega_4 ,$$

$$(14) \qquad \begin{array}{l} u_{23} : \ldots u_{14} : \ldots \therefore V_{23} : \ldots V_{14} : \ldots \therefore \omega_{23} : \ldots \omega_{14} : \ldots \\ U_{23} : \ldots U_{14} : \ldots \therefore v_{23} : \ldots v_{14} : \ldots \therefore \Omega_{23} : \ldots \Omega_{14} : \ldots \end{array}$$

La corrispondenza correlativa tra i punti X, i piani x, e le rette U o u del primo spazio ed i piani y, i punti Y, e le rette v o V del secondo spazio è definita adunque dalle equazioni $(\varphi\psi) = 0$, $(\Phi\Psi) = 0$, $(\chi\rho) = 0$ o $(XP) = 0$. Il primo o il secondo sistema delle formole (1), (3), (7) o (8) serve per passare dai punti, dai piani, e dalle rette del primo, o del secondo, spazio ai piani, ai punti, ed alle rette, corrispondenti nella correlazione, del secondo, o del primo, spazio. Nella corrispondenza correlativa tra due spazi ad ogni punto, ad ogni piano, e ad ogni retta, in ciascuno dei due spazi, corrisponde un piano, un punto, ed una retta nell'altro spazio; e se più punti appartengono ad uno stesso piano, o ad una stessa retta, o pure più piani appartengono ad uno stesso punto, o ad una stessa retta, i piani corrispondenti apparterranno al punto corrispondente a quel piano, o alla retta corrispondente a quella retta, o pure i punti corrispondenti apparterranno al piano corrispondente a quel punto, o alla retta corrispondente a quella retta; ed infine se più rette appartengono ad uno stesso punto, o ad uno stesso piano, o ad un punto ed un piano insieme, le rette corrispondenti apparterranno al piano corrispondente, o al punto corrispondente, o al piano ed al punto corrispondenti insieme. Le forme geometriche di 2ª e di 1ª specie (piani punteggiati o rigati, stelle di piani o di raggi, punteggiate, fasci di piani, e fasci di rette) che si corrispondono così nella correlazione sono proiettive. La costruzione di due figure correlative in due spazi si otterrà facilmente allorchè si conoscono cinque punti, o cinque piani, qualunque della prima figura, ed i cinque piani, o i cinque punti, corrispondenti della seconda figura.

Ponendo per un punto X, e per un piano x nel primo spazio (con $i = 1, 2, 3, 4$)

$$(15) \qquad x_i = \omega' x'_i + \omega'' x''_i + \omega''' x'''_i , \quad X_i = \Omega' X'_i + \Omega'' X''_i + \Omega''' X'''_i ,$$

le coordinate del piano y corrispondente al punto X, e del punto Y corrispondente al piano x nel secondo spazio saranno rispettivamente

$$(16) \; Y_i = \omega'(Ax')B_i + \omega''(Ax'')B_i + \omega'''(Ax''')B_i, \; y_i = \Omega'(aX')b_i + \Omega''(aX'')b_i + \Omega'''(aX''')b_i,$$

o pure viceversa ponendo

$$(15) \qquad y_i = \omega' y'_i + \omega'' y''_i + \omega''' y'''_i , \quad Y_i = \Omega' Y'_i + \Omega'' Y''_i + \Omega''' Y'''_i ,$$

sarà

$$(16) \; X_i = \omega'(By')A_i + \omega''(By'')A_i + \omega'''(By''')A_i , \; x_i = \Omega'(bY')a_i + \Omega''(bY'')a_i + \Omega'''(bY''')a_i ,$$

sicchè indicando con $A'B' = B'A'$, $A''B'' = B''A''$, ... simboli equivalenti ad $AB = BA$, con $a'b' = b'a'$, $a''b'' = b''a''$, ... simboli equivalenti ad $ab = ba$, con x ed y i piani cui appartengono sempre rispettivamente il punto X, ed il punto Y, variando $\omega' : \omega'' : \omega'''$, e con X ed Y i punti cui appartengono sempre rispettivamente il piano x, ed il

piano y, variando $\Omega':\Omega'':\Omega'''$, si troverà eliminando dal primo o dal secondo sistema delle (16) $\omega',\omega'',\omega'''$ ed $\Omega',\Omega'',\Omega'''$.

$$(17)\quad \begin{aligned}(\Phi\Psi)&=(A'x')(A''x'')(A'''x''')(B'B''B'''Y)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}(A'x'), (A''x'), (A'''x')\\ (A'x''), (A''x''), (A'''x'')\\ (A'x'''), (A''x'''), (A'''x''')\end{vmatrix}(B'B''B'''Y)\\ &=\frac{1}{6}(A'A''A'''X)(B'B''B'''Y)=0,\\ (\varphi\psi)&=(a'X')(a''X'')(a'''X''')(b'b''b'''y)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}(a'X'), (a''X'), (a'''X')\\ (a'X''), (a''X''), (a'''X'')\\ (a'X'''), (a''X'''), (a'''X''')\end{vmatrix}(b'b''b'''y)\\ &=\frac{1}{6}(a'a''a'''x)(b'b''b'''y)=0,\end{aligned}$$

o pure viceversa

$$(17)\quad \begin{aligned}(\Psi\Phi)&=(B'y')(B''y'')(B'''y''')(A'A''A'''X)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}(B'y'), (B''y'), (B'''y')\\ (B'y''), (B''y''), (B'''y'')\\ (B'y'''), (B''y'''), (B'''y''')\end{vmatrix}(A'A''A'''x)\\ &=\frac{1}{6}(B'B''B'''Y)(A'A''A'''X)=0,\\ (\psi\varphi)&=(b'Y')(b''Y'')(b'''Y''')(a'a''a'''x)=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}(b'Y'), (b''Y'), (b'''Y')\\ (b'Y''), (b''Y''), (b'''Y'')\\ (b'Y'''), (b''Y'''), (b'''Y''')\end{vmatrix}(a'a''a'''x)\\ &=\frac{1}{6}(b'b''b'''y)(a'a''a'''x)=0.\end{aligned}$$

come si otterrebbe ancora trasformando simbolicamente i determinanti (2) e (4) per mezzo delle relazioni

$$a_i b_j=\frac{1}{6}(A'A''A''')_i(B'B''B''')_j,\quad A_iB_j=\frac{1}{6}(a'a''a''')_i(b'b''b''')_j.$$

Si avrà poi con analoghe trasformazioni

$$(18)\quad \begin{aligned}(A,B)&=A'_1A''_2A_3'''A_4^{IV}(B'B''B'''B^{IV})=\frac{1}{24}(A'A''A'''A^{IV})(B'B''B'''B^{IV}),\\ (a,b)&=a'_1a''_2a_3'''a_4^{IV}(b'b''b'''b^{IV})=\frac{1}{24}(a'a''a'''a^{IV})(b'b''b'''b^{IV}),\end{aligned}$$

o pure viceversa

$$(18)\quad \begin{aligned}(B,A)&=B'_1B''_2B_3'''B_4^{IV}(A'A''A'''A^{IV})=\frac{1}{24}(B'B''B'''B^{IV})(A'A''A'''A^{IV}),\\ (b,a)&=b'_1b''_2b_3'''b_4^{IV}(a'a''a'''a^{IV})=\frac{1}{24}(b'b''b'''b^{IV})(a'a''a'''a^{IV}).\end{aligned}$$

Essendo (X,y), (Y,x), (X',y'), (X'',y''), $(Y,'x')$, (Y'',x'') coppie di punti e piani corrispondenti nei due spazi, se si pone

$$x_i=\omega'x'_i+\omega''x_i'',\quad X_i=\Omega'X'_i+\Omega''X_i'',$$

(19) o viceversa

$$y_i=\omega'y'_i+\omega''y_i'',\quad Y_i=\Omega'Y'_i+\Omega''Y_i'',$$

si avrà evidentemente

$$\omega'Y'_i+\omega''Y_i''=\omega'(Ax')B_i+\omega''(Ax'')B_i,\quad \Omega'y'_i+\Omega''y_i''=\Omega'(aX')b_i+\Omega''(aX'')b_i,$$

(20) o viceversa

$$\omega'X'_i+\omega''X_i''=\omega'(By')A_i+\omega''(By'')A_i,\quad \Omega'x'_i+\Omega''x_i''=\Omega'(bY')a_i+\Omega''(bY'')a_i,$$

sicchè eliminando ω',ω'', o Ω',Ω'', ed osservando che tra le coordinate di una stessa retta (U,u) o (V,v) si possono supporre le relazioni

$$u_{23}=U_{14},\ldots u_{14}=U_{23},\ldots;\quad v_{23}=V_{14},\ldots v_{14}=V_{23}.\ldots,$$

le equazioni (20) daranno

$$
(21)\quad
\begin{aligned}
(\mathrm{XP}) &= (\mathrm{A}'x')(\mathrm{A}''x'')\,(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\,\mathrm{Y}'\mathrm{Y}'') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(\mathrm{A}'x'), & (\mathrm{A}''x')\\ (\mathrm{A}'x''), & (\mathrm{A}''x'')\end{vmatrix}(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\,\mathrm{Y}'\mathrm{Y}'')\\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{X}'\mathrm{X}'')\,(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\,\mathrm{Y}'\mathrm{Y}'') = 0,\\
(\chi\rho) &= (a'\mathrm{X}')(a''\mathrm{X}'')\,(b'b''y'y'') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(a'\mathrm{X}'), & (a''\mathrm{X}')\\ (a'\mathrm{X}''), & (a''\mathrm{X}'')\end{vmatrix}(b'b''y'y'')\\
&= \frac{1}{2}(a'a''x'x'')\,(b'b''y'y'') = 0,
\end{aligned}
$$

o viceversa

$$
(22)\quad
\begin{aligned}
(\mathrm{PX}) &= (\mathrm{B}'y')(\mathrm{B}''y'')\,(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{X}'\mathrm{X}'') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(\mathrm{B}'y'), & (\mathrm{B}''y')\\ (\mathrm{B}'y''), & (\mathrm{B}''y'')\end{vmatrix}(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{X}'\mathrm{X}'')\\
&= \frac{1}{2}(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\,\mathrm{Y}'\mathrm{Y}'')\,(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{X}'\mathrm{X}'') = 0,\\
(\rho\chi) &= (b'\mathrm{Y}')(b''\mathrm{Y}'')\,(a'a''x'x'') = \frac{1}{2}\begin{vmatrix}(b'\mathrm{Y}'), & (b''\mathrm{Y}')\\ (b'\mathrm{Y}''), & (b''\mathrm{Y}'')\end{vmatrix}(a'a''x'x'')\\
&= \frac{1}{2}(b'b''y'y'')\,(a'a''x'x'') = 0.
\end{aligned}
$$

Si giungerebbe allo stesso risultato trasformando simbolicamente i determinanti (5) e (6) per mezzo delle relazioni

$$
f_{ih}\,g_{jk} = \frac{1}{2}(\mathrm{A}'\mathrm{A}'')_{ih}(\mathrm{B}'\mathrm{B}'')_{jk}, \qquad \mathrm{F}_{ih}\,\mathrm{G}_{jk} = \frac{1}{2}(a'a'')_{ih}(b'b'')_{jk}.
$$

Supponiamo che sia il determinante $(\mathrm{A},\mathrm{B}) = (\mathrm{B},\mathrm{A}) = 0$, e dinotiamo come sopra con $a_i b_j = b_j a_i$ l'elemento reciproco dell'elemento $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_j = \mathrm{B}_j\mathrm{A}_i$ di questo determinante. In questo caso si vedrà, per le formole (1), che nella correlazione definita dall'equazione $(\varphi\psi) = 0$ pel punto singolare X^0 del primo spazio, e pel punto singolare Y^0 del secondo spazio, di cui le coordinate sono date rispettivamente da

$$
(23)\quad \frac{x_1^0}{a_1 b_j} = \frac{x_2^0}{a_2 b_j} = \frac{x_3^0}{a_3 b_j} = \frac{x_4^0}{a_4 b_j}(j=1,2,3,4)\,; \quad \frac{y_1^0}{b_1 a_i} = \frac{y_2^0}{b_2 a_i} = \frac{y_3^0}{b_3 a_i} = \frac{y_4^0}{b_4 a_i}(i=1,2,3,4)
$$

il piano corrispondente y del secondo spazio, ed il piano corrispondente x del primo spazio sono indeterminati; a tutt'i punti X del primo spazio, o Y del secondo spazio, che col punto singolare X^0 o Y^0 appartengono ad una stessa retta, corrisponderà uno stesso piano y del secondo spazio, o x del primo spazio, appartenente al punto singolare Y^0 o X^0. In tal caso la forma $(\Phi\Psi)$, congiunta della forma proposta $(\varphi\psi)$, si decompone nei due fattori di primo grado $(x^0\mathrm{X})\,(y^0\mathrm{Y})$. Analogamente si potrà supporre invece che sia il determinante $(a,b) = (b,a) = 0$, dinotando con $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_j = \mathrm{B}_j\mathrm{A}_i$ l'elemento reciproco dell'elemento $a_i b_j = b_j a_i$ di questo determinante; in tal caso si vedrà, per le formole (3), che nella correlazione definita dall'equazione $(\Phi\Psi) = 0$, pel piano singolare x^0 del primo spazio, e pel piano singolare y^0 del secondo spazio, di cui le coordinate sono date rispettivamente da

$$
(23)\quad \frac{\mathrm{X}_1^0}{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_j} = \frac{\mathrm{X}_2^0}{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_j} = \frac{\mathrm{X}_3^0}{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_j} = \frac{\mathrm{X}_4^0}{\mathrm{A}_4\mathrm{B}_j}(j=1,2,3,4), \quad \frac{\mathrm{Y}_1^0}{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_i} = \frac{\mathrm{Y}_2^0}{\mathrm{B}_2\mathrm{A}_i} = \frac{\mathrm{Y}_3^0}{\mathrm{B}_3\mathrm{A}_i} = \frac{\mathrm{Y}_4^0}{\mathrm{B}_4\mathrm{A}_i}, (i=1,3,3,4)
$$

il punto corrispondente Y del secondo spazio, ed il punto corrispondente X del primo spazio, sono indeterminati; a tutt' i piani x del primo spazio, o y del secondo spazio, che col piano singolare x^0 o y^0 appartengono ad una stessa retta, corrisponderà uno stesso punto Y del secondo spazio, o X del primo spazio, appartenente al piano singolare y^0 o x^0. In tal caso la forma $(\varphi\psi)$, congiunta della forma proposta $(\Phi\Psi)$, si decompone nei due fattori di primo grado $(\mathrm{X}^0 x)\,(\mathrm{Y}^0 y)$.

Supponiamo ora che si annullino tutt' i determinanti minori $a_i b_j = b_j a_i$ del determinante $(A, B) = (B, A)$. In tal caso, nella correlazione definita dall'equazione $(\varphi\psi) = 0$, per ogni punto X del primo spazio appartenente alla retta singolare U^0, e per ogni punto Y del secondo spazio appartenente alla retta singolare V^0, di cui le coordinate sono date rispettivamente da

$$(24) \quad \begin{aligned} &\frac{u^0_{23}}{f_{23}\,g_{jk}} = \ldots = \frac{u^0_{14}}{f_{14}\,g_{jk}} = \ldots \ (j, k = 1, 2, 3, 4), \\ &\frac{v^0_{23}}{g_{23}\,f_{ih}} = \ldots = \frac{v^0_{14}}{g_{14}\,f_{ih}} = \ldots \ (i, h = 1, 2, 3, 4), \end{aligned}$$

il piano corrispondente y del secondo spazio, ed il piano corrispondente x del primo spazio, sono indeterminati; a tutt' i punti X del primo spazio, o Y del secondo spazio, che con la retta singolare U^0 o V^0 appartengono ad uno stesso piano, corrisponderà uno stesso piano y del secondo spazio, o x del primo spazio, appartenente alla retta singolare V^0 o U^0. In tal caso della forma proposta $(\varphi\psi)$ la forma intermedia (X P) si decompone nei due fattori di primo grado $(u^0\,U)\,(v^0\,V)$, e la forma congiunta $(\Phi\Psi)$ è nulla identicamente. Analogamente si potrà supporre invece che si annullino tutt' i determinanti minori $A_i B_j = B_j A_i$ del determinante $(a, b) = (b, a)$. In tal caso, nella correlazione definita dall'equazione $(\Phi\Psi) = 0$, per ogni piano x del primo spazio appartenente alla retta singolare u^0, e per ogni piano y del secondo spazio appartenente alla retta singolare v^0, di cui le coordinate sono date rispettivamente da

$$(24) \quad \begin{aligned} &\frac{U^0_{23}}{F_{23}\,G_{jk}} = \ldots = \frac{U^0_{14}}{F_{14}\,G_{jk}} = \ldots \ (j, k = 1, 2, 3, 4), \\ &\frac{V^0_{23}}{G_{23}\,F_{ih}} = \ldots = \frac{V^0_{14}}{G_{14}\,F_{ih}} = \ldots \ (i, h = 1, 2, 3, 4), \end{aligned}$$

il punto corrispondente Y del secondo spazio, ed il punto corrispondente X del primo spazio, sono indeterminati; a tutt' i piani x del primo spazio, o y del secondo spazio, che con la retta singolare u^0 o v^0 appartengono ad uno stesso punto, corrisponderà uno stesso punto Y del secondo spazio, o X del primo spazio, appartenente alla retta singolare v^0 o u^0. In tal caso della forma proposta $(\Phi\Psi)$ la forma intermedia $(\chi\rho)$ si decompone nei due fattori di primo grado $(U^0 u)(V^0 v)$, e la forma congiunta $(\varphi\psi)$ è nulla identicamente.

Finalmente supponiamo che si annullino tutt' i determinanti minori $f_{ih}\,g_{jk} = g_{jk}\,f_{ih}$ del determinante $(A, B) = (B, A)$. In tal caso, nella correlazione definita dall'equazione $(\varphi\psi) = 0$, per ogni punto X del primo spazio appartenente al piano singolare x^0, e per ogni punto Y del secondo spazio appartenente al piano singolare y^0, il piano corrispondente y del secondo spazio, ed il piano corrispondente x del primo spazio, sono indeterminati, le coordinate dei piani singolari essendo rispettivamente

$$(25) \quad \frac{X^0_1}{A_1 B_j} = \frac{X^0_2}{A_2 B_j} = \frac{X^0_3}{A_3 B_j} = \frac{X^0_4}{A_4 B_j}, \ (j = 1,2,3,4). \quad \frac{Y^0_1}{B_1 A_i} = \frac{Y^0_2}{B_2 A_i} = \frac{Y^0_3}{B_3 A_i} = \frac{Y^0_4}{B_4 A_i}, \ (i = 1,2,3,4);$$

per ogni punto X del primo spazio, o Y del secondo spazio, che non appartiene al piano singolare x^0, o y^0, il piano corrispondente y del secondo spazio, o x del primo spazio, coinciderà sempre col piano singolare y^0, o x^0. In tal caso la forma bilineare

proposta $(\varphi\psi)$ si decompone nei due fattori di primo grado $(X^0 x)$ $(Y^0 y)$, e la forma intermedia (XP) con la forma congiunta $(\Phi\Psi)$ sono nulle identicamente. Analogamente si potrà supporre che si annullino tutt' i determinanti minori $F_{ih} G_{jk} = G_{jk} F_{ih}$ del determinante $(a, b) = (b, a)$. In tal caso, nella correlazione definita dall'equazione $(\Phi\Psi) = 0$, per ogni piano x del primo spazio appartenente al punto singolare X^0, e per ogni piano y del secondo spazio appartenente al punto singolare Y^0, il punto corrispondente Y del secondo spazio, ed il punto corrispondente X del primo spazio, sono indeterminati, le coordinate dei punti singolari essendo date rispettivamente da

$$(25)\qquad \frac{x^0_1}{a_1 b_j} = \frac{x^0_2}{a_2 b_j} = \frac{x_3^0}{a_3 b_j} = \frac{x^0_4}{a_4 b_j},\ (j = 1,2,3,4);\ \frac{y^0_1}{b_1 a_i} = \frac{y^0_2}{b_2 a_i} = \frac{y^0_3}{b_3 a_i} = \frac{y^0_4}{b_4 a_i},\ (i = 1,2,3,4);$$

per ogni piano x del primo spazio, o y del secondo spazio, che non appartiene al punto singolare X^0, o Y^0, il punto corrispondente Y del secondo spazio, o X del primo spazio, coinciderà sempre col punto singolare Y^0, o X^0. In tal caso la forma bilineare proposta $(\Phi\Psi)$ si decompone nei due fattori di primo grado $(x^0 X)$ $(y^0 Y)$, e la forma intermedia $(\chi\rho)$ con la forma congiunta $(\varphi\psi)$ sono nulle identicamente.

2. Supponiamo ora che il primo ed il secondo spazio coincidano tra loro, e riferendo nell'uno e nell'altro i punti, i piani e le rette ad uno stesso tetraedro fondamentale, consideriamo le due forme bilineari congiunte

$$(1)\qquad \begin{aligned} (\varphi\psi) &= (Ax)(By) = \frac{1}{6}(a' a'' a''' x)(b' b'' b''' y) = 0\,, \\ (\Phi\Psi) &= (aX)(bY) = \frac{1}{6}(A'A''A'''X)(B'B''B'''Y) = 0\,. \end{aligned}$$

Nella correlazione delle due figure nello spazio, definita da queste equazioni, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima corrisponderanno rispettivamente ad un punto Z, e ad un piano z, i due piani

$$z^{(1)} \ldots (Az)(Bp) = 0\,,\quad z^{-(1)} \ldots (Bz)(Ap) = 0\,,$$

ed i due punti

$$Z^{(1)} \ldots (aZ)(bP) = 0\,,\quad Z^{-(1)} \ldots (bZ)(aP) = 0\,,$$

(indicando con p_i, e P_i, per $i = 1, 2, 3, 4$, le coordinate correnti di punti e di piani); il piano z determinato dal punto Z e dalla retta w comune ai due piani $z^{(1)}, z^{-(1)}$, o pure il punto Z determinato dal piano z e dalla retta W comune ai due punti $Z^{(1)}, Z^{-(1)}$, sarà dato dall'equazione

$$(2)\qquad (Az)(Bp) - (Bz)(Ap) = 0\,,\quad \text{o pure}\quad (aZ)(bP) - (bZ)(aP) = 0\,,$$

sicchè indicando con R una retta qualunque appartenente al punto Z ed al piano z, o pure con r una retta qualunque appartenente al piano z ed al punto Z, apparterrà R al complesso lineare di rette rappresentato dall'equazione

$$(3)\qquad (R) = (AB)_{23} r_{23} + \ldots + (AB)_{14} r_{14} + \ldots = 0\,,$$

o pure apparterrà r al complesso lineare di rette rappresentato dall'equazione

$$(3)\qquad (r) = (ab)_{23} R_{23} + \ldots + (ab)_{14} R_{14} + \ldots = 0\,,$$

in altri termini sarà z il piano corrispondente al punto Z nel complesso (R), e sarà Z il punto corrispondente al piano z nel complesso (r).

Nella correlazione (1) il luogo dei punti P ai quali appartengono i piani corrispondenti p, e l'inviluppo dei piani p ai quali appartengono i punti corrispondenti P,

passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima, sono rispettivamente di 2° ordine e di 2ª classe, e rappresentati dalle equazioni

$$(4)\quad \begin{aligned}(\theta\theta) &= (\mathrm{A}p)(\mathrm{B}p) = \frac{1}{6}(a'a''a'''p)(b'b''b'''p) = 0,\\ (\Theta\Theta) &= (a\mathrm{P})(b\mathrm{P}) = \frac{1}{6}(\mathrm{A}'\mathrm{A}''\mathrm{A}'''\mathrm{P})(\mathrm{B}'\mathrm{B}''\mathrm{B}'''\mathrm{P}) = 0.\end{aligned}$$

Il piano polare $z^{(0)}$ di un punto Z rispetto a $(\theta\theta)$, ed il polo $Z^{(0)}$ d'un piano z rispetto a $(\Theta\Theta)$, essendo dati rispettivamente dalle equazioni

$$(5)\quad (\mathrm{A}z)(\mathrm{B}p) + (\mathrm{B}z)(\mathrm{A}p) = 0, \quad (a\mathrm{Z})(b\mathrm{P}) + (b\mathrm{Z})(a\mathrm{P}) = 0,$$

si fa manifesto, per le formole (2), che le due coppie di piani $(z^{(1)}, z^{-(1)})$, $(z, z^{(0)})$ apparterranno alla retta w, e le due coppie di punti $(Z^{(1)}, Z^{-(1)})$, $(Z, Z^{(0)})$ apparterranno alla retta W, e saranno coniugate armoniche tra loro quelle due coppie di piani, e quelle due coppie di punti: segue da ciò che se per un punto Z appartenente al luogo di 2° ordine $(\theta\theta)$ si determina il piano z che gli corrisponde nel complesso lineare (R), ed il piano $z^{(0)}$ tangente di $(\theta\theta)$, e per la retta w appartenente a z e $z^{(0)}$ si determinano i due piani che essa ha di comune con l'inviluppo di 2ª classe $(\Theta\Theta)$, questi saranno i piani $z^{(1)}$ e $z^{-(1)}$ che nella correlazione (1) corrisponderanno al punto Z, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima; similmente se per un piano z appartenente all'inviluppo di 2ª classe $(\Theta\Theta)$ si determina il punto Z che gli corrisponde nel complesso lineare (r), ed il punto $Z^{(0)}$ di contatto con $(\Theta\Theta)$, e per la retta W appartenente a Z e $Z^{(0)}$ si determinano i due punti che essa ha di comune con il luogo di 2° ordine $(\theta\theta)$, questi saranno i punti $Z^{(1)}$ e $Z^{-(1)}$ che nella correlazione (1) corrisponderanno al piano z, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima. — Se la superficie di 2° ordine $(\theta\theta)$ è rigata, anche la superficie di 2ª classe $(\Theta\Theta)$ sarà rigata, e viceversa; i piani $z^{(1)}$, o pure $z^{-(1)}$, corrispondenti nella correlazione ai diversi punti Z che appartengono ad una generatrice rettilinea di $(\theta\theta)$, (W' di un sistema, o W'' dell'altro sistema) avranno di comune una generatrice rettilinea di $(\Theta\Theta)$ ($w^{(1)'}$ o pure $w^{-(1)'}$ di un sistema, o $w^{(1)''}$ o $w^{-(1)''}$ dell'altro sistema) passando dalla prima figura alla seconda, o pure dalla seconda figura alla prima; similmente i punti $Z^{(1)}$, o pure $Z^{-(1)}$ corrispondenti nella correlazione ai diversi piani z che appartengono ad una generatrice rettilinea di $(\Theta\Theta)$, (w' di un sistema, o w'' dell'altro sistema) avranno di comune una generatrice rettilinea di $(\theta\theta)$, ($W^{(1)'}$ o pure $W^{-(1)'}$ di un sistema, o $W^{(1)''}$ o pure $W^{-(1)''}$ dell'altro sistema) passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima; le generatrici rettilinee W', w', e W'', w'' di $(\theta\theta)$ e di $(\Theta\Theta)$ si possono così far corrispondere tra loro in doppio modo, secondo che si passa dalla prima figura alla seconda, o dalla seconda figura alla prima, e ciascuna di queste corrispondenze è proiettiva; in generale anche quando le superficie $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ di 2° ordine e di 2ª classe non sono rigate, ai punti ed ai piani tangenti dell'una corrispondono nella correlazione i piani tangenti ed i punti dell'altra, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima. — I piani $z^{(1)}$, o pure $z^{-(1)}$, corrispondenti nella correlazione ai diversi punti Z che appartengono alla linea di 2° ordine $(\gamma\gamma)$ comune ad un piano $z^{(0)}$ ed alla superficie di 2° ordine $(\theta\theta)$, apparterranno ad un

cono di 2ª classe $(\Gamma\Gamma)^{(1)}$, o pure $(\Gamma\Gamma)^{-(1)}$, circoscritto alla superficie di 2ª classe $(\Theta\Theta)$, e di cui le intersezioni col piano $z^{(0)}$ costituiranno una stessa linea di 2ª classe, che ha con la linea di 2° ordine $(\gamma\gamma)$ un doppio contatto (¹); la retta comune ai due punti di contatto è la retta w che il piano $z^{(0)}$ ha di comune con i due piani $z^{(1)}$ e $z^{-(1)}$ che corrispondono nella correlazione al punto Z polo di $z^{(0)}$ rispetto alla superficie $(\theta\theta)$: similmente i punti $Z^{(1)}$, o pure $Z^{-(1)}$, corrispondenti nella correlazione ai diversi piani z che appartengono al cono di 2ª classe $(\Gamma\Gamma)$ comune ad un punto $Z^{(0)}$ ed alla superficie di 2ª classe $(\Theta\Theta)$, apparterranno ad una linea di 2° ordine $(\gamma\gamma)$ (¹), o pure $(\gamma\gamma)^{-(1)}$, situata sulla superficie di 2° ordine $(\theta\theta)$, e di cui le congiungenti col punto $Z^{(0)}$ costituiranno uno stesso cono di 2° ordine, che ha col cono di 2ª classe $(\Gamma\Gamma)$ un doppio contatto; la retta comune ai due piani di contatto è la retta W che il punto $Z^{(0)}$ ha di comune con i due punti $Z^{(1)}$ e $Z^{-(1)}$ che corrispondono nella correlazione al piano z polare di $Z^{(0)}$ rispetto alla superficie $(\Theta\Theta)$.

Se un punto Z è tale che i piani corrispondenti nella correlazione $z^{(1)}$ e $z^{-(1)}$ siano tra loro coincidenti, si avranno le condizioni

$$(6)\qquad \frac{(\mathrm{A}z)\,\mathrm{B}_1}{(\mathrm{B}z)\,\mathrm{A}_1}=\frac{(\mathrm{A}z)\,\mathrm{B}_2}{(\mathrm{B}z)\,\mathrm{A}_2}=\frac{(\mathrm{A}z)\,\mathrm{B}_3}{(\mathrm{B}z)\,\mathrm{A}_3}=\frac{(\mathrm{A}z)\,\mathrm{B}_4}{(\mathrm{B}z)\,\mathrm{A}_4}=-\frac{m}{n},$$

dalle quali, eliminando le z_i, si ottiene per determinare $m:n$ l'equazione

$$\begin{vmatrix} m\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1+n\mathrm{B}_1\mathrm{A}_1, & m\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2+n\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2, & m\mathrm{A}_1\mathrm{B}_3+n\mathrm{B}_1\mathrm{A}_3, & m\mathrm{A}_1\mathrm{B}_4+n\mathrm{B}_1\mathrm{A}_4 \\ m\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1+n\mathrm{B}_2\mathrm{A}_1, & m\mathrm{A}_2\mathrm{B}_2+n\mathrm{B}_2\mathrm{A}_2, & m\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3+n\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3, & m\mathrm{A}_2\mathrm{B}_4+n\mathrm{B}_2\mathrm{A}_4 \\ m\mathrm{A}_3\mathrm{B}_1+n\mathrm{B}_3\mathrm{A}_1, & m\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2+n\mathrm{B}_3\mathrm{A}_2, & m\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3+n\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3, & m\mathrm{A}_3\mathrm{B}_4+n\mathrm{B}_3\mathrm{A}_4 \\ m\mathrm{A}_4\mathrm{B}_1+n\mathrm{B}_4\mathrm{A}_1, & m\mathrm{A}_4\mathrm{B}_2+n\mathrm{B}_4\mathrm{A}_2, & m\mathrm{A}_4\mathrm{B}_3+n\mathrm{B}_4\mathrm{A}_3, & m\mathrm{A}_4\mathrm{B}_4+n\mathrm{B}_4\mathrm{A}_4 \end{vmatrix}=0,$$

onde

$$(m^4+n^4)(\mathrm{A'A''A'''A^{IV}})(\mathrm{B'B''B'''B^{IV}})+4mn(m^2+n^2)(\mathrm{A'A''A'''B^{IV}})(\mathrm{B'B''B'''A^{IV}})$$
$$+6m^2n^2(\mathrm{A'A''B'''B^{IV}})(\mathrm{B'B''A'''A^{IV}})=0,$$

ovvero

$$(7)\qquad (m^4+n^4)(\mathrm{A},\mathrm{B})+mn(m^2+n^2)(a\mathrm{B})(b\mathrm{A})+m^2n^2(f\mathrm{F})(g\mathrm{G})=0$$

essendo $(f\mathrm{F})$ e $(g\mathrm{G})$ simboli formati analogamente ad $(f\mathrm{U})$ e $(g\mathrm{V})$.

Questa equazione di 4° grado è reciproca, sicchè ponendo $\frac{m}{n}+\frac{n}{m}=s$, essa si ridurrà ad

$$(8)\qquad (s^2-2)(\mathrm{A},\mathrm{B})+s(a\mathrm{B})(b\mathrm{A})+(f\mathrm{F})(g\mathrm{G})=0.$$

Similmente se un piano z è tale che i punti corrispondenti nella correlazione $Z^{(1)}$ e $Z^{-(1)}$ siano tra loro coincidenti, si avranno le condizioni

$$(6)\qquad \frac{(a\mathrm{Z})\,b_1}{(b\mathrm{Z})\,a_1}=\frac{(a\mathrm{Z})\,b_2}{(b\mathrm{Z})\,a_2}=\frac{(a\mathrm{Z})\,b_3}{(b\mathrm{Z})\,a_3}=\frac{(a\mathrm{Z})\,b_4}{(b\mathrm{Z})\,a_4}=-\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}},$$

dalle quali, eliminando le Z_i, si ottiene per determinare M:N l'equazione

$$\begin{vmatrix} \mathrm{M}a_1b_1+\mathrm{N}b_1a_1, & \mathrm{M}a_1b_2+\mathrm{N}b_1a_2, & \mathrm{M}a_1b_3+\mathrm{N}b_1a_3, & \mathrm{M}a_1b_4+\mathrm{N}b_1a_4 \\ \mathrm{M}a_2b_1+\mathrm{N}b_2a_1, & \mathrm{M}a_2b_2+\mathrm{N}b_2a_2, & \mathrm{M}a_2b_3+\mathrm{N}b_2a_3, & \mathrm{M}a_2b_4+\mathrm{N}b_2a_4 \\ \mathrm{M}a_3b_1+\mathrm{N}b_3a_1, & \mathrm{M}a_3b_2+\mathrm{N}b_3a_2, & \mathrm{M}a_3b_3+\mathrm{N}b_3a_3, & \mathrm{M}a_3b_4+\mathrm{N}b_3a_4 \\ \mathrm{M}a_4b_1+\mathrm{N}b_4a_1, & \mathrm{M}a_4b_2+\mathrm{N}b_4a_2, & \mathrm{M}a_4b_3+\mathrm{N}b_4a_3, & \mathrm{M}a_4b_4+\mathrm{N}b_4a_4 \end{vmatrix}=0,$$

(¹) *Nota sulle forme ternarie bilineari.* Atti della R. Accademia dei Lincei, ser. 3ª, vol. IX. p. 3, 1881.

onde

$$(M^4+N^4)(a'a''a'''a^{IV})(b'b''b'''b^{IV})+4MN(M^2+N^2)(a'a''a'''b^{IV})(b'b''b'''a^{IV})$$
$$+6M^2N^2(a'a''b'''b^{IV})(b'b''a'''a^{IV})=0,$$

ovvero

$$(M^4+N^4)(a,b)+MN(M^2+N^2)(Ab)(Ba)+M^2N^2(Ff)(Gg)=0, \tag{7}$$

essendo (Ff) e (Gg) simboli formati analogamente ad (Fu) e (Gv).

Questa equazione di 4° grado è reciproca, sicchè ponendo $\frac{M}{N}+\frac{N}{M}=S$, essa si ridurrà ad

$$(S^2-2)(a,b)+S(Ab)(Ba)+(Ff)(Gg)=0. \tag{8}$$

Per ciascuna delle quattro radici $m:n$ o $M:N$ della prima, o della seconda delle equazioni (7), il primo, o il secondo, sistema delle equazioni (6) determinerà un punto Z, o un piano z, che ha nella correlazione lo stesso piano corrispondente, o lo stesso punto corrispondente, sia che si passi dalla prima figura alla seconda, o dalla seconda figura alla prima; i quattro punti Z, ed i quattro piani z, così ottenuti, in generale costituiscono evidentemente i vertici e le facce di uno stesso tetraedro, che si dirà tetraedro degli elementi *involutorî* della correlazione. Prendiamo questo tetraedro per tetraedro fondamentale; si troverà facilmente che si potranno porre allora le condizioni (ponendo $A_i\,B_j=C_{ij}$, ed $a_i\,b_j=c_{ij}$)

$$C_{11}=C_{22}=C_{33}=C_{44}=0,\quad c_{11}=c_{22}=c_{33}=c_{44}=0,$$
$$C_{12}C_{21}C_{34}C_{43}=1,\quad c_{12}c_{21}c_{34}c_{43}=1,$$
$$C_{12}c_{12}=C_{21}c_{21}=1,\quad C_{34}c_{34}=C_{43}c_{43}=1;$$

per i punti, e per i piani involutorî, sarà

$$\begin{array}{llll}
z_1=0,\ z_2=0,\ z_3=0, & \frac{m}{n}=-\frac{C_{43}}{C_{34}}; & Z_1=0,\ Z_2=0,\ Z_3=0, & \frac{M}{N}=-\frac{c_{43}}{c_{34}},\\
z_1=0,\ z_2=0,\ z_4=0, & \frac{m}{n}=-\frac{C_{34}}{C_{43}}; & Z_1=0,\ Z_2=0,\ Z_4=0, & \frac{M}{N}=-\frac{c_{34}}{c_{43}},\\
z_3=0,\ z_4=0,\ z_1=0, & \frac{m}{n}=-\frac{C_{21}}{C_{12}}; & Z_3=0,\ Z_4=0,\ Z_1=0, & \frac{M}{N}=-\frac{c_{21}}{c_{12}},\\
z_3=0,\ z_4=0,\ z_2=0, & \frac{m}{n}=-\frac{C_{12}}{C_{21}}; & Z_3=0,\ Z_4=0,\ Z_2=0, & \frac{M}{N}=-\frac{c_{12}}{c_{21}};
\end{array} \tag{9}$$

e finalmente si avrà

$$\begin{aligned}
(\varphi\psi) &= C_{12}x_1y_2+C_{21}x_1y_2+C_{34}x_3y_4+C_{43}x_4y_3=0,\\
(\Phi\Psi) &= c_{12}X_1Y_2+c_{21}X_2Y_1+c_{34}X_3Y_4+c_{43}X_4Y_3=0,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$(R)=(C_{12}-C_{21})r_{12}+(C_{34}-C_{43})r_{34}=0;\quad (r)=(c_{12}-c_{21})R_{12}+(c_{34}-c_{43})R_{34}=0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
(\theta\theta) &= (C_{12}+C_{21})p_1p_2+(C_{34}+C_{43})p_3p_4=0,\\
(\Theta\Theta) &= (c_{12}+c_{21})P_1P_2+(c_{34}+c_{43})P_3P_4=0.
\end{aligned} \tag{12}$$

Segue da queste formole che le due superficie $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ di 2° ordine e di 2ª classe, hanno quattro generatrici rettilinee di comune, due di un sistema e due dell'altro sistema; esse costituiscono i quattro lati d'un quadrilatero gobbo, di cui i vertici e le facce sono i punti ed i piani involutorî della correlazione; per ciascun vertice del quadrilatero la faccia determinata dalle due generatrici comuni di $(\theta\theta)$

e $(\Theta\Theta)$ concorrenti in esso (che è piano tangente comune di queste due superficie) è il piano che nella correlazione corrisponde a quel vertice, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima; le due diagonali del quadrilatero involutorio sono polari reciproche comuni rispetto a $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$; i valori di $\frac{m}{n}$ e di $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, radici delle equazioni (7), che determinano del quadrilatero involutorio un vertice, e la faccia corrispondente nella correlazione, sono eguali tra loro, e quei valori di $\frac{m}{n}$, e di $\frac{\mathrm{M}}{\mathrm{N}}$, che determinano i due vertici, o le due facce, del quadrilatero involutorio, che appartengono ad una delle sue diagonali, sono reciproci tra loro; le due diagonali del quadrilatero involutorio sono sempre reali (supposti reali i coefficienti della data forma bilineare), due o tutti e quattro i suoi vertici possono essere immaginarî, due o tutte e quattro le sue facce possono essere immaginarie; nelle formole precedenti si suppone che tutti gli elementi del quadrilatero involutorio siano reali.

Nel quadrilatero involutorio ad ogni punto Z appartenente alla diagonale R_{12} $(z_1 = 0,\ z_2 = 0)$, o R_{34} $(z_3 = 0,\ z_4 = 0)$, o pure ad ogni piano z appartenente alla diagonale r_{12} $(\mathrm{Z}_1 = 0,\ \mathrm{Z}_2 = 0)$, o r_{34} $(\mathrm{Z}_3 = 0,\ \mathrm{Z}_4 = 0)$, corrisponderà nella correlazione un piano z appartenente alla diagonale r_{12} o r_{34}, o pure un punto Z appartenente alla diagonale R_{12} o R_{34}; le due coppie di punti $(\mathrm{Z},\ z\mathrm{R}_{12};\ \mathrm{Z}_3,\ \mathrm{Z}_4)$, o $(\mathrm{Z},\ z\mathrm{R}_{34};\ \mathrm{Z}_1,\ \mathrm{Z}_2)$ avranno sempre lo stesso rapporto anarmonico $-\frac{\mathrm{C}_{43}}{\mathrm{C}_{34}}$, o $-\frac{\mathrm{C}_{21}}{\mathrm{C}_{12}}$, qualunque sia il punto Z, e le due coppie di punti $(z,\ \mathrm{Z}r_{12};\ z_3,\ z_4)$, o $(z,\ \mathrm{Z}r_{34};\ z_1,\ z_2)$ avranno sempre lo stesso rapporto anarmonico $-\frac{c_{43}}{c_{34}}$, o $-\frac{c_{21}}{c_{12}}$, qualunque sia il piano z; quei rapporti anarmonici si cambiano nei loro reciproci quando, invece di passare dalla prima figura alla seconda, si passa dalla seconda figura alla prima: le radici delle equazioni (7) dinotano adunque i suddetti rapporti anarmonici.

Dal paragone delle equazioni (7) con le analoghe relative al nuovo tetraedro fondamentale, vale a dire

$$(m\mathrm{C}_{12} + n\mathrm{C}_{21})\,(m\,\mathrm{C}_{21} + n\,\mathrm{C}_{12})\,(m\mathrm{C}_{34} + n\,\mathrm{C}_{43})\,(m\,\mathrm{C}_{43} + n\,\mathrm{C}_{34}) = 0,$$

$$(\mathrm{M}\,c_{12} + \mathrm{N}\,c_{21})\,(\mathrm{M}\,c_{21} + \mathrm{N}\,c_{12})\,(\mathrm{M}\,c_{34} + \mathrm{N}\,c_{43})\,(\mathrm{M}\,c_{43} + \mathrm{N}\,c_{34}) = 0,$$

risulta che, prescindendo da una potenza del modulo della trasformazione lineare per passare dal primo tetraedro fondamentale al secondo, sarà

$$\mathrm{C}_{12}\,\mathrm{C}_{21}\,\mathrm{C}_{34}\,\mathrm{C}_{43} = (\mathrm{A},\mathrm{B})\,;\ c_{12}\,c_{21}\,c_{34}\,c_{43} = (a,b),$$

$$\mathrm{C}_{12}\,\mathrm{C}_{21}\,(\mathrm{C}^2_{34} + \mathrm{C}^2_{43}) + \mathrm{C}_{34}\,\mathrm{C}_{43}\,(\mathrm{C}^2_{12} - \mathrm{C}^2_{21}) = (a\mathrm{B})\,(b\mathrm{A}),$$

$$c_{12}\,c_{21}\,(c^2_{34} + c^2_{43}) + c_{34}\,c_{43}\,(c^2_{12} + c^2_{21}) = (\mathrm{A}b)\,(\mathrm{B}a),$$

$$2\,\mathrm{C}_{12}\,\mathrm{C}_{21}\,\mathrm{C}_{34}\,\mathrm{C}_{43} + (\mathrm{C}^2_{12} + \mathrm{C}^2_{21})\,(\mathrm{C}^2_{34} + \mathrm{C}^2_{43}) = (f\mathrm{F})\,(g\mathrm{G}),$$

$$2\,c_{12}\,c_{21}\,c_{34}\,c_{43} + (c^2_{12} + c^2_{21})\,(c^2_{34} + c^2_{43}) = (\mathrm{F}f)\,(\mathrm{G}g).$$

Se $\mathrm{C}_{12} = \mathrm{C}_{21}$, e quindi anche $c_{12} = c_{21}$, o viceversa, sarà involutorio ogni punto Z appartenente alla retta R_{34}, ed ogni piano z appartenente alla retta r_{34}; similmente se $\mathrm{C}_{34} = \mathrm{C}_{43}$, e quindi anche $c_{34} = c_{43}$, o viceversa, sarà involutorio ogni punto Z appartenente alla retta R_{12}, ed ogni piano z appartenente alla retta r_{12};

nell'uno e nell'altro caso due radici, reciproche tro loro, delle equazioni (7) sono eguali tra loro, ed eguali a -1; la correlazione si dirà allora *polare*, o involutoria, parziale. Se poi si ha nello stesso tempo $C_{12} = C_{21}$ e $C_{34} = C_{43}$, e quindi anche $c_{12} = c_{21}$, e $c_{34} = c_{43}$, o viceversa, sarà involutorio ogni punto Z ed ogni piano z dello spazio; per ciascuna coppia delle radici reciproche tra loro delle equazioni (7), il valore di ciascuna radice sarà -1; in tal caso le equazioni (12) rappresentano una stessa superficie di 2° ordine e di 2ª classe, rispetto alla quale un punto qualunque dello spazio, ed il suo piano corrispondente nella correlazione sono polo e polare, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima; la correlazione si dirà allora *polare*, o involutoria, totale.

Per la correlazione polare parziale, osservando che allora ciascuno dei complessi lineari (11) è un complesso speciale, si avrà in generale l'una e l'altra delle condizioni equivalenti

$$(13)\quad \begin{aligned} &(AB)_{23}(AB)_{14} + (AB)_{31}(AB)_{24} + (AB)_{12}(AB)_{34} = 0,\\ &(a\,b)_{23}(a\,b)_{14} + (a\,b)_{31}(a\,b)_{24} + (a\,b)_{12}(a\,b)_{34} = 0, \end{aligned}$$

le quali esprimono ancora che i determinanti minori di 3° ordine dei determinanti (7) si annullano ponendo $\frac{m}{n} = -1$, ed $\frac{M}{N} = -1$.

Se la correlazione è polare totale, osservando che allora ciascuno dei complessi lineari (11) è indeterminato, si avrà in generale l'uno o l'altro dei sistemi di condizioni equivalenti

$$(14)\quad \begin{aligned} &(AB)_{23} = (AB)_{14} = (AB)_{31} = (AB)_{24} = (AB)_{12} = (AB)_{34} = 0,\\ &(a\,b)_{23} = (a\,b)_{14} = (a\,b)_{31} = (a\,b)_{24} = (a\,b)_{12} = (a\,b)_{34} = 0, \end{aligned}$$

o simbolicamente

$$\frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3} = \frac{A_4}{B_4}, \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{a_4}{b_4},$$

le quali esprimono ancora che gli elementi dei determinanti (7) si annullano ponendo $\frac{m}{n} = -1$, ed $\frac{M}{N} = -1$.

Ponendo invece di A e B uno stesso simbolo Q, ed invece di a e b uno stesso simbolo q, alle forme bilineari proposte potrà darsi in questo caso la forma

$$(\varphi\psi) = (Qx)(Qy) = \frac{1}{6}(q'\,q''\,q'''\,x)(q'\,q'\,q'''\,y) = 0,$$

$$(\Phi\Psi) = (qX)(qY) = \frac{1}{6}(Q'Q''Q'''X)(Q'Q''Q'''Y) = 0,$$

(15) e sarà

$$(\theta\theta) = (Qp)^2 = \frac{1}{6}(q'\,q''\,q'''\,p)^2 = 0, \qquad (\Theta\Theta) = (qP)^2 = \frac{1}{6}(Q'\,Q''\,Q'''\,P)^2 = 0.$$

Supponiamo ora che sia $C_{12} = -C_{21}$, e quindi anche $c_{12} = -c_{21}$, o viceversa; sarà involutorio ogni punto Z appartenente alla retta R_{34}, appartenendo inoltre ad esso il piano corrispondente z, e sarà involutorio ogni piano z appartenente alla retta r_{34}, appartenendo inoltre ad esso il punto corrispondente Z; in tal caso si ridurrà la superficie di 2° ordine $(\theta\theta)$ alla coppia di piani $p_3 = 0$, $p_4 = 0$, e la superficie

di 2ª classe $(\Theta\Theta)$ alla coppia di punti $P_3 = 0$, $P_4 = 0$. Similmente supponendo che sia $C_{34} = - C_{43}$, e quindi anche $c_{34} = - c_{43}$, o viceversa, sarà involutorio ogni punto Z appartenente alla retta R_{12}, appartenendo inoltre ad esso il piano corrispondente z, e sarà involutorio ogni piano z appartenente alla retta r_{12}, appartenèndo inoltre ad esso il punto corrispondente Z; in tal caso si ridurrà la superficie di 2° ordine $(\theta\theta)$ alla coppia di piani $p_1 = 0$, $p_2 = 0$, e la superficie di 2ª classe $(\Theta\Theta)$ alla coppia di punti $P_1 = 0$, $P_2 = 0$. Nell'uno e nell'altro caso due radici, reciproche tra loro, delle equazioni (7) sono eguali tra loro ed eguali $a + 1$; la correlazione si dirà allora *coincidente* parziale. Se poi si ha nello stesso tempo $C_{12} = - C_{21}$ e $C_{34} = - C_{43}$, e quindi anche $c_{12} = - c_{21}$, e $c_{34} = - c_{43}$, o viceversa, sarà involutorio ogni punto Z dello spazio, appartenendo inoltre ad esso il piano corrispondente z, e sarà involutorio ogni piano z dello spazio, appartenendo inoltre ad esso il punto corrispondente Z; in tal caso le superficie di 2° ordine e di 2ª classe $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ sono indeterminate; per ciascuna coppia delle radici, reciproche tra loro, delle equazioni (7), il valore di ciascuna radice sara $+ 1$; la correlazione si dirà allora *coincidente* totale.

Per la correlazione coincidente parziale i determinanti minori di 3° ordine dei determinanti (7) si annulleranno ponendo $\frac{m}{n} = + 1$ ed $\frac{M}{N} = + 1$. Per la correlazione coincidente totale si annulleranno poi gli elementi dei medesimi determinanti per i suddetti valori di $\frac{m}{n}$ e di $\frac{M}{N}$, vale a dire sarà

$$A_1 B_1 = 0\,,\quad A_2 B_2 = 0\,,\quad A_3 B_3 = 0\,,\quad A_4 B_4 = 0\,,$$

$$A_2B_3 + A_3B_2 = A_1B_4 + A_4B_1 = A_3B_1 + A_1B_3 = A_2B_4 + A_4B_2 = A_1B_2 + A_2B_1 = A_3B_4 + A_4B_3 = 0,$$

$$(16)\qquad a_1 b_1 = 0\,,\quad a_2 b_2 = 0\,,\quad a_3 b_3 = 0\,,\quad a_4 b_4 = 0\,,$$

$$a_2b_3 + a_3b_2 = a_1b_4 + a_4b_1 = a_3b_1 + a_1b_3 = a_2b_4 + a_4b_2 = a_1b_2 + a_2b_1 = a_3b_4 + a_4b_3 = 0\,.$$

In tal caso i due complessi lineari (11) costituiscono uno stesso complesso, ed il punto Z col piano z, che si corrispondono tra loro in questo complesso lineare, saranno punto e piano corrispondenti nella correlazione proposta.

La supposizione $C_{12} = \pm C_{21}$, e quindi $c_{12} = \pm c_{21}$, può andare unita con l'altra $C_{34} = \mp C_{43}$, e quindi $c_{34} = \mp c_{43}$, o viceversa; si avranno allora insieme le proprietà, e le condizioni, trovate precedentemente, e relative ad entrambe le supposizioni.

Se due radici reciproche $\frac{m}{n}$, o $\frac{M}{N}$, delle equazioni (7) sono eguali tra loro, e quindi eguali a ± 1, senza che per questi valori si annullino i determinanti minori di 3° ordine dei determinanti (7), nella correlazione coincideranno tra loro due punti involutorî, e due piani involutorî; si avranno allora altri casi speciali della correlazione, per i quali non vi è più un tetraedro di elementi involutorî; si avrà allora l'una o l'altra delle condizioni che si deducono da (8) ponendo $s = \pm 2$, e quindi anche $S = \pm 2$, vale a dire

$$(17)\ \text{e quindi anche}\quad \begin{array}{l} 2\,(A, B) + 2\,(a\,B)\,(b\,A) + (f\,F)\,(g G) = 0\,, \\ 2\,(A, B) - 2\,(a\,B)\,(b\,A) + (f\,F)\,(g G) = 0\,, \\ 2\,(a, b) + 2\,(A\,b)\,(B\,a) + (F f)\,(G g) = 0\,, \\ 2\,(a, b) - 2\,(A\,b)\,(B\,a) + (F f)\,(G g) = 0\,, \end{array}$$

ma di questi casi non faremo ulteriormente discorso.

Allorchè vi è un tetraedro di elementi involutorî della correlazione, se si suppone

$$(18)\qquad \frac{C_{12}}{C_{21}}+\frac{C_{21}}{C_{12}}=\frac{C_{34}}{C_{43}}+\frac{C_{43}}{C_{34}},\ \text{e quindi anche}\ \frac{c_{12}}{c_{21}}+\frac{c_{21}}{c_{12}}=\frac{c_{34}}{c_{43}}+\frac{c_{43}}{c_{34}},$$

le due superficie di 2° grado $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ coincideranno tra loro, del pari che i due complessi lineari (R) ed (r), e viceversa. La condizione (18) non può essere soddisfatta che ponendo

$$\frac{C_{12}}{C_{21}}=\frac{C_{34}}{C_{43}},\ \text{onde}\ \frac{C_{21}}{C_{12}}=\frac{C_{43}}{C_{34}},\ \text{e quindi}\ \frac{c_{12}}{c_{21}}=\frac{c_{34}}{c_{43}},\ \text{onde}\ \frac{c_{21}}{c_{12}}=\frac{c_{43}}{c_{34}},$$

o pure

$$\frac{C_{12}}{C_{21}}=\frac{C_{43}}{C_{34}},\ \text{onde}\ \frac{C_{21}}{C_{12}}=\frac{C_{34}}{C_{43}},\ \text{e quindi}\ \frac{c_{12}}{c_{21}}=\frac{c_{43}}{c_{34}},\ \text{onde}\ \frac{c_{21}}{c_{12}}=\frac{c_{34}}{c_{43}};$$

nell'uno e nell'altro caso per ogni punto Z appartenente a $(\theta\theta)$ i piani $z^{(1)}$ e $z^{-(1)}$, che gli corrispondono nella correlazione, non che il piano z che gli corrisponde nel complesso R, apparterranno all'una o all'altra generatrice rettilinea w di $(\theta\theta)$ corrispondente a quel punto, il piano tangente $z^{(0)}$ di $(\theta\theta)$ in Z essendo sempre coniugato armonico di z rispetto alla coppia $(z^{(1)}, z^{-(1)})$; similmente per ogni piano z appartenente a $(\Theta\Theta)$ i punti $Z^{(1)}$ e $Z^{-(1)}$, che gli corrispondono nella correlazione, non che il punto Z che gli corrisponde nel complesso (r), apparterranno all'una o all'altra generatrice rettilinea W di $(\Theta\Theta)$ corrispondente a quel piano, il punto di contatto $Z^{(0)}$ di $(\Theta\Theta)$ con z essendo sempre coniugato armonico di Z rispetto alla coppia $(Z^{(1)}, Z^{-(1)})$: i piani $z^{(1)}$ e $z^{-(1)}$ coincideranno tra loro, con z e con $z^{(0)}$, nei due punti che la generatrice w di $(\theta\theta)$ ha di comune con due spigoli opposti del tetraedro involutorio, e similmente i punti $Z^{(1)}$ e $Z^{-(1)}$ coincideranno tra loro, con Z e con $Z^{(0)}$, nei due piani che la generatrice W di $(\Theta\Theta)$ ha di comune con due spigoli opposti del tetraedro involutorio; segue da ciò che ogni punto Z, ed ogni piano z, appartenente all'uno o all'altro dei suddetti spigoli opposti del tetraedro involutorio, sarà un punto ed un piano involutorio. In questo caso notevole le equazioni (7) avranno due coppie di radici eguali tra loro (diverse da ± 1), e per ciascuna di esse si annulleranno i determinanti minori di 3° ordine dei determinanti (7); osservando che i complessi lineari (R) ed (r) sono allora coincidenti, si avranno in generale le condizioni

$$(19)\qquad \frac{(AB)_{23}}{(ab)_{14}}=\ldots=\frac{(AB)_{14}}{(ab)_{23}}=\ldots.$$

Le equazioni (7) possono avere due coppie di radici eguali tra loro (diverse da ± 1), senza che per ciascuna di esse si annullino i determinanti minori di 3° ordine dei determinanti (7); allora si avranno coincidenti tra loro due coppie di punti involutorî, e due coppie di piani involutorî, senza che vi sia un tetraedro di elementi involutorî; in tal caso si avranno l'una e l'altra delle equazioni che esprimono essere eguali tra loro le radici dell'una e dell'altra delle equazioni (8), vale a dire

$$(20)\qquad \begin{aligned} &[(aB)(bA)]^2-4(A,B)[(fF)(gG)-2(A,B)]=0,\\ &[(Ab)(Ba)]^2-4(a,b)[Ff)(Gg)-2(a,b)]=0, \end{aligned}$$

che equivalgono ad una sola condizione.

3. Se alla retta (u, U) del primo spazio, comune ai due piani x', x'' ed ai due

punti X', X'', corrisponde la retta (v, V) del secondo spazio, comune ai due piani y' y'' ed ai due punti Y', Y'', si è veduto che sarà

$$(1) \qquad (XP) = \frac{1}{2}(A'A''X'X'')(B'B''Y'Y'') = 0\,, \qquad (\chi\rho) = \frac{1}{2}(a'a''x'x'')(b'b''y'y'') = 0\,,$$

sicchè osservando che si può supporre

$$(X'X'')_{23} = u_{14}, \dots (X'X'')_{14} = u_{23}, \dots;\ (Y'Y'')_{23} = v_{14}, \dots (Y'Y'')_{14} = v_{23}, \dots,$$
$$(x'x'')_{23} = U_{14}, \dots (x'x'')_{14} = U_{23}, \dots;\ (y'y'')_{23} = V_{14}, \dots (y'y'')_{14} = V_{23}, \dots,$$

si avrà

$$(XP) = \frac{1}{2}[(A'A'')_{23}\, u_{23} + \dots + (A'A'')_{14}\, u_{14} + \dots][(B'B'')_{23} v_{23} + \dots + (B'B'')_{14} v_{14} + \dots] = 0,$$
$$(1)$$
$$(\chi\rho) = \frac{1}{2}[(a'a'')_{23} U_{23} + \dots + (a'a'')_{14} U_{14} + \dots][(b'b'')_{23} V_{23} + \dots + (b'b'')_{14} V_{14} + \dots] = 0.$$

Essendo data la retta U o u del primo spazio, o pure la retta V o v del secondo spazio, la prima o la seconda di queste equazioni rappresenterà, in coordinate di rette, la retta V o v del secondo spazio, o pure la retta U o u del primo spazio, che le corrisponde nella correlazione; segue da ciò che le rette corrispondenti U, V, o pure u, v, che si appoggiano tra loro, costituiranno uno stesso complesso di 2° grado di rette (W, w) rappresentato dall'una o dall'altra delle equazioni

$$(\Omega\Omega) = \frac{1}{2}[(A'A'')_{23}\, w_{23} + \dots + (A'A'')_{14} w_{14} + \dots][(B'B'')_{23} w_{23} + \dots + (B'B'')_{14} w_{14} + \dots] = 0,$$
$$(2)$$
$$(\omega\omega) = \frac{1}{2}[(a'a'')_{23} W_{23} + \dots + (a'a'')_{14} W_{14} + \dots][(b'b'')_{23} W_{23} + \dots + (b'b'')_{14} W_{14} + \dots] = 0,$$

e quindi se Z', Z'' e z', z'' sono una coppia di punti ed una coppia di piani appartenenti alla retta (W, w) sarà

$$(2) \qquad (\Omega\Omega) = \frac{1}{2}(A'A''Z'Z'')(B'B''Z'Z'') = 0, \qquad (\omega\omega) = \frac{1}{2}(a'a''z'z'')(b'b''z'z'') = 0.$$

Siano Z', Z'' i punti che la retta W ha di comune con la superficie di 2° ordine $(\theta\theta)$, e siano z', z'' i piani che la retta w ha di comune con la superficie di 2ª classe $(\Theta\Theta)$; un punto qualunque Z appartenente a W, ed il piano z, che gli corrisponde nella correlazione, determinano con la coppia di punti (Z', Z'') un rapporto anarmonico $\frac{m}{n}$; similmente un piano qualunque z appartenente a w, ed il punto Z che gli corrisponde nella correlazione determinano con la coppia di piani (z', z'') un rapporto anarmonico $\frac{M}{N}$; questi rapporti anarmonici sono dati dalle formole

$$\frac{m}{n} = -\frac{(Az')(Bz'')}{(Az'')(Bz')}, \quad \frac{M}{N} = -\frac{(aZ')(bZ'')}{(aZ'')(bZ')}.$$

Formando le espressioni di $\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2$, $\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^2$, ed osservando che per appartenere a $(\theta\theta)$ i punti Z', Z'' ed a $(\Theta\Theta)$ i piani z', z'', si può scrivere

$$[(Az')(Bz'')) + (Az'')(Bz')]^2 - [(Az')(Bz'') - (Az'')(Bz')]^2 =$$
$$4[(A'z')(B'z'')(A''z'')(B''z') - (A'z')(B'z')(A''z'')(B''z'')],$$
$$[(aZ')(bZ'') + (aZ'')(bZ')]^2 - [(aZ')(bZ'') - (aZ'')(bZ')]^2 =$$
$$4[(a'Z')(b'Z'')(a''Z'')(b''Z') - (a'Z')(b'Z')(a''Z'')(b''Z'')],$$

si troverà

$$2\left[(A'A'')_{23}w_{23}+\ldots+(A'A'')_{14}w_{14}+\ldots\right]\left[(B'B'')_{23}w_{23}+\ldots+(B'B'')_{14}w_{14}+\ldots\right]$$

$$-\frac{4mn}{(m+n)^2}\left[(A'B')_{23}w_{23}+\ldots+(A'B')_{14}w_{14}+\ldots\right]\left[(A''B'')_{23}w_{23}+\ldots+(A''B'')_{14}w_{14}+\ldots\right]=0,$$

$$(3)\quad 2\left[(a'a'')_{23}W_{23}+\ldots+(a'a'')_{14}W_{14}+\ldots\right]\left[(b'b'')_{23}W_{23}+\ldots+(b'b'')_{14}W_{14}+\ldots\right]$$

$$-\frac{4MN}{(M+N)^2}\left[(a'b')_{23}W_{23}+\ldots+(a'b')_{14}W_{14}+\ldots\right]\left[(a''b'')_{23}W_{23}+\ldots+(a''b'')_{14}W_{14}+\ldots\right]=0,$$

ovvero

$$2(A'A''Z'Z'')(B'B''Z'Z'')-\frac{4mn}{(m+n)^2}(A'B'Z'Z'')(A''B''Z'Z'')=0,$$

$$2(a'a''z'z'')(b'b''z'z'')-\frac{4MN}{(M+N)^2}(a'b'z'z'')(a''b''z'z'')=0,$$

o finalmente

$$(3)\qquad (\Omega\Omega)-\frac{mn}{(m+n)^2}(R)^2=0,\quad (\omega\omega)-\frac{MN}{(M+N)^2}(r)^2=0.$$

Adunque le rette (W, w), per un dato valore del rapporto anarmonico $\frac{m}{n}$, o $\frac{M}{N}$, costituiscono l'uno o l'altro dei complessi di 2° grado, rappresentati dalla prima o dalla seconda delle equazioni (3); ciascun complesso rimane lo stesso se quel rapporto anarmonico si cambia nel suo reciproco, si riduce al complesso $[(\Omega\Omega), (\omega\omega)]$ se quel rapporto anarmonico ha il valore zero o infinito, e si riduce al complesso lineare (R) o (r), preso due volte, se quel rapporto ha il valore -1. I due complessi (3), che corrispondono ad uno stesso valore $\frac{m}{n}=\frac{M}{N}$ del rapporto anarmonico, sono complessi corrispondenti nella correlazione, vale a dire che alle rette di ciascuno di essi corrispondono le rette dell'altro, passando dalla prima figura alla seconda, e dalla seconda figura alla prima; quei complessi si diranno perciò *involutorî* nella dipendenza correlativa; il complesso $[(\Omega\Omega), (\omega\omega)]$ sarà involutorio di se stesso.

Le rette W del complesso $[(\Omega\Omega), (\omega\omega)]$ appartenenti ad un punto Z saranno le congiungenti di questo punto con i punti della linea di 2° ordine $(\gamma\gamma)$ che la superficie $(\theta\theta)$ ha di comune col piano z corrispondente nella correlazione al punto Z; e le rette w del complesso $[(\Omega\Omega), (\omega\omega)]$ appartenenti ad un piano z saranno le intersezioni di questo piano con i piani del cono di 2ª classe $(\Gamma\Gamma)$ che la superficie $(\Theta\Theta)$ ha di comune col punto Z corrispondente nella correlazione al piano z; come si è già osservato la linea di 2° ordine $(\gamma\gamma)$ e la linea di 2ª classe comune al cono $(\Gamma\Gamma)$ ed al piano z hanno tra loro un doppio contatto, e le due rette di contatto comuni apparterranno al punto che nel complesso lineare (R) corrisponde al piano z; similmente il cono di 2ª classe $(\Gamma\Gamma)$ ed il cono di 2° ordine comune alla linea $(\gamma\gamma)$ ed al punto Z hanno tra loro un doppio contatto, e le due rette di contatto comuni apparterranno al piano che nel complesso lineare (r) corrisponde al punto Z. In generale nei complessi rappresentati dalla prima o dalla seconda delle equazioni (3), per i diversi valori di $\frac{m}{n}$ o di $\frac{M}{N}$, le linee di 2ª classe costituite dalle rette dei

complessi appartenenti ad un piano z hanno tutte tra loro doppio contatto, con le rette di contatto appartenenti al punto che nel complesso lineare (R) corrisponde al piano z, o i coni di 2° ordine costituiti dalle rette dei complessi appartenenti ad un punto Z hanno tutti tra loro doppio contatto, con le rette di contatto appartenenti al piano che nel complesso lineare (r) corrisponde al punto Z.

Se passando dalla prima figura alla seconda si trovano i piani y ed i punti Y, o i punti Y ed i piani y, che corrispondono nella correlazione successivamente ad un punto X, o ad un piano x, si avranno figure consecutive, le quali con la figura primitiva saranno alternativamente in dipendenza di correlazione o di collineazione; queste dipendenze saranno definite rispettivamente dalle equazioni

$$(\mathrm{A}x)(\mathrm{B}y)=0,\ (\mathrm{A}x)(a'\mathrm{B})(\mathrm{A}'b')(\mathrm{B}'y)=0,\ (\mathrm{A}x)(a'\mathrm{B}))(\mathrm{A}'b')(a''\mathrm{B}')(\mathrm{A}''b'')(\mathrm{B}''y)=0,\ldots$$
$$(\mathrm{A}x)(a'\mathrm{B})(b'\mathrm{Y})=0,\ (\mathrm{A}x)a'\mathrm{B})(\mathrm{A}'b')(a''\mathrm{B}')(b''\mathrm{Y})=0,\ldots$$

(4) o dalle equazioni

$$(a\mathrm{X})(b\mathrm{Y})=0,\ (a\mathrm{X})(\mathrm{A}'b)(a'\mathrm{B}')(b'\mathrm{Y})=0,\ (a\mathrm{X})(\mathrm{A}'b)(a'\mathrm{B}')(\mathrm{A}''b')(a''\mathrm{B}'')(b''\mathrm{Y})=0,\ldots$$
$$(a\mathrm{X})(\mathrm{A}'b)(\mathrm{B}'y)=0,\ (a\mathrm{X})(\mathrm{A}'b)(a'\mathrm{B}')(\mathrm{A}''b')(\mathrm{B}''y)=0,\ldots;$$

similmente se passando dalla seconda figura alla prima si trovano i piani x ed i punti X, o i punti X ed i piani x, che corrispondono successivamente nella correlazione ad un punto Y, o ad un piano y, si avranno figure consecutive le quali con la figura primitiva saranno alternativamente in dipendenza di correlazione, o di collineazione; queste dipendenze saranno definite rispettivamente dalle equazioni

$$(\mathrm{B}y)(\mathrm{A}x)=0,\ (\mathrm{B}y)(b'\mathrm{A})(\mathrm{B}'a')(\mathrm{A}'x)=0,\ (\mathrm{B}y)(b'\mathrm{A})(\mathrm{B}'a')(b''\mathrm{A}')(\mathrm{B}''a'')(\mathrm{A}''x)=,\ldots$$
$$(\mathrm{B}y)(b'\mathrm{A})(a'\mathrm{X})=0,\ (\mathrm{B}y)(b'\mathrm{A})(\mathrm{B}'a')(b''\mathrm{A}')(a''\mathrm{X})=0,\ldots,$$

(5) o dalle equazioni

$$(b\mathrm{Y})(a\mathrm{X})=0,\ (b\mathrm{Y})(\mathrm{B}'a)(b'\mathrm{A}')(a'\mathrm{X})=0,\ (b\mathrm{Y})(\mathrm{B}'a)(b'\mathrm{A}')(\mathrm{B}''a')(b''\mathrm{A}'')(a''\mathrm{X})=0,\ldots$$
$$(b\mathrm{Y})(\mathrm{B}'a)(\mathrm{A}'x)=0,\ (b\mathrm{Y})\,\mathrm{B}'a)(b'\mathrm{A}')(\mathrm{B}''a')(\mathrm{A}''x)=0,\ldots.$$

Tutte queste figure in correlazione avranno sempre lo stesso tetraedro degli elementi involutorî, e tutte queste figure in collineazione avranno sempre lo stesso tetraedro degli elementi uniti. Prendiamo questo tetraedro per tetraedro fondamentale; le equazioni che definiscono la correlazione primitiva saranno

$$(6)\qquad \begin{aligned}(\varphi\psi)&=\mathrm{C}_{12}x_1y_2+\mathrm{C}_{21}x_2y_1+\mathrm{C}_{34}x_3y_4+\mathrm{C}_{43}x_4y_3=0,\\ (\Phi\Psi)&=c_{12}\mathrm{X}_1\mathrm{Y}_2+c_{21}\mathrm{X}_2\mathrm{Y}_1+c_{34}\mathrm{X}_3\mathrm{Y}_4+c_{43}\mathrm{X}_4\mathrm{Y}_3=0,\end{aligned}$$

con
$$\mathrm{C}_{12}\mathrm{C}_{21}\mathrm{C}_{34}\mathrm{C}_{43}=1,\quad c_{12}c_{21}c_{34}c_{43}=1,$$
$$c_{12}\mathrm{C}_{12}=c_{21}\mathrm{C}_{21}=1,\quad c_{34}\mathrm{C}_{34}=c_{43}\mathrm{C}_{43}=1,$$

essendo inoltre
$$(\theta\theta)=(\mathrm{C}_{12}+\mathrm{C}_{21})p_1p_2+(\mathrm{C}_{34}+\mathrm{C}_{43})p_3p_4=0,$$
$$(\Theta\Theta)=(c_{12}+c_{21})\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2+(c_{34}+c_{43})\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4=0:$$

siano $\mathrm{P}^{(0)}$, $\mathrm{P}^{(1)}$, $\mathrm{P}^{(2)}, \ldots \mathrm{P}^{(\lambda)}$, $p^{(0)}$, $p^{(1)}$, $p^{(2)}, \ldots p^{(\lambda)}$ i punti ed i piani, o pure $p^{(0)}$, $p^{-(1)}$, $p^{-(2)}, \ldots p^{-(\lambda)}$, $\mathrm{P}^{(0)}$, $\mathrm{P}^{-(1)}$, $\mathrm{P}^{-(2)}, \ldots \mathrm{P}^{-(\lambda)}$ i piani ed i punti che si corrispondono alternativamente e successivamente, passando dalla prima figura alla

seconda, o pure dalla seconda figura alla prima; si troverà (per λ positivo o negativo)

$$(7)\quad \begin{aligned}
&p_1^{(\lambda)}=\left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^{\lambda}p_1^{(0)},\quad p_2^{(\lambda)}=\left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^{\lambda}p_2^{(0)},\quad p_3^{(\lambda)}=\left(\frac{C_{34}}{C_{43}}\right)^{\lambda}p_3^{(0)},\quad p_4^{(\lambda)}=\left(\frac{C_{43}}{C_{34}}\right)^{\lambda}p_4^{(0)},\\
&P_1^{(\lambda)}=\left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^{\lambda}C_{21}p_2^{(0)},\ P_2^{(\lambda)}=\left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^{\lambda}C_{12}p_1^{(0)},\ P_3^{(\lambda)}=\left(\frac{C_{43}}{C_{34}}\right)^{\lambda}C_{43}p_4^{(0)},\ P_4^{(\lambda)}=\left(\frac{C_{34}}{C_{43}}\right)^{\lambda}C_{34}p_3^{(0)},\\
&P_1^{(\lambda)}=\left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^{\lambda}P_1^{(0)},\quad P_2^{(\lambda)}=\left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^{\lambda}P_2^{(0)},\quad P_3^{(\lambda)}=\left(\frac{c_{34}}{c_{43}}\right)^{\lambda}P_3^{(0)},\quad P_4^{(\lambda)}=\left(\frac{c_{43}}{c_{34}}\right)^{\lambda}P_4^{(0)},\\
&p_1^{(\lambda)}=\left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^{\lambda}P_2^{(0)},\quad p_2^{(\lambda)}=\left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^{\lambda}c_{12}P_1^{(0)},\ p_3^{(\lambda)}=\left(\frac{c_{43}}{c_{34}}\right)^{\lambda}c_{43}P_4^{(0)},\ p_4^{(\lambda)}=\left(\frac{c_{34}}{c_{43}}\right)^{\lambda}c_{34}P_3^{(0)}.
\end{aligned}$$

Da queste equazioni si deduce

$$(8)\quad \begin{aligned}
&\frac{p_1^{(\lambda)}p_2^{(\lambda)}}{p_3^{(\lambda)}p_4^{(\lambda)}}=\frac{p_1^{(0)}p_2^{(0)}}{p_3^{(0)}p_4^{(0)}},\qquad \frac{P_1^{(\lambda)}P_2^{(\lambda)}}{P_3^{(\lambda)}P_4^{(\lambda)}}=\frac{P_1^{(0)}P_2^{(0)}}{P_3^{(0)}P_4^{(0)}},\\
&\frac{p_1^{(\lambda)}p_2^{(\lambda)}}{p_3^{(\lambda)}p_4^{(\lambda)}}=\frac{c_{12}c_{21}}{c_{34}c_{43}}\cdot\frac{P_1^{(0)}P_2^{(0)}}{P_3^{(0)}P_4^{(0)}},\qquad \frac{P_1^{(\lambda)}P_2^{(\lambda)}}{P_3^{(\lambda)}P_4^{(\lambda)}}=\frac{C_{12}C_{21}}{C_{34}C_{43}}\cdot\frac{p_1^{(0)}p_2^{(0)}}{p_3^{(0)}p_4^{(0)}},
\end{aligned}$$

da cui si fa manifesto che tutt'i punti $P^{(\lambda)}$, o tutt'i piani $p^{(\lambda)}$, apparterranno, qualunque sia λ, ad una stessa superficie di 2° ordine, o ad una stessa superficie di 2ª classe. che passando per $P^{(0)}$, o toccando $p^{(0)}$, ha di comune con $(\theta\theta)$ e $(\Theta\Theta)$ le stesse loro quattro generatrici rettilinee comuni; queste due superficie di 2° ordine e di 2ª classe hanno rispettivamente per equazioni

$$(9)\qquad \frac{p_1p_2}{p_3p_4}=\frac{p_1^{(0)}p_2^{(0)}}{p_3^{(0)}p_4^{(0)}},\qquad \frac{P_1P_2}{P_3P_4}=\frac{P_1^{(0)}P_2^{(0)}}{P_3^{(0)}P_4^{(0)}},$$

essendo

$$\frac{p_1^{(0)}p_2^{(0)}}{p_3^{(0)}p_4^{(0)}}=\frac{c_{12}c_{21}}{c_{34}c_{43}}\cdot\frac{P_1^{(0)}P_2^{(0)}}{P_3^{(0)}P_4^{(0)}},\quad \text{o sia}\quad \frac{P_1^{(0)}P_2^{(0)}}{P_3^{(0)}P_4^{(0)}}=\frac{C_{12}C_{21}}{C_{34}C_{43}}\cdot\frac{p_1^{(0)}p_2^{(0)}}{p_3^{(0)}p_4^{(0)}}.$$

Le due superficie (9) nella correlazione primitiva delle due figure si corrispondono involutoriamente; esse coincideranno in una stessa superficie di 2° ordine e di 2ª classe quando si ha

$$\frac{p_1^{(0)}p_2^{(0)}}{p_3^{(0)}p_4^{(0)}}=\pm\sqrt{\frac{C_{34}C_{43}}{C_{12}C_{21}}},\quad \text{onde}\quad \frac{P_1^{(0)}P_2^{(0)}}{P_3^{(0)}P_4^{(0)}}=\pm\sqrt{\frac{c_{34}c_{43}}{c_{12}c_{21}}},$$

sicchè le equazioni

$$(10)\quad p_1p_2\sqrt{C_{12}C_{21}}\mp p_3p_4\sqrt{C_{34}C_{43}}=0,\quad P_1P_2\sqrt{c_{12}c_{21}}\mp P_3P_4\sqrt{c_{34}c_{43}}=0,$$

rappresenteranno, in coordinate di punti ed in coordinate di piani, l'una o l'altra (a motivo del doppio segno) di due superficie di 2° ordine e di 2ª classe, ciascuna delle quali corrisponde a se stessa involutoriamente nella correlazione.

Considerando nelle figure consecutive le rette $R^{(\lambda)}$ o $r^{(\lambda)}$ che corrispondono ad una retta $R^{(0)}$ o $r^{(0)}$ si troverà

$$(11)\quad \begin{aligned}
&\frac{r_{23}^{(\lambda)}r_{14}^{(\lambda)}}{r_{23}^{(0)}r_{14}^{(0)}}=\frac{r_{31}^{(\lambda)}r_{24}^{(\lambda)}}{r_{31}^{(0)}r_{24}^{(0)}}=\frac{r_{12}^{(\lambda)}r_{34}^{(\lambda)}}{r_{12}^{(0)}r_{34}^{(0)}},\\
&\frac{R_{23}^{(\lambda)}R_{14}^{(\lambda)}}{R_{23}^{(0)}R_{14}^{(0)}}=\frac{R_{31}^{(\lambda)}R_{24}^{(\lambda)}}{R_{31}^{(0)}R_{24}^{(0)}}=\frac{R_{12}^{(\lambda)}R_{34}^{(\lambda)}}{R_{12}^{(0)}R_{34}^{(0)}},
\end{aligned}$$

sicchè quelle rette ($R^{(\lambda)}$, $r^{(\lambda)}$) apparterranno al complesso *tetraedrale* rappresentato dall'uno, o dall'altro sistema delle equazioni (11), (le quali equivalgono ad una sola) ponendo r_{ij} ed R_{ij} invece di $r_{ij}^{(\lambda)}$ ed $R_{ij}^{(\lambda)}$; le rette di questo complesso determinano con le facce, o con i vertici, del tetraedro fondamentale gruppi di quattro punti, o di quattro piani, che hanno tutti gli stessi rapporti anarmonici.

I punti $P^{(0)}$ ai quali appartengono i piani $p^{(\lambda)}$, ed i piani $p^{(0)}$ ai quali appartengono i punti $P^{(\lambda)}$, nella correlazione d'ordine λ delle figure consecutive dedotte dalla correlazione primitiva, apparterranno rispettivamente alla superficie di 2° ordine $(\theta\theta)^{(\lambda)}$, ed alla superficie di 2ª classe $(\Theta\Theta)^{(\lambda)}$, rappresentate dalle equazioni

$$(12)\quad \begin{aligned} (nn)^{(\lambda)} &= \left[\left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^{\lambda} C_{12} + \left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^{\lambda} C_{21}\right] p_1 p_2 + \left[\left(\frac{C_{34}}{C_{43}}\right)^{\lambda} C_{34} + \left(\frac{C_{43}}{C_{34}}\right)^{\lambda} C_{43}\right] p_3 p_4 = 0, \\ (\Theta\Theta)^{(\lambda)} &= \left[\left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^{\lambda} c_{12} + \left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^{\lambda} c_{21}\right] P_1 P_2 + \left[\left(\frac{c_{34}}{c_{43}}\right)^{\lambda} c_{34} + \left(\frac{c_{43}}{c_{34}}\right)^{\lambda} c_{43}\right] P_3 P_4 = 0. \end{aligned}$$

Queste equazioni restano inalterate se si cambia λ in $-(\lambda+1)$.

Finalmente per la correlazione d'ordine λ, i connessi lineari analoghi ad (R) ed (r) saranno rappresentati dalle equazioni

$$(13)\quad \begin{aligned} (R)^{(\lambda)} &= \left[\left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^{\lambda} C_{12} - \left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^{\lambda} C_{21}\right] r_{12} + \left[\left(\frac{C_{34}}{C_{43}}\right)^{\lambda} C_{34} - \left(\frac{C_{43}}{C_{34}}\right)^{\lambda} C_{43}\right] r_{34} = 0, \\ (r)^{(\lambda)} &= \left[\left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^{\lambda} c_{12} - \left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^{\lambda} c_{21}\right] R_{12} + \left[\left(\frac{c_{34}}{c_{43}}\right)^{\lambda} c_{34} - \left(\frac{c_{43}}{c_{34}}\right)^{\lambda} c_{43}\right] R_{34} = 0. \end{aligned}$$

Supponiamo ora che sia

$$(14)\quad \begin{aligned} &\left(\frac{C_{12}}{C_{21}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{c_{21}}{c_{12}}\right)^{\lambda} = 1, \quad \text{onde anche} \quad \left(\frac{C_{21}}{C_{12}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{c_{12}}{c_{21}}\right)^{\lambda} = 1, \\ &\text{o pure} \\ &\left(\frac{C_{34}}{C_{43}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{c_{43}}{c_{34}}\right)^{\lambda} = 1, \quad \text{onde anche} \quad \left(\frac{C_{43}}{C_{34}}\right)^{\lambda} = \left(\frac{c_{34}}{c_{43}}\right)^{\lambda} = 1, \end{aligned}$$

si vedrà, per le formole (7), che coinciderà il punto $P^{(\lambda)}$ col punto $P^{(0)}$, ed il pian $p^{(\lambda)}$ col piano $p^{(0)}$, quando quel punto e quel piano apparterranno rispettivamente all'una, o all'altra, delle due diagonali del quadrilatero degli elementi involutorî comuni alle figure consecutive proposte; se poi le due condizioni predette si verificano insieme, coinciderà sempre il punto $P^{(\lambda)}$ col punto $P^{(0)}$, ed il piano $p^{(\lambda)}$ col piano $p^{(0)}$; segue da ciò che, nella serie delle figure consecutive dedotte dalla correlazione primitiva, se λ è un numero dispari, sarà involutoria (parziale o totale) la correlazione d'ordine $\dfrac{\lambda-1}{2}$, e se λ è un numero pari, sarà involutoria (parziale o totale) la collineazione d'ordine $\dfrac{\lambda}{2}$; la correlazione primitiva si dirà in tali casi *periodica* (parziale o totale) d'ordine λ. Osservando che

$$\frac{C_{21}}{C_{12}} = \frac{c_{12}}{c_{21}}, \quad \frac{C_{12}}{C_{21}} = \frac{c_{21}}{c_{12}}, \quad \frac{C_{43}}{C_{34}} = \frac{c_{34}}{c_{43}}, \quad \frac{C_{34}}{C_{43}} = \frac{c_{43}}{c_{34}},$$

sono, con i segni mutati, le radici delle equazioni (7) del numero precedente, se s'indica con $\cos\frac{2l\pi}{\lambda}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{2l\pi}{\lambda}=\sigma$ una radice di grado λ dell'unità, la correlazione primitiva sarà periodica parziale d'ordine λ allorchè si verifica l'una o l'altra delle condizioni equivalenti

$$(15)\quad \begin{cases} \left(4\cos^2\frac{2l\pi}{\lambda}-2\right)(\mathrm{A},\mathrm{B})-2\cos\frac{2l\pi}{\lambda}(a\mathrm{B})(b\mathrm{A})+(f\mathrm{F})(g\mathrm{G})=0\,, \\ \left(4\cos^2\frac{2l\pi}{\lambda}-2\right)(a,\ b)-2\cos\frac{2l\pi}{\lambda}(\mathrm{A}b)(\mathrm{B}a)+(\mathrm{F}f)(\mathrm{G}g)=0\,, \end{cases}$$

e sarà periodica totale d'ordine λ quando queste condizioni sono verificate per due valori l' ed l'' del numero intero l: i casi speciali di $\sigma=\pm 1$ sono stati esaminati precedentemente.

Ricerche sui tre acidi fluobenzoici isomeri e sugli acidi fluotoluico e fluoanisico.

Memoria di E. PATERNÒ e V. OLIVERI

letta nella seduta dell' 8 gennaio 1882.

Uno di noi, in una Notizia preliminare, letta in questa Accademia nella seduta del 6 febbraio 1881, ha annunziato che, allo scopo di meglio stabilire la natura chimica del fluoro, aveva intrapreso, insieme ai signori V. Oliveri ed F. Canzoneri, una serie di ricerche intorno a composti organici fluorurati, ed accennava ai principali risultati fin allora ottenuti. Una parte di tali ricerche non hanno potuto progredire gran fatto, perchè richiedevano degli apparecchi in platino costosi ai quali è stato impossibile fin ora provvedere cogli scarsi mezzi di cui dispone questo laboratorio (¹): le ricerche invece sugli acidi fluorurati, per le quali è sufficiente una mediocre capsula di platino, sono state regolarmente continuate e formano l'oggetto di questa Memoria.

I. Acidi fluobenzoici: C_6H_4 Fl. COOH.

Come è noto, il solo acido organico fluorurato studiato con cura sino agli ultimi tempi, era l'acido fluobenzoico, ottenuto nel 1870 da Schmitt e Gehren (²) per mezzo dell'acido amidobenzoico ordinario e da tutti considerato quale acido metafluobenzoico. Il punto di fusione di quest'acido trovato dagli scopritori a 182°, tendeva intanto a mostrare che in fluoro non seguiva, per i punti di fusione, la legge che si osserva nei corrispondenti composti jodurato, bromurato e clorunato, perchè allora avrebbe dovuto fondersi al di sotto di 153°, temperatura alla quale si fonde l'acido metaclorobenzoico. È stato per chiarire tale quistione che ci siamo proposti, nello intraprendere lo studio dei composti organici fluorurati, di cominciare dal preparare ed esaminare comparativamente i tre acidi fluobenzoici che sono prevedibili. Come è stato detto nella Notizia preliminare, pubblicata nel febbraio di questo anno, ci siamo subito accorti appena cominciato il nostro studio, che Schmitt e Gehren erano caduti in errore, del resto difficile ad interpretarsi, e che avevano avuto in mano l'acido parafluobenzoico; l'acido metafluobenzoico, preparato dal metaamidobenzoico puro, è un acido diverso da quello da loro descritto ed affatto nuovo.

(¹) Sento il dovere di ringraziare pubblicamente S. E. il Ministro della P. I., il quale con Decreto del 14 ottobre mi accordava un assegno straordinario di L. 3000 per mettermi in grado di provvedere alle spese di queste ricerche.

(²) Journal fuer pracktische Chemie, vol. I, p. 391-1870.

1. *Acido parafluobenzoico* (l. 4.). Siamo partiti dal nitrotoluene solido, lo abbiamo trasformato in acido nitrodracilico col metodo di Wilbrand e Beilstein [1] per ossidazione cioè con acido nitrico ordinario; abbiamo separato il nitrotoluene inalterato dall'acido formatosi, trattando il prodotto con ammoniaca, e finalmente abbiamo purificato l'acido nitrodracilico per cristallizzazioni dall'acqua bollente; si presentava in belli aghi quasi bianchi, fusibili a 238-239°. Da esso abbiamo ottenuto, per riduzione con lo stagno e l'acido cloridrico, il corrispondente acido amidodracilico, il quale cristallizzato dall'alcool molto acquoso, era in aghi setacei un poco gialli fusibili a 186-187°. L'acido paraamidobenzoico fu poscia trasformato nel composto diazoamidico, seguendo le indicazioni di Reichenbach e Beilstein [2] cioè sciogliendolo nella minore possibile quantità di alcool assoluto, ed aggiungendovi una soluzione alcoolica satura di anidride azotosa sino a formazione di precipitato. Fu così ottenuto l'acido diazoparamidobenzoico sotto forma di una polvere gialla, che lavata con alcool e disseccata all'aria, venne finalmente decomposta con acido fluoridrico. Per ciascuna operazione s'introducevano in una grande capsula di platino c.c. 200 di acido fluoridrico concentratissimo e quindi da 12 a 15 grammi del composto diazoamidico; poscia si scaldava leggermente; la massa divenuta schimmeggiante, per lo svolgimento di azoto, si agitava continuamente con una bacchetta di platino o di gomma indurita sino a compimento della reazione. Lasciando raffreddare si depone la maggior parte dell'acido fluobenzoico, che si raccoglie sopra un imbuto di gomma indurita, e si purifica cristallizzandolo dall'acqua bollente in presenza di un poco di carbone animale: in soluzione nell'acido fluoridrico resta il fluoridrato dell'acido paramidobenzoico pel quale abbiamo trovato il punto di fusione a 210-211°.

L'acido parafluobenzoico da noi ottenuto cristallizza dall'acqua bollente in laminette o in aghi piatti, di splendore madreperlaceo e che difficilmente si ottengono affatto incolore; è solubile nell'alcool, nell'etere, nella benzina ecc.; ha nel complesso l'apparenza dell'acido benzoico, ed un odore simile. Si fonde a 180-181° ed è volatile senza decomposizione.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati: gr. 0,1754 di sostanza, bruciata con l'ossido di rame, diedero gr. 0,3859 di CO_2 e gr. 0,055 di H_2O.

Ossia in 100:

Carbonio	59,97
Idrogeno	3,60

Per la formola C_6H_4 Fl. COOH si calcola:

Carbonio	60,00
Idrogeno	3,57

Abbiamo preparato i sali di calcio e di bario di questo acido.

a) Il *sale di bario* fu ottenuto aggiungendo carbonato baritico, sino a neutralità, ad una soluzione acquosa bollente dell'acido, e fu purificato per cristallizzazione dall'acqua bollente. Si presenta in laminette mal definite non del tutto incolore, mediocremente solubili nell'acqua calda, poco in quella fredda.

[1] Annalen den Chemie und Pharmacie, t. 126, p. 255 e t. 128, p. 257.
[2] Annalen d. Chem. Pharm. t. 132, p. 292.

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

I. gr. 0,729 del sale, disseccato all'aria, hanno perduto per lo scaldamento a 105° in una corrente di aria secca gr. 0,1074 di acqua;

II. gr. 0,2376 del sale secco hanno fornito gr. 0,1315 di solfato baritico.

Da questi risultati si calcola:

	I	II
Acqua	14, 72	—
Bario (nel sale anidro)	—	32, 62

La formola $(C_6H_4 Fl CO_2) Ba + 4 H_2O$ richiede:

Acqua	14, 78
Bario (nel sale anidro)	33, 01

b) Il *sale di calcio* fu preparato come quello baritico e si presenta in isquamette mal definite, che si ottengono sempre colorate in giallo e che sono molto solubili nell'acqua calda ed anche in quella fredda.

All'analisi ha dato:

I. gr. 0,7022 del sale cristallizzato perdettero a 105° gr. 0,1018 di acqua;

II. gr. 0,1865 di sale secco fornirono gr. 0,0795 di solfato calcico.

Ossia in 100 parti:

	I	II
Acqua	14, 50	—
Calcio (nel sale secco)	—	12, 55

Questo sale contiene quindi $3 H_2O$. Infatti per la formola $(C_6 H_4 Fl CO_2)_2 Ca + 3 H_2O$, si calcola:

Acqua	14, 51
Calcio (nel sale anidro)	12, 57

Dallo esame dell'acido parafluobenzoico e dei suoi sali risulta ad evidenza quello che abbiamo in principio affermato che esso sia identico all'acido di Schmitt e Gehren, non ostante le piccole differenze nell'acqua di cristallizzazione dei sali.

2. *Acido metafluobenzoico* (1, 3). L'acido metaamidobenzoico adoperato in queste ricerche fu, in parte, da noi preparato dall'acido metanitrobenzoico purificato col metodo Griess ([1]), ed in parte fu comprato alla fabbrica di C. A. F. Kahlbaum di Berlino. Cristallizzato dall'acqua lievemente alcoolica si fondeva a 173-175°. Sia di quello da noi preparato, sia dell'altro acquistato a Berlino, ci siamo assicurati della purezza, trasformandone una parte in acido clorobenzoico, e constatando che si produceva esclusivamente dell'acido metaclorobenzoico puro fusibile a 153°.

Riconosciuta la natura dell'acido amidato, per ottenere il corrispondente acido fluobenzoico abbiamo seguìto precisamente il processo descritto nella preparazione dell'acido della serie para. Decomponendo, con l'acido fluoridrico, l'acido diazometaamidobenzoico abbiamo ottenuto, dalle acque madri, il fluoridrato dell'acido metaamidobenzoico in aghi fusibili a 175°, mentre la parte depostasi pel raffreddamento costituiva l'acido metafluorobenzoico, il quale purificato per un paio di cristallizzazioni dall'acqua bollente si presenta sotto forma di laminette simili a quelle dell'acido benzoico, perfettamente incolore e fusibili a 123-124°.

([1]) Berichte ecc. tom. VIII, p. 526-1875.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,1357 di sostanza diedero gr. 0,258 di CO_2 e gr. 0,0582 di acqua;

II. gr. 0,238 di sostanza diedero gr. 0,5217 di CO_2 e gr. 0,0804 di acqua.

Cioè in 100 parti:

	I	II
Carbonio	59,94	59,78
Idrogeno	3,71	3,75

mentre si calcola:

Carbonio	60,00
Idrogeno	3,57

a) Il *sale di bario* di quest'acido cristallizza con $3\,H_2O$ come provano le analisi seguenti:

I. gr. 1,173 di sale perdettero per lo scaldamento a 105° in una corrente d'aria secca, gr. 0,1364 di acqua;

II. gr. 0,208 di sale secco fornirono gr. 0,0668 di solfato baritico.

Ossia:

	I	II
Acqua	11,63	—
Bario (nel sale secco)	—	33,25

mentre per la formola $(C_6H_4 . Fl . CO_2)\ Ba + 3\,H_2O$ si calcola:

Acqua	11,70
Bario (nel sale anidro)	33,01

b) Il *sale di calcio* contiene pure $3\,H_2O$. Esso si presenta in laminette madreperlacce, mal definite. È molto solubile nell'acqua calda, ed all'analisi ha dato:

I. gr. 1,2965 di sale perdettero per lo scaldamento a 105°, gr. 0,1837 di acqua;

II. gr. 0,236 di sale secco fornirono gr. 0,1005 di di solfato calcico.

Ossia:

	I	II
Acqua	14,17	—
Calcio (nel sale secco)	—	12,52

Si calcola invece:

Acqua	14,51
Calcio (nel sale anidro)	12,57

c) Il *sale di argento* fu preparato aggiungendo nitrato di argento alla soluzione ammoniacale concentrata dell'acido metafluobenzoico; si ottiene un abbondante precipitato che si purifica per cristallizzazione dall'acqua bollente, dalla quale si depone in aghetti incolori, duri e ben definiti, che si alterano per l'esposizione alla luce. Non contiene acqua di cristallizzazione.

d) Il *sale sodico* fu preparato neutralizzando esattamente la soluzione dell'acido libero con carbonato sodico puro; dall'acqua bollente cristallizza in larghe squame bianche opache che costituiscono delle masse erborescenti. Contiene una molecola d'acqua. Infatti:

gr. 1,185 di sale, riscaldato a 100° in una corrente d'aria secca, perdettero gr. 0,113 di acqua.

Ossia per $^0/_0$

Acqua 9,54

Per la formola $C_6H_4.Fl.COONa + H_2O$ si calcola:

Acqua . . . . 10,00 $^0/_0$

e) L'*etere metilico* fu preparato per l'azione del joduro di metile sul sale di argento. La reazione comincia a freddo e si compie facilmente per un leggiero scaldamento. È un liquido incoloro e trasparente, che rifrange fortemente la luce, di odore grato simile a quello degli altri eteri benzoici, bolle a 192-194^0. All'analisi ha dato i seguenti risultati:

gr. 0,3552 di sostanza fornirono gr. 0,7461 di CO_2 e gr. 0,1556 di H_2O; cioè $^0/_0$:

Carbonio 62,74

Idrogeno 4,64

mentre per la formola $C_6H_4Fl.CO.OCH_3$ si calcola:

Carbonio 63,33

Idrogeno 4,54

La leggiera perdita nel carbonio deve attribuirsi alla difficoltà di disseccare completamente piccole quantità di liquido.

Il punto di fusione dell'acido metafluorobenzoico, la quantità di acqua contenuta dal suo sale baritico e la completa diversità da quello studiato da Schmitt e Gehren, confermano, se fosse necessario, quanto abbiamo sopra asserito sulla identità dell'acido ottenuto da questi chimici con l'acido parafluobenzoico.

3. *Acido ortofluobenzoico* (l. 2). Il punto di partenza per ottenere quest'acido fu naturalmente l'acido antranilico, che noi abbiamo preparato dall'indaco, seguendo precisamente le indicazioni di Hübner e Petermann [1]. Da un chilogramma d'indaco abbiamo ottenuto gr. 145 di acido antranilico puro, fondente a 144^0. Per accertarci della sua purezza ne abbiamo trasformato una porzione in acido clorobenzoico, ed abbiamo ottenuto esclusivamente dell'acido ortoclorobenzoico, fusibile a 136^0.

Come fu accennato nella Notizia preliminare già citata, abbiamo incontrato qualche difficoltà nella preparazione dell'acido ortofluobenzoico, principalmente perchè non siamo riusciti, seguendo lo stesso metodo descritto per gli altri due isomeri, ad ottenere l'acido diazoamidoantranilico. Essendoci però nel corso delle nostre esperienze avveduti che tale acido era, a differenza dei suoi isomeri, solubile nell'alcool, abbiamo subito eliminato questo solvente, e sostituendolo con etere siamo riusciti completamente nel nostro intento. Si scioglie l'acido antranilico nella minore possibile quantità di nitrito etilico ed alla soluzione si aggiunge un eccesso di etere assoluto, saturo di anidride azotosa; si separa allora, dopo poco tempo, un ammasso di cristallini che raccolti sopra un filtro e lavati costituiscono l'acido diazoamidoantranilico. Esso è incoloro se di recente preparato, all'aria si colora mano mano in giallo; per lo scaldamento si decompone a circa 80^0 con violenta esplosione. Trattato all'ebollizione con acido cloridrico fumante, come abbiamo già detto, si trasforma in acido clorosalilico.

[1] Annalen der Chemie und Pharmacie, t. 149, p. 129.

La decomposizione dell'acido diazoortoamidobenzoico con l'acido fluoridrico avviene senza schiumeggiamento e più lentamente che per i suoi isomeri; conviene perciò prolungare lo scaldamento per un tempo maggiore. Come al solito resta sciolto nelle acque fluoridriche il fluoridrato dell'acido antranilico, il quale può ottenersi in aghi setacei, solubilissimi, fondenti a circa 200° con decomposizione; mentre l'acido fluorurato si depone pel raffreddamento e si purifica cristallizzandolo dall'acqua bollente. Esso si presenta in sottili aghi quasi incolori; è più solubile nell'acqua bollente dei suoi isomeri; si scioglie bene nell'alcool e nell'etere, e si fonde a 117-118°.

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

I. gr. 0,2737 di sostanza fornirono gr. 0,5941 di anidride carbonica e gr. 0,1121 di acqua;

II. gr. 0,243 di sostanza fornirono gr. 0,5318 di anidride carbonica e gr. 0,885 di acqua.

Cioè %:

	I	II
Carbonio	59,26	59,68
Idrogeno	3,74	3,99

mentre si calcola:

Carbonio	60,00
Idrogeno	3,57

a) Il *sale di bario* di quest'acido è anch'esso in laminette mal definite, leggiere, che conservano sempre una lieve tinta giallastra, e sono molto solubili nell'acqua. Esso cristallizza con $2 H_2O$ come si deduce dai seguenti risultati analitici:

I. gr. 0,5928 di sale per lo scaldamento a 105° perdettero gr. 0,495 di acqua;

II. gr. 0,1797 di sale secco fornirono gr. 0,0592 di $BaSO_4$.

Onde per 100:

	I	II
Acqua	8,30	—
Bario (nel sale secco)	—	32,94

Per la formola $(C_6H_4Fl.CO_2)_2 Ba + 2 H_2O$ si calcola:

Acqua	8,21
Bario (nel sale anidro)	33,01

b) Il *sale calcico* cristallizza, come quello baritico, con $2 H_2O$, ed ha appresso a poco la medesima apparenza ed una solubilità analoga; difficilmente si ottiene incoloro.

All'analisi ha dato i risultati seguenti:

I. gr. 0,5757 di sale perdettero per lo scaldamento a 105° gr. 0,058 di acqua;

II. gr. 0,217 del sale secco fornirono gr. 0,0267 di $CaSO_4$.

Cioè per %:

	I	II
Acqua	10,08	—
Calcio (nel sale secco)	—	12,45

mentre si calcola:

Acqua	10,14
Calcio	12,57

II. Acido fluotoluico $C_6 H_3 Fl \begin{matrix} CH_3 \\ COOH \end{matrix}$

L'acido nitrololuico fu preparato sciogliendo l'acido paratoluico nell'acido nitrico concentrato (d=1,4) sino a che cominciavano a svolgersi vapori rutilanti, e precipitando poscia con acqua. Si lava quindi e si cristallizza da un miscuglio di acqua con alcool. Si presenta in piccoli prismi duri fusibili a 187-189°.

Ridotto con lo stagno e l'acido cloridrico ci ha fornito l'acido paraamidotoluico in sottili aghi fusibili a 164-165°. Questo fu trasformato col solito metodo nel corrispondente diazoamidocomposto che si presenta in iscagliette bianche, che si decompongono a 120° con esplosione.

Decomponendo l'acido diazoamidotoluico con acido fluoridrico concentrato, la soluzione pel raffreddamento non lascia nulla cristallizzare; fu perciò neutralizzata con carbonato sodico, concentrata e trattata con acido cloridrico. Si ottenne così un precipitato fioccoso, che raccolto e dissecato, si purificò per ripetute cristallizzazioni da un miscuglio di alcool ed acqua, in presenza di carbone animale. Esso si presenta allora in isquamette bianche fusibili a 160-161° e costituisce l'acido fluorotoluico, come mostra la seguente analisi:

gr. 0,278 di sostanza fornirono gr. 0,6312 di anidride carbonica e gr. 0,012 di acqua, cioè per 100:

Carbonio	61,94
Idrogeno	4,32

Per la formola $C_6 H_3 Fl \begin{matrix} CH_3 \\ COOH \end{matrix}$ si calcola:

Carbonio	62,33
Idrogeno	4,54

III. Acido fluoanisico $C_6 H_3 Fl \begin{matrix} OCH_3 \\ COOH \end{matrix}$

L' acido nitroanisico fu preparato direttamente dalla essenza di anice e si presentava in masse cristalline giallastre, fusibili a 175-180°. Per la riduzione con lo stagno e l'acido cloridrico fu trasformato in acido amidoanisico, che ottenemmo in aghi fusibili a 180-181°. Quest'ultimo sciolto nell'alcool assoluto fu trattato con nitrito etilico ed etere, e fornì in tal modo il corrispondente diazoamidocomposto sotto forma di una polvere cristallina color paglino, che si decompone con esplosione verso 136°.

Gr. 10 di acido diazoamidoanisico furono riscaldati con c. c. 130 di acido fiuoridrico concentrato; non essendosi nulla deposto pel raffreddamento, abbiamo neutralizzato con carbonato sodico, filtrato, svaporato un poco e trattato con acido cloridrico. Si precipita una sostanza fioccosa che lavata con poca acqua, e cristallizzata da un miscuglio di acqua ed alcool, in presenza di carbone animale, costituisce l'acido fluoanisico. Esso si presenta in sottili aghi incolori fusibili a 204°.

All'analisi ha dato i risultati seguenti:

gr. 0,319 di sostanza fornirono gr. 0,1796 di anidride carbonica e gr. 0,123 di acqua, cioè deducendo la composizione centesimale:

Carbonio 56,30
Idrogeno 4,26

La teoria richiede:

Carbonio 56,47
Idrogeno 4,12

Onde paragonare quest'acido fluoanisico con gli acidi cloro e bromoanisico di costituzione analoga, abbiamo esaminato l'azione degli acidi cloridrico e bromidrico sull'acido diazomidoanisico; ma tanto nell'uno che nell'altro caso non abbiamo ottenuto che delle polveri cristalline colorate in rosso bruno, insolubili nei solventi ordinarî e che per lo scaldamento si decompongono senza fondersi. Il prodotto ottenuto per mezzo dell'acido cloridrico purificato per soluzione nel carbonato sodico, riprecipitazione e lavaggio con acqua conteneva:

19,06 di cloro

mentre per la formola dell'acido cloroanisico si calcola 19,05.

Abbiamo anche tentato di preparare un acido ossianisico per la decomposizione, con acqua bollente, del derivato diazoamidato, ma non abbiamo ottenuto risultati soddisfacenti: la maggior parte del prodotto si resinifica.

CONCLUSIONI

Dalle esperienze descritte in questa Memoria risulta che, contrariamente a quanto doveva dedursi dal lavoro di Schmitt e Gehren, gli acidi fluobenzoici hanno il punto di fusione più basso dei corrispondenti acidi clorurati, e perciò il fluore, in questa classe di composti organici, viene a prendere il suo posto, nella famiglia degli alogeni, prima del cloro conformemente al suo più piccolo peso atomico. La differenza, relativamente molto più piccola, che passa fra i punti di fusione degli acidi ortofluobenzoico e metafluobenzoico (6°) e quella fra questo e l'acido para (57°) trova riscontro negli altri prodotti di sostituzione alogenati dell'acido benzoico. Ed invero negli acidi clorobenzoici mentre si osserva una differenza di soli 16° fra l'orto ed il meta, essa è di 84° fra il meta ed il para; in quelli bromobenzoici le differenze sono rispettivamente di 13° e di 93°, e finalmente in quelli jodobenzoici di 28 e di 80°.

Se però le esperienze precedenti possono permettere di stabilire che il fluore sostituito negli acidi organici si comporta in generale in modo simile al cloro, al bromo ed al jodio, crediamo che sarebbe prematuro di volere estendere questa conseguenza alle altre classi di composti carbonici: ed infatti il solo altro esempio che possa invocarsi, cioè la fluorobenzina ottenuta da Schmitt e Gehren, condurrebbe a tutt'altro giudizio, giacchè mentre la monocloro, la monobromo e la monojodobenzina sono dei liquidi che bollono rispettivamente a 132°, 155° e 185°, la fluorobenzina è solida, fusibile a 40° e bollente a 180-183°. Essendo sotto ogni riguardo importantissimo di confermare questo fatto e di corredarlo di altri esempî, e riuscendo assai lungo e dispendioso di preparare la fluorobenzina ed il fluorotoluene dagli acidi fluobenzoici e fluotoluico, sono state fatte nel laboratorio delle esperienze numerose e varie per potere ottenere quei composti dall'anilina e dalla toluidina

passando pei diazoderivati. Però impiegando sia i solfati che i nitrati di questi ultimi e decomponendoli con acido fluoridrico a diverso grado di concentrazione, ed anche in soluzione acetica, non è stato possibile di ottenere la fluorobenzina ed il fluorotoluene. Sono pure state fatte delle esperienze sostituendo, all'acido fluoridrico libero, il fluoruro ammonico, ma senza risultato più facile. Del resto questi insuccessi varranno a farci insistere maggiormente sull'argomento.

Prima di porre termine a questa Memoria sui composti organici del fluoro, dobbiamo notare che fin ora manca un processo per determinare in essi il fluore. Le esperienze di Schmitt e Gehren, come essi stessi riconoscono, non sono soddisfacenti sotto questo riguardo; noi abbiamo sulle prime tentato di determinare il fluoro negli acidi fluorurati calcinandoli liberi o allo stato di sale calcico, con della calce, ed avendo subito constatato, come già Schmitt e Gehren, che buona parte del fluoro sfugge sotto forma di composti volatili, abbiamo aggiunto alla sostanza del clorato potassico, onde operarne la combustione più completamente e rapidamente; però i risultati non sono stati fin ora soddisfacenti. Del resto per tali esperienze sarebbero stati necessarî degli apparecchi di platino appositi e, giova ripeterlo, noi fin ora non abbiamo potuto avvalerci che dello scarso materiale che trovavasi in laboratorio, non comprato certo in previsione delle presenti ricerche. Osserveremo pure che, nel caso particolare degli acidi fluorurati, abbiamo tentato di determinare il fluoro applicando convenientemente il metodo di Kekulé per la determinazione degli alogeni, cioè per la riduzione con l'idrogeno nascente svolto dall'amalgama di sodio. Ma, cosa strana, in cinque tentativi da noi fatti cogli acidi para e metafluobenzoico, operando sì in soluzione alcalina che acida, non abbiamo ottenuto la benchè minima riduzione. Questo fatto è forse il relazione con l'altro che l'anidride carbonica sposta l'acido fluoridrico dal fluoruro di argento.

Noi speriamo di poter continuare con maggiore alacrità lo studio dei composti organici fluorurati, poichè crediamo che i risultati ai quali porterà potranno giovare per venire ad una migliore conoscenza di uno fra i più importanti elementi.

Ricerche sulla genesi delle ptomaine.

Memoria di E. PATERNÒ e P. SPICA (¹).

letta nella seduta dell' 8 gennaio 1882.

Verso la metà dell'anno 1880 uno di noi, il prof. P. Spica, pubblicava nella Gazzetta chimica t. X, p. 492 una Memoria: *Sopra alcune sostanze alcaloidee che furono rinvenute nell'organismo animale durante vita*, nella quale egli prova che in un liquido estratto durante vita dalla cavità addominale d'una donna affetta da gravidanza estrauterina erano contenute delle sostanze di natura alcaloidea simili alle ptomaine del Selmi. A pag. 493 prima di cominciare la esposizione dei risultati, per giustificare la ragione della investigazione dice che « tale ricerca sarebbe stata di « una qualche importanza, poichè nel caso che sostanze alcaloidee si fossero trovate « (come lo furono di fatto), siccome il liquido in esame era státo estratto dall'orga- « nismo prima della morte, si sarebbe trattato qui di dovere ammettere la formazione « di dette sostanze alcaloidee durante vita, e non per la putrefazione dopo morte; « cosa questa che, per quanto è a me noto, non venne da altri provata ». — Ed alla fine a p. 513 dopo aver detto che egli attribuisce « le reazioni avute a sostanze « alcaline, venefiche o no, formatesi nell'organismo di quella donna incinta, nello stato « patologico in cui trovavasi » il prof. Spica soggiunge: « Tutto questo dà una grande « importanza ed in parte una conferma ad un' ultima considerazione che il Selmi fece « in una Nota *Sulla genesi degli alcaloidi venefici che si formano nei cadaveri*, là « dove scrive quanto appresso: La formazione di alcaloidi venefici nella putrefazione « degli albuminoidi è credibile che pure avvenga nell'economia animale, allorquando « per certe influenze succede un' alterazione più o meno profonda in alcuni organi, « nel fluido sanguigno ed in altri umori, e che da ciò ne succedono quegli avvelena- « menti interni tanto perniciosi da produrre effetti letali ».

La discussione privata tra lo Spica ed il Paternò a cui diede luogo la pubblicazione della Memoria citata, ed il fatto che giusto in quel torno prima il Paternò e poi lo Spica, venivano chiamati a far parte della r. Commissione per l'accertamento dei reati di veneficio, furono le cause principali che li spinsero ad intraprendere le ricerche delle quali oggi diamo conto. Ed infatti il prof. Paternò, il quale già da molti anni, come risulta da comunicazioni private fatte al prof. Selmi e da lui citate, e dagli atti del Congresso di Palermo (1875), si era occupato incidentalmente

(¹) Un sunto di questa Memoria fu letto nella seduta del 6 novembre 1881 della r. Commissione per l'accertamento dei reati di veneficio.

di questo argomento senza però avervi mai voluto prendere parte attiva e pubblica, faceva osservare allo Spica che sia le esperienze sue sul liquido estratto durante vita, sia quelle del Selmi, varie e numerose, sugli alcaloidi dei visceri e su quelli della putrefazione degli albuminoidi, peccavano in ciò che nè l'uno nè l'altro, si era mai dato la pena di esaminare se i liquidi animali nello stato veramente fisiologico fornissero delle sostanze alcaloidee simili a quelle estratte dai cadaveri e dai prodotti della putrefazione degli albuminoidi. Il Paternò sostenne che le reazioni, del resto tanto poco caratteristiche e speciali, rinvenute dal Selmi per le sue ptomaine e dallo Spica nelle ultime ricerche, si avrebbero su per giù egualmente avute con gli estratti ottenuti in modo analogo da liquidi in istato fisiologico, come già l'esperienza aveva a lui mostrato che da tutti i vegetali (compresa la paglia ed il fieno) applicando il metodo Stas-Otto per estrarre gli alcaloidi si ottenevano degli estratti con parecchie delle reazioni delle ptomaine [1].

Per venire ad un risultato pratico dalla discrepanza delle opinioni superiormente esposte, il prof. Paternò propose d'intraprendere, seguendo lo stesso metodo seguìto dallo Spica nella Memoria citata, una serie di ricerche sopra un liquido fisiologico: il sangue. — Il fatto diede ragione al prof. Paternò ed i risultati di queste prime esperienze furono comunicati nella seduta del 3 maggio della r. Commissione per l'accertamento dei reati di veneficio, presieduta dal compianto comm. Selmi. — Nella breve discussione che ne nacque abbiamo preso impegno, riferendoci ai risultati ottenuti dal Selmi con l'albumina putrefatta, di ripetere le nostre esperienze con dell'albumina fresca, sicuri che anche in questo caso il risultato sarebbe stato quello di riuscire ad estrarre delle sostanze alcaloidee o ptomaine, come usualmente vengono indicate.

In questa Memoria esporremo le esperienze, dovute quasi esclusivamente al prof. Spica, ed i risultati ottenuti nei due casi del sangue e delle uova fresche; dichiarando che sebbene non attribuiamo molto valore e significato alle varie e forse troppo numerose reazioni che per le ptomaine sono state indicate, e molto meno a certi caratteri che crediamo spesso accidentali, pur tuttavia dovendo le presenti nostre esperienze mettere in confronto i risultati che si ottengono da quei liquidi fisiologici, senza precedente putrefazione, con quelli ottenuti dietro morte e putrefazione, ci è giocoforza, a maggiore chiarezza dell'argomento, seguire lo stesso metodo, nei più piccoli dettagli, che è stato seguìto dagli altri.

I. Esperienze sul sangue fresco.

Circa un chilogr. e mezzo di sangue di manzo preso al macello al momento dell'apertura delle vene, e non defibrinato, venne ridotto in pappa pressochè omogenea, indi venne addizionato con $^1/_{10}$ d'acido solforico diluito ad $^1/_5$ e con un litro d'acqua distillata e finalmente filtrato. Sul coagulo rimasto sul filtro si ripetè l'operazione ancora per due volte aggiungendo ogni volta circa due litri d'acqua distillata e 100 c. c. d'acido solforico diluito ad $^1/_5$, avendo cura, in queste ultime operazioni, di riscaldare

[1] V. Gazz. chim. t. V, pag. 350. — Altre esperienze sono state fatte col pane, colle pere ecc. e con risultati analoghi.

il miscuglio per un quarto d'ora a b. m. prima di filtrare. Spremuta la parte solida dopo il 3° trattamento, furono riuniti tutti i liquidi acidi delle diverse operazioni e furono svaporati a b. m. fino a consistenza sciropposa. Il residuo sciropposo fu filtrato, ed il liquido avuto fu mescolato con 4 vol. d'alcole a 98°, fatto digerire a b. m. per 2 o 3 ore, lasciato in riposo per 20 ore circa e finalmente filtrato. In tutte queste filtrazioni ciò che restava sui filtri veniva lavato bene e poi buttato via. — L'ultimo filtrato alcolico venne distillato a b. m. per eliminare l'alcole in massima parte, ed il liquido acquoso rimasto venne trattato coi diversi solventi secondo il processo altra volta tenuto esaminando il liquido proveniente dalla cavità addominale d'una donna affetta da gravidanza estrauterina ([1]). In tal modo trattando prima il liquido acido con benzina si ebbe un *estratto acido benzinico*, e poi rendendo alcalino il liquido per mezzo di ammoniaca e spossando coi solventi si ebbero successivamente: *un estratto alcalino benzinico, un estratto cloroformico, un estratto amilico, un estratto cloroformico finale*. È superfluo il dire che furono impiegati sempre solventi di nota purezza e dopo di averli ridistillati, che gli estratti vennero sempre sottoposti a replicate purificazioni, che le reazioni furono praticate con reattivi puri, e finalmente che si fecero delle esperienze di confronto in bianco là dove si credette opportuno.

a) Estratto acido benzinico. — Quest'estratto aveva odore di benzoino: fu ripreso con poche gocce d'acqua, e la soluzione neutra ottenuta fu saggiata coi seguenti reattivi:

Acido solforico conc. Non avvenne cangiamento; per l'aggiunta di bicromato potassico si ebbe una colorazione gialla persistente anco dopo qualche tempo e dopo riscaldamento.

Acido fosfomolibdico. Solo dopo due giorni si trovarono nel saggio dei cristalli romboidali verde-giallastri, i quali si scioglievano nell'acqua lasciando una polvere gialla. Aggiungendo una goccia d'ammoniaca ad un saggio fatto coll'acido fosfomolibdico si osservava, dopo qualche secondo, una lieve colorazione azzurrognola.

Cloruro d'oro. Solo dopo un giorno si trovò nel saggio dell'oro ridotto.

Cloruro ferrico. Non precipitò, ma aggiungendo al miscuglio una goccia di soluzione di ferrocianuro potassico, si ottenne colorazione azzurra.

Acido tannico. Non diede precipitato. Il residuo avuto per disseccamento spontaneo si sciolse nell'acqua, ma la soluzione forniva precipitato bianco per l'aggiunta di acido cloridrico.

I saggi che vennero fatti con l'acido solforico addiz. d'acido nitrico, coll'ioduro di potassio iodurato, coll'acido picrico, coll'ioduro mercurico-potassico, col cloruro di mercurio, col nitrato d'argento, col ferrocianuro di potassio, col cloruro platinico diedero risultati negativi.

b) Estratto alcalino benzinico. — Di quest'estratto si ebbero due porzioni, la prima proveniente dall'estratto per ispossamento con acqua sola, la seconda avuta riprendendo con acqua acidulato-solforica la parte indisciolta nell'acqua pura. In quel che segue sono indicate sotto α le reazioni fornite dalla soluzione acquosa neutra, e sotto β le reazioni della soluzione solforica.

([1]) V. Gazz. chim. t. X, p. 494.

α. Porzione solubile nell'acqua sola. La soluzione aveva reazione neutra.

Coll'*acido fosfomolibdico* solo dopo due giorni si ebbe un precipitato granulare cristallino quasi insolubile nell'acido cloridrico. Ad un saggio con l'acido fosfomolibdico aggiungendo ammoniaca non si ebbe colorazione, e dopo due giorni nel saggio si trovarono dei cristalli solubili in acqua ed un precipitato granulare solubile nell'acido cloridrico.

Col *cianuro argentico-potassico* solo dopo due giorni mostrò dei cristalli regolari (provenienti dal reagente) e degli aghetti corti, aggruppati a stellette, in massima parte solubili in acqua.

Col *ferrocianuro potassico* dopo due giorni, oltre ai cristalli dovuti al reagente, si osservarono dei piccoli granelli insolubili nell'acqua e solubili nell'acido cloridrico.

Col *cloruro di platino* dopo due giorni si ebbe un precipitato amorfo giallo, insolubile nell'acqua e solubile nell'acido cloridrico.

Col *cloruro d'oro* dopo due giorni si osservarono nel saggio degli aghetti misti a cristalli esagonali, a tavolette allungate ed a granuli rossastri. L'acqua discioglieva tutti i cristalli; l'acido cloridrico lasciava indisciolti i granuli.

Col *cloruro mercurico* dopo due giorni si osservarono dei cristalli scalariformi solubili nell'acqua, misti ad un precipitato amorfo e bianco solubile nell'acido cloridrico.

Coll'*acido picrico* si ebbero dei cristalli prismatici che per l'aggiunta d'acqua si scioglievano lasciando delle arborizzazioni oliose.

Coll'*acido tannico* dopo due giorni si ebbe un residuo il quale con acqua dava una soluzione: l'acido cloridrico aggiunto a questa produceva un precipitato amorfo, bianco, solubile in un eccesso di reagente.

Coll'*ioduro di potassio iodurato* si ebbe in principio una leggiera opalescenza (oliosa sotto il microscopio), e dopo due giorni si trovarono dei cubetti e dei prismi intrecciati a rete. L'acqua scioglieva i cristalli lasciando un residuo olioso.

Coll'*acido solforico* insieme a *bicromato potassico* si ottenne una colorazione giallo-verdastra che non si alterava col riscaldamento.

Coll'ioduro mercurico-potassico, col cianuro potassico, coll'acido solforico solo od addizionato di qualche goccia di acido nitrico non si ebbero reazioni speciali.

β. Porzione solubile nell'acqua solforica. Un poco di soluzione lasciata dentro d'un essicatore a cloruro di calcio diede degli aghi lunghissimi, isolati ed aggruppati ad irradiazioni. Un poco della soluzione trattata con potassa pura, produsse svolgimento di una base, che inazzurriva le carte di tornasole rosso ed arrossava le carte di curcuma. Le reazioni che furono osservate con questa porzione *β* sono qui appresso descritte.

L'*acido fosfomolibdico* fornì un precipitato istantaneo, amorfo, giallognolo che persistette anco dopo un giorno. Coll'ammoniaca il precipitato si sciolse con leggerissima tinta cerulea. Colla potassa il precipitato diventò ceruleo.

Il *joduro mercurico-potassico* all'istante diede un precipitato amorfo bianchiccio, poco solubile nell'acido cloridrico, solubile nell'eccesso di reagente. Dopo un giorno, oltre al precipitato granulare amorfo, si osservava un precipitato cristallino insieme a prismi lunghi incrociati ed aggruppati a fascio, solubili parzialmente nell'acqua e completamente nell'acido cloridrico

Il *cianuro potassico* in principio diede un semplice intorbidamento. Dopo un giorno si osservò qualche cosa di olioso insieme a prismi lunghi come nel saggio precedente. L'aggiunta di alcole produce in abbondanza delle tavolette esagonali. L'acido cloridrico scioglie tutto meno i prismi.

Il *cianuro argentino-potassico* fornì un precipitato abbondantissimo, caseoso, bianco in principio solubile e dopo un giorno insolubile nell'eccesso di reagente.

Il *ferrocianuro potassico* diede prima una colorazione azzurra che si manifestò lentamente e poi un precipitato azzurro con delle laminette riunite a farfalla e dei prismi come nei saggi precedenti. L'aggiunta d'alcole produce la formazione di tavolette esagonali. L'acido cloridrico diluito discioglie tutto meno che i prismi primitivi.

Il *cloruro di platino* dopo qualche tempo diede origine alla formazione di prismi tabulari, di dendriti, di pochi cristalli esagonali e di piccole crocette (700 diam.). Per l'aggiunta d'acqua i cristalli si sciolsero e restò un poco di precipitato amorfo granulare solubile completamente nell'acido cloridrico.

Il *cloruro d'oro* diede dopo pochi secondi un precipitato giallo, amorfo, solubile in gran parte nell'acido cloridrico. Dopo un giorno si osservarono nel saggio i soliti prismi dei saggi precedenti, gocce oliose abbondanti ed una polvere amorfa (oro?). Il tutto non veniva alterato nè per l'aggiunta di acqua, nè per quella d'alcole o d'acido cloridrico.

Il *cloruro mercurico* solo dopo un giorno lasciò osservare i soliti prismi sviluppatissimi che non erano alterati nè dall'acqua, nè dall'alcole, nè dall'acido cloridrico.

L'*acido picrico* fornì un precipitato istantaneo, cristallino, giallo, misto ad un poco di precipitato polveroso: i cristalli erano dei prismi romboidali disposti ad *y* od a ferro di lancia, ed erano solubili in molta acqua.

L'*acido tannico* solo dopo un giorno mostrò un precipitato amorfo, insolubile o poco solubile nell'acido cloridrico.

Il *joduro di potassio jodurato* diede istantaneamente un precipitato rosso-chermes, amorfo, polverulento, solubile in parte nell'eccesso di reagente e completamente solubile nell'acido cloridrico.

Il *cloruro ferrico* venne ridotto solo dopo qualche tempo.

L'*acido solforico* solo od addizionato di acido nitrico o di bicromato potassico non fornì niente di speciale.

c) Estratto cloroformico alcalino. — Quest'estratto aveva odore narcotico e la sua soluzione alcolico-acquosa aveva reazione alcalina. Ripreso con acqua cloridrica a caldo si ebbe coll'evaporazione della soluzione un cloridrato cristallizzato a croci scalariformi. Trattando un poco del cloridrato con idrato potassico puro si svolse una base volatile che agiva sulla carta rossa di tornasole. Le reazioni avute con questo cloridrato furono le seguenti:

Coll'*acido fosfomolibdico* si ebbe un precipitato istantaneo bianco-giallastro che dopo 30 ore era diventato granuloso e quasi insolubile nell'acido cloridrico concentrato anche a caldo. L'ammoniaca aggiunta al saggio colorava in azzurro il precipitato e poi lo scioglieva con lieve colorazione azzurra. La potassa impiegata invece dell'ammoniaca rendeva azzurro il precipitato, ma non lo scioglieva. Nell'ultimo caso dopo 30 ore si osservavano nel saggio dei cristallini esagonali parzialmente solubili nell'acqua, ed un precipitato amorfo insolubile. Il tutto si scioglieva in acido cloridrico.

Coll' *ioduro mercurico-potassico* si ebbe un prec. caseoso, bianco-giallastro, insolubile nell'ac. cloridrico, solubile nell'alcole. I caratteri persistevano gli stessi anco dopo 30 ore.

Col *cianuro argentico-potassico* si ebbe un prec. caseoso, bianco-giallastro, parzialmente solubile nell'alcole. Lo stesso si osservava anco dopo 30 ore.

Col *ferrocianuro potassico* si ebbe leggero prec. amorfo, giallo-verdastro.

Col *cloruro di platino* solo dopo 30 ore si osservò nel saggio un precip. granuloso insolubile nell'acqua e parzialmente solubile nell'acido cloridrico.

Col *cloruro d'oro* si ebbe un prec. istantaneo, abbondante, giallo, caseoso, che al momento era solubile nell'ac. cloridrico. Dopo 30 ore nel saggio primitivo si osservarono dei prismi tabulari, dei dendriti neri, e dei piccoli cristalli a facce esagonali o triangolari. L'acqua fece sparire i cristalli prismatici; l'ac. cloridrico lasciò indisciolti il resto di cristalli ed una pellicola amorfa, rossastra.

Col *cloruro mercurico* si ottenne un precip. istantaneo bianco, giallognolo amorfo. Dopo 30 ore il precip. aveva i primitivi caratteri ed era solubile nell'alcole.

Colla soluzione conc. di *bicromato potassico* dopo pochi secondi si ebbe uno scarso precipitato amorfo, giallo, parzialm. solub. in alcole e completamente solubile nell' ac. cloridrico.

Coll' *ac. picrico* si ebbe un precip. istantaneo, amorfo, giallo, abbondante. Dopo 30 ore oltre al detto precip. si osservavano dei prismi fini, intrecciati, solubili nell'acqua. Il precip. amorfo si scioglieva nell'alcole.

Coll'*acido iodidrico iodurato* si ebbe un precipitato istantaneo rosso-giallastro, amorfo, abbondante, solubile nell'eccesso di reattivo e nell'alcole. Dopo 30 ore si conservano i caratteri di solubilità, ma il precipitato sembra olioso.

Il *cloruro ferrico* non diede reazione speciale, ma avvenne riduzione che fu resa manifesta per mezzo del ferrocianuro potassico. (Se ad un saggio con cloruro ferrico si aggiungeva subito il ferrocianuro si otteneva il prec. azzurro che diventava sempre più intenso; se ad un saggio con ferrocianuro si aggiungeva il cloruro ferrico si aveva prima un precip. rossastro, il quale poi poco a poco passava all'azzurro).

Coll'*ac. tannico* si ebbe intorbidam. amorfo. Il precip. si scioglieva difficilmente nell'ac. cloridrico e facilmente nell'alcole.

Con l'*ac. solforico ed il bicromato potassico* si ebbe una coloraz. verdastra che diventò verde-pistacchio pel riscaldamento.

Col *cianuro potassico* non si ebbe reazione speciale.

Coll'*acido solforico* solo od addizionato di qualche goccia d'ac. nitrico pel riscaldamento si aveva coloraz. giallastra e sviluppo d'odore di giacinti.

d) Estratto amilico alcalino. — Nè la soluzione alcolica, nè l'acquosa (che conteneva pochissima sostanza estrattiva) affettavano le carte reattive. Quest'estratto amilico fu ripreso con acqua acidulata cloridrica, la soluzione filtrata fu svaporata quasi a secco a b. m. e poi seccata completam. sopra il cloruro di calcio. Il residuo di color giallo-scuro osservato con un ingrandimento di 1000 diam. mostrava piccolissimi prismetti con ramificazioni cristalline. Questo cloridrato era in piccola quantità e trattato con potassa caustica forniva basi volatili. Le reazioni avute furono le seguenti:

Coll'*acido fosfomolibdico*: precip. istantaneo, abbondantissimo, giallastro, amorfo che non cangiò d'aspetto col riposo, e che si sciolse con leggero coloram. azzurro nell'ammoniaca. Quando invece di ammoniaca s' impiegò potassa si ebbe solo il precip. azzurro senza soluzione.

Coll'*ac. picrico*: precipitato abbondante, istantaneo, giallo, amorfo, insolubile, o quasi, nell'acido cloridrico e solubile nell'alcole.

Coll' *ioduro mercurico-potassico*: precip. abbondantissimo, istantaneo, bianco, amorfo, insolub. in ac. cloridrico e solubile nell'alcole.

Col *cianuro argentico-potassico*: precip. istantaneo, leggero, amorfo, pochissimo solubile nell'acqua. I precipitati avuti coi tre reagenti precedenti conservarono i loro rispettivi caratteri anco dopo 30 ore.

Col *ferrocianuro potassico*: solo dopo 30 ore si osservarono nel saggio degli aghi lunghi irradianti, solubili nell'acqua, insieme ad un precipitato amorfo, insolubile nell'alcole e solubile nell'ac. cloridrico con piccolo residuo azzurro.

Col *cloruro di platino*: intorbidam. istantaneo giallo-amorfo. Dopo 30 ore si osservarono prismi lunghi romboidali a fasci, e macchie circolari a bordo giallastro. L'acqua, l'alcole, l'ac. cloridrico non avevano azione.

Col *cloruro d'oro*: prec. abbondante, istantaneo, amorfo, giallo, solubile nell'alcole e nell'ac. cloridrico. Dopo 30 ore si osservarono dei cristalli prismatici solubili in acqua. Per l'aggiunta di ac. cloridrico dopo 30 ore non si disciolse tutto come prima, ma restò dell'oro ridotto.

Col *bicromato potassico*: precip. istantaneo, scarso, amorfo, giallastro. Dopo 30 ore si osservarono dei dendriti, difficilm. solub. in acqua e solubili nell' ac. cloridrico.

Col *cloruro mercurico*: dopo qualche secondo intorbidam. leggiero biancastro. Dopo 30 ore oltre al prec. amorfo si osservarono delle piccole tavolette romboidali isolate, simili ai cristalli di emina, insolubili nell'acqua e solubili nell'ac. cloridrico insieme alla parte amorfa.

Coll'*ac. tannico*: dopo qualche secondo cominciò una lattescenza che non sparì nè per l'aggiunta di acqua nè per per l'aggiunta di acido cloridrico. Dopo 30 ore si osservarono nel saggio dei prismi lunghi romboidali, isolati od incrociati, insieme ad aggruppamenti cristallini a stellette. L'acqua sciolse i cristalli lasciando la parte amorfa la quale si scioglieva parzialmente nell'ac. cloridrico e complet. nell'alcole.

Col *cloruro ferrico*: riduzione istantanea.

Coll'*ac. iodidrico iodurato*: precip. istantaneo, fioccoso, giallo-rossastro, discretamente abbondante, difficilmente solubile nell'eccesso di reagente e solubile nell'alcole.

Coll'*acido solforico e bicromato potassico*: coloram. verdastro.

e) Estratto cloroformico finale. — Quest'estratto aveva odore narcotico che persisteva anco nella soluzione cloridrica. La soluzione alcolica di esso aveva reazione leggermente alcalina. La soluzione cloridrica svaporata fornì un cloridrato il quale con un ingrandimento di 1000 diam. si presenta in prismetti isolati e corti misti a ramificazioni a foglie di felce. Le reazioni avute con questo cloridrato furono le seguenti:

Coll'*ac. fosfomolibdico*: dopo qualche secondo, precipitato bianco-giallastro fioccoso, il quale con la potassa diventa azzurro. Se invece di potassa s'impiega dell'ammoniaca il precip. si discioglie difficilmente con colorazione azzurra.

Coll'*acido solforico ed il bicromato potassico* si ebbe colorazione verde-azzurrastra.

Con *ioduro mercurico-potassico*: precipitato istantaneo, leggiero, amorfo, poco solubile nell'ac. cloridrico a freddo e solubile nell'alcole.

Con *cianuro argentico-potassico*: precipitato istantaneo bianco, amorfo che al momento era solubile nell'alcole, ma dopo un giorno era diventato insolubile.

Con *cloruro di platino*: solo dopo dodici ore si osservarono dei grossi cristalli tetraedrici ed un precipitato amorfo che era poco solubile nell'acido cloridrico e più solubile nell'alcole.

Col *cloruro di oro*: precipitato giallo, amorfo, poco solubile nell'ac. cloridrico e solubile nell'alcole. Dopo un giorno si trovò che il precipitato amorfo era diventato nerastro e che si erano formati dei prismi aggruppati di varie dimensioni. Coll'acqua i cristalli sparirono in parte, l'alcole sciolse una parte del resto. L'acido cloridrico lasciò insolubile il precip. amorfo (oro).

Col *bicromato potassico* in soluzione concentrata: dopo parecchie ore si trovò una cristallizzazione incipiente che non si scioglieva nell'eccesso d'acqua, bensì nell'ac. cloridrico.

Coll'*acido picrico*: dopo circa 10 ore si trovarono abbondanti cristalli aggruppati ed isolati che si scioglievano lentamente nell'acqua lasciando un reticolo amorfo giallo, solubile nell'alcole.

Col *ferrocianuro potassico*: dopo circa 10 ore si trovarono dei cristalli solubili nell'acqua insieme ad un precipitato amorfo, giallo, solubile nell'acido cloridrico.

Col *cloruro mercurico*: dopo circa 10 ore si trovarono dei nuclei cristallini che si sciolsero nell'acqua lasciando un precipitato bianco, amorfo, leggiero che era solubile nell'alcole.

Col *cloruro ferrico*: riduzione manifesta.

Coll'*ac. tannico*: leggerissimo precipitato, insolubile nell'acido cloridrico e solubile nell'alcole. Dopo un giorno si osservavano nel saggio anco dei cristalli romboedrici solubili nell'acqua.

Coll'*ac. iodidrico iodurato*: precipitato istantaneo, sottile, giallo-rossastro. Dopo un giorno il precipitato si mostrava olioso ed era solubile nell'alcole.

II. Esperienze sull'albumina d'uova fresche.

Per fare queste esperienze si partì da 300 uova: l'albume totale ascendeva a poco più di cinque litri. Quest'albume fu sbattuto con circa l'egual volume d'acqua e sul liquido poi si agì acidificando con $\frac{1}{10}$ d'acido solforico diluito ad $\frac{1}{5}$ e trattando secondo il processo Dragendorff per l'estrazione e la separazione degli alcaloidi. Stavolta avendo potuto disporre di petrolio leggiero si seguì esattamente il detto processo in tutti i dettagli, mentre sì nelle esperienze fatte sul sangue ed anzidescritte, come in quelle fatte sul liquido proveniente dalla donna affetta da gravidanza estrauterina, si era fatto a meno del trattamento con petrolio. Di tal

modo in queste ricerche sull'albumina gli estratti ottenuti furono più numerosi e furono successivamente i seguenti:

1.° Estratto ottenuto col liquido acido impiegando come solvente il petrolio.
2.° » » » » » » » » la benzina.
3.° » » » » » » » » il cloroformio.
4.° » » » » alcalinizzato impiegando petrolio leggiero.
5.° » » » » » » benzina.
6.° » » » » » » cloroformio.
7.° » » » » » » alcole amilico.
8.° Estratto finale ottenuto svaporando a secco a bagno-maria con vetro pesto il liquido precedentemente spossato con alcole amilico e spossando il residuo con cloroformio.

Per gli estratti 4,° 5,° 6°, 7,° 8° le soluzioni petrolica, benzinica, cloroformica, ecc. dopo di essere state ben lavate con acqua furono spossate con acqua acidulata cloridrica, e furono da una parte ottenuti estratti residui dell' evaporazione a b. m. delle diverse soluzioni acidulate, e dall'altra furono ottenuti estratti evaporando le soluzioni petrolica, benzinica, ecc. dopo di essere state spossate con l'acqua acidulata. I primi di questi estratti furono designati con 4°*a*, 5°*a*, 6°*a*, 7°*a*, 8°*a*, gli altri con 4°*b*, 5°*b*, 6°*b*, 7°*b*, 8°*b*.

Passeremo in rivista in quel che segue le reazioni avute coi diversi estratti.

1.° Estratto acido petrolico. — Arrossava leggermente la carta azzurra di tornasole. Le reazioni avute furono le seguenti:

Coll' *ac. fosfomolibdico*: dopo un giorno si trovarono delle ramificazioni a foglie di felce, solubilissime nell'acqua. Quando nel saggio si aggiunse dell'ammoniaca si trovò dopo un giorno la stessa cristallizzazione a ramificazioni, però per l'aggiunta di acqua restarono indisciolti dei piccolissimi prismi ai quali poco a poco si vennero sostituendo delle scagliette romboidali.

Con *ioduro mercurico potassico*: dopo un giorno si formarono dei cristalli regolari misti a ciuffetti di aghi solubili nell'acqua e ad un deposito amorfo, giallastro insolubile.

Con *acido iodidrico iodurato*: in principio si ebbe precipitato rosso-mattone, che poi si trovò costituito da un ammasso di goccioline oliose e da scarsi prismetti bianchi.

Con *ioduro di palladio*: precipitato poco sensibile che si formò subito. Dopo un giorno si trovarono dei cristalli grossi solubili, che talvolta avevano la forma naviculare acuminata o spuntata. Per l'aggiunta di acqua persistette solo un precipitato rossastro amorfo.

Col *cloruro d'oro*: dopo un giorno si trovarono degli aghi più o meno lunghi ed una polvere amorfa nero-rossastra (oro). Per l'aggiunta di acqua o di acido cloridrico non si sciolsero che i soli cristalli.

Con *cloruro ferrico e ferrocianuro potassico*: al momento si ebbe coloraz. verdastra che passava lentamente all'azzurro cupo.

Con *cloruro mercurico*: leggerissimo intorbidamento.

Con *ac. tannico*: intorbidamento biancastro.

Con il *reattivo di Fröhde*: niente di speciale.

2.° Estratto benzinico acido. — Come il precedente questo estratto aveva reazione leggermente acida. Le reazioni che esso diede furono le seguenti:

Con il *reattivo di Fröhde*: colorazione rossastra.

Col *fosfomolibdato sodico*: solo dopo un giorno si ebbero dei cristalli aghiformi disposti a foglie di felce. Per l'aggiunta di acqua; buona parte dei cristalli si disciolsero e restarono delle tavolette romboidali incolore. L'aggiunta di ammoniaca non produsse fenomeni speciali.

Col *jodoidrargirato di potassio*: solo dopo un giorno si osservarono dei cristalli solubili in acqua misti ad un precip. amorfo insolubile.

Coll' *acido iodidrico iodurato*: leggiero precipitato rossastro che sembrava olioso. Anco dopo un giorno non si osservarono nel saggio indizî di cristallizzazione.

Col *cloruro di palladio*: in principio si ebbe intorbidamento poco sensibile, e poi un precipitato rosso-bruno amorfo poco solubile nell'acido cloridrico.

Col *cloruro d'oro*: dopo un giorno si trovò dell'oro ridotto.

Con *cloruro ferrico e ferrocianuro potassico* si ebbe prima colorazione rossastra che diventò dopo qualche minuto verdastra e poi azzurrastra.

Coll' *acido tannico*: dopo un giorno s'era formato un precipitato amorfo, scarso, bianco, che aumentava per l'aggiunta di ac. cloridrico.

Col *cloruro mercurico*: dopo un giorno si trovarono degli aghetti rari, intrecciati a corona. Per l'aggiunta di acqua i cristalli si sciolsero e restò un precipitato amorfo olioso.

Coll'*acido solforico ed il bicromato potassico* si ebbe colorazione rosso-verdastra che poi passò al rosso-violaceo.

3.° Estratto acido cloroformico. — La soluzione di questo estratto era gialla ed aveva reazione marcatamente acida. Le reazioni che fornì furono le seguenti:

Coll' *ioduro mercurico potassico*: dopo un giorno si trovarono dei cristalli che si scioglievano nell'acqua lasciando il loro posto delle goccioline oliose.

Coll' *acido iodidrico iodurato*: precipitato istantaneo, abbondante, rossastro, polveroso, amorfo. Dopo un giorno si trovarono nel saggio dei prismetti circondati da aureole giallo-rossastre.

Col *cloruro di palladio*: dopo un giorno si ebbe un deposito amorfo rosso-giallastro, parzialmente solubile nell'acido cloridrico.

Col *cloruro d'oro*: dopo un giorno si trovò dell'oro ridotto.

Con *ferrocianuro potassico e cloruro ferrico* si ebbe un precipitato verde-azzurrastro che poi passò all'azzurro intenso.

Con *acido tannico*: precipitato abbondante bianco-giallastro, amorfo, quasi insolubile nell'ac. cloridrico.

Con *cloruro mercurico*: dopo un giorno solamente si ebbero ramificazioni cristalline che si scioglievano nell'acqua lasciando delle goccioline oliose.

Con *acido solforico e bicromato potassico* si ebbe in principio un coloramento rosso-verdastro, poi attorno al bicromato si formò un coloramento violetto-intenso e finalmente si ebbe un verde-azzurrognolo.

Col *reattivo di Fröhde* e col *reattivo fosfomolibdico* non si ebbero reazioni speciali.

4.° *a*) Estratto petrolico alcalino (residuo delle acque cloridriche con cui fu spossato l'estratto petrolico alcalino primitivo). — Il cloridrato era cristallino e trattato con della potassa caustica pura dava delle basi volatili. Le reazioni che fornì questo cloridrato furono le seguenti:

Col *fosfomolibdato sodico*: precipitato giallastro, amorfo, istantaneo, che restò della stessa apparenza anco dopo un giorno, e che si scioglieva nell'ammoniaca senza colorarsi.

Col *joduro mercurico-potassico*: precipitato istantaneo, biancastro, amorfo, insolubile nell'acqua e nell'acido cloridrico.

Coll'*acido iodidrico iodurato*: precipitato istantaneo rosso-oscuro. Dopo un giorno si trovarono nel saggio degli aghetti e ramificazioni a foglie di felce.

Col *cloruro di palladio*: dopo un giorno si trovarono ramificazioni a foglie di felce e dei cristalli ottaedrici. L'aggiunta d'acqua fece disciogliere i cristalli, e restò un precipitato olioso che si scioglieva completamente nell'acido cloridrico.

Col *cloruro d'oro*: dopo qualche secondo precipitato discretamente abbondante. Dopo un giorno si trovarono dei rudimenti cristallini. Per l'aggiunta di acqua i cristalli si sciolsero e rimase un precipitato amorfo insolubile nell'acido cloridrico.

Con *ferrocianuro potassico e cloruro ferrico:* si osservò istantaneamente il passaggio dal rosso, al verde ed all'azzurro.

Con l'*acido tannico*: solo dopo un giorno si osservarono dei prismetti intrecciati a foglie di felce. Per l'aggiunta di acqua si osservò un precipitato amorfo, bianco-giallastro, il quale aumentava per l'aggiunta di acido cloridrico.

Con il *cloruro mercurico*: dopo un giorno si osservarono dei cristalli aghiformi che si scioglievano nell'acqua lasciando un residuo olioso.

Con *acido solforico e bicromato potassico* si ebbe colorazione giallo-rossastra che passò successivamente al violetto ed al verdastro.

Col *reattivo di Fröhde* non si ebbero reazioni speciali.

5.° *a*) Estratto alcalino benzinico (residuo delle acque cloridriche con cui fu spossato l'estratto alcalino benzinico primitivo). — Il cloridrato aveva reazione leggermente acida e cristallizzava in aghetti riuniti a stelle. Colla potassa caustica pura lasciava svolgere una o più basi volatili. Le reazioni avute con i reagenti soliti furono le seguenti:

Col *fosfomolibdato sodico:* dopo pochi secondi lieve precipitato biancastro, amorfo, solubile nell'acido cloridrico. Quando al saggio si aggiunse ammoniaca il precipitato si agglomerò senza colorarsi.

Coll'*ioduro mercurico-potassico*: lieve precipitato biancastro, amorfo, solubile in gran parte nell'acido cloridrico.

Coll'*acido iodidrico iodurato:* abbondante precipitato rosso, che dopo poco diventò di un verde-olivastro. Dopo un giorno nel saggio si osservarono dei cubetti ed un precipitato olioso.

Coll'*ioduro di palladio*: solo dopo un giorno si trovarono dei prismetti e delle masse semi-oliose di un colorito giallo-oscuro. Per l'aggiunta di acqua i soli prismetti si sciolsero.

Col *cloruro d'oro*: lieve precipitato amorfo. Dopo un giorno si osservarono dei

cristalli romboedrici riuniti a croce che si scioglievano nell'acqua. L'acido cloridrico non discioglieva la parte amorfa.

Col *cloruro mercurico*: dopo qualche secondo intorbidamento causato da un precipitato amorfo. Dopo un giorno si trovarono nel saggio delle ramificazioni cristalline parzialmente solubili nell'acido cloridrico.

Con *ferrocianuro potassico e cloruro ferrico* si ebbe un precipitato verde-giallastro, che passò successivamente al verde azzurrastro ed all'azzurro intenso.

Con *acido tannico*: precipitato istantaneo, bianco, amorfo che dopo un giorno si aumentava per l'aggiunta di acido cloridrico.

Con *acido solforico e bicromato potassico:* colorazione giallo-verdastra.

Col *reattivo di Fröhde:* niente di speciale.

6.° *a*) Estratto alcalino cloroformico (residuo delle acque cloridriche con cui fu spossato l'estratto alcalino cloroformico primitivo). — La soluzione del cloridrato era leggermente acida. Il cloridrato cristallizzava in prismi scalariformi e trattato colla potassa caustica pura dava svolgimento di basi volatili. Le reazioni avute furono le seguenti:

Col *fosfomolibdato sodico*: precipitato bianco, amorfo, abbondante. Dopo un giorno si osservarono inoltre delle ramificazioni cristalline solubili nell'acqua. La parte amorfa si scioglieva in buona dose nell'acido cloridrico. Per l'aggiunta di ammoniaca dopo di avere aggiunto il fosfomolibdato al cloridrato in esame il precipitato causato dall'ultimo reagente si agglomerò senza colorarsi.

Col *ioduro mercurico-potassico*: leggiero precipitato amorfo, bianco-giallastro. Dopo un giorno si osservò un principio di cristallizzazione ed insieme un precipitato olioso.

Coll'*acido iodidrico-iodurato:* istantaneo precipitato, abbondantissimo, rosso-oscuro, amorfo; sembrava olioso e mentre in parta spariva si cangiava di colorito diventando verdastro. Dopo un giorno oltre al precipitato amorfo si osservavano nel saggio dei prismetti isolati ed aggruppati.

Col *cloruro di palladio*: solo dopo un giorno si trovarono dei prismetti isolati misti ad un precipitato amorfo ed a piccoli cristalli ottaedrici: coll'aggiunta di acqua resta indisciolto solo un precipitato olioso.

Col *cloruro d'oro:* leggerissimo precipitato amorfo, difficilmente solubile nell'acido cloridrico. Il precipitato aumentava col riposo. Dopo un giorno si trovarono nel saggio dei piccoli prismetti sparsi, ed un precipitato giallo-rossastro. L' acido cloridrico lasciò indisciolto solo l'ultimo.

Col *ferrocianuro potassico*: precipitato verde-pistacchio, che per l' aggiunta di percloruro di ferro passò al rosso e poi al verdastro ed all'azzurro.

Col *tannino*: precipitato abbondante, bianco, amorfo. Dopo un giorno si trovarono dei prismetti incolori sparsi; per l'aggiunta di acqua si sciolsero i cristalli e restò il precipitato amorfo, insolubile nell'acido cloridrico.

Col *cloruro mercurico:* leggiero precipitato bianco, amorfo, che si scioglieva nell'acido cloridrico anco dopo un giorno.

Con *acido solforico e bicromato potassico* si ebbe prima colorazione rosso-oscura e poi colorazione verde-azzurrastra.

Col *reattivo di Fröhde* non si ebbero colorazioni speciali.

7.° *a*) Estratto amilico alcalino (residuo lasciato dalle acque cloridriche con

cui fu spossato l'estratto amilico alcalino primitivo). — Il cloridrato non mostrava apparenza cristallina, o solo una tale apparenza era molto dubbia. Il colore di questo cloridrato era giallo-bruno, la reazione della sua soluzione era leggermente acida, e trattato con potassa caustica pura esso dava svolgimento di basi volatili aventi odore viroso. Le reazioni avute colla soluzione di questo estratto furono le seguenti:

Col *fosfomolibdato sodico:* precipitato istantaneo, amorfo, abbondantissimo, giallo-rossastro, che restò della stessa apparenza anco dopo un giorno. Quando al saggio si aggiunse un poco d'ammoniaca il precipitato si agglomerò senza cangiar di colorito.

Col *joduro mercurico-potassico:* precipitato abbondantissimo, istantaneo, amorfo ed olioso. Restò della stessa apparenza anco dopo un giorno.

Coll'*acido iodidrico iodurato*: precipitato istantaneo, abbondantissimo, di un rosso-chermes, amorfo. Dopo qualche tempo il colorito si cangiò in verdastro ed una parte del precipitato sparì. Dopo un giorno si trovarono nel saggio dei cristalli riuniti a croce di Malta.

Col *cloruro di palladio*: precipitato istantaneo, abbondantissimo, amorfo, giallo-bruno. Dopo un giorno vi si trovarono dei cristalli regolari. L'acqua sciolse i cristalli, e lasciò il precipitato amorfo che era divenuto olioso.

Col *cloruro d'oro*: precipitato abbondante, amorfo, istantaneo, giallastro. Dopo un giorno nel saggio si osservarono inoltre dei cristalli a base quadrata e delle cristallizzazioni a croce. Coll'acqua si sciolsero i cristalli e rimase il precipitato amorfo che era anco insolubile nell'acido cloridrico.

Col *ferrocianuro potassico e cloruro ferrico:* precipitato prima giallastro, poi verde-azzurrastro e dopo qualche ora azzurro-intenso.

Con *acido tannico:* precipitato amorfo giallo-rossastro, a cui dopo un giorno si aggiunsero dei prismi riuniti a croce e solubili nell'acqua in eccesso.

Con *cloruro mercurico:* precipitato amorfo, giallo-sporco. Dopo qualche ora si trovarono nel saggio dei cristalli a base rombica riuniti a croce. Con l'acqua i cristalli si sciolgono, e resta un precipitato d'apparenza oliosa.

Con *acido solforico e bicromato potassico* si ottenne un colorito violaceo che passò tosto al verdastro.

Col *reattivo di Fröhde* non si ebbe colorazione speciale.

8.° *a*) Estratto cloroformico finale. — Questo cloridrato è anco d'apparenza estrattiva e pare che non contenga dei cristalli. È brunastro, e colla prova fatta per mezzo di potassa caustica pura mostra che anch'esso contiene qualche base volatile. Le reazioni avute con esso furono le seguenti:

Col *fosfomolibdato di sodio*: precipitato amorfo, istantaneo, che restò tale anche dopo un giorno e per l'aggiunta di acido cloridrico sembrava di aumentarsi. Quando al saggio si aggiunse ammoniaca il precipitato si disciolse in parte.

Col *joduro mercurico-potassico:* precipitato amorfo, istantaneo, rossastro. Dopo un giorno nel saggio si trovarono cristalli regolari talora disposti a croce. Con acqua i cristalli si scioglievano e restava un precipitato amorfo insolubile nell'acido cloridrico.

Coll'*acido iodidrico iodurato*: precipitato istantaneo, abbondante, prima rossastro e poi olivastro. Dopo un giorno il precipitato era diventato olioso.

Col *cloruro di palladio:* precipitato abbondante, amorfo. Dopo un giorno si

trovarono nel saggio abbondanti prismetti incolori. L'acqua e l'acido cloridrico sciolgono i cristalli, ma lasciano il precipitato amorfo.

Col *cloruro d'oro:* abbondantissimo precipitato, rosso-chiaro, amorfo. Dopo un giorno nel saggio si trovarono dei cristalli scalariformi o riuniti a croce. L'acido cloridrico lasciò indisciolto il solo precipitato amorfo.

Con *ferrocianuro potassico e cloruro ferrico*: precipitato prima verdastro e dopo qualche tempo azzurrastro fino a passare all'azzurro intenso.

Con *tannino*: abbondantissimo precipitato, amorfo, rossastro, insolubile nell'acido cloridrico.

Con *cloruro mercurico*: precipitato abbondantissimo, amorfo, insolubile nell'acido cloridrico. Dopo un giorno si trovarono anco dei cristalli disposti a croce che si scioglievano nell'acqua.

Con *bicromato potassico ed acido solforico*: colorazione verde-smeraldo.

Con il *reattivo di Fröhde*: coloramento rossastro.

Gli estratti 4° *b*, 5° *b*, 6° *b*, 7° *b* erano delle sostanze insolubili nell'acqua anco acidulata e calda, e per averne una soluzione bisognava ricorrere alla benzina o ad altri solventi insolubili nell'acqua cosicchè riusciva inutile il saggiare con le soluzioni acquose dei reagenti. Di essi estratti il 4°, il 5° ed il 6° erano cristallini e quasi incolori; sembravano delle sostanze grasse, e di uno (il 6°), che era in maggior quantità, fu trovato il punto di fusione a 200° circa dopo di aver subíto una incipiente decomposizione verso 130°. L'estratto 7° *b* era d'aspetto di una resina molle e non cedeva niente o quasi niente ai solventi miscibili coll'acqua. Il *reattivo di Frödhe* dava in generale con questi estratti delle colorazioni giallo-rossastro o rosso-brunastre il reattivo di *Brouardel e Boutmy* manifestava sempre la riduzione, ma tali reagenti pare che non possano godere grande fiducia.

L'estratto 8° *b* ripreso con acqua acidulata cloridrica a caldo diede una buona soluzione bruna la quale fu saggiata coi reagenti soliti e si ebbe:

Col *fosfomolibdato sodico*: precipitato abbondante amorfo, che col riposo diventò azzurrastro, insolubile o quasi nell'acido cloridrico e solubile parzialmente nell'ammoniaca.

Coll'*joduro mercurico-potassico*: precipitato amorfo abbondante.

Con *acido iodidrico iodurato*: precipitato amorfo, rosso-bruno. Dopo un giorno si osservarono nel saggio anco dei piccoli aghetti.

Con *cloruro di palladio*: solo dopo un giorno si ebbe un precipitato amorfo parzialmente solubile nell'acido cloridrico.

Con *cloruro d'oro:* precipitato abbondante amorfo. Dopo un giorno si osservarono delle cristallizzazioni a croce, degli aghetti isolati ed un precipitato amorfo, il quale è il solo che resta insolubile nell'acido cloridrico.

Con *ferrocianuro potassico e cloruro ferrico*: azzurro istantaneo.

Con *tannino:* precipitato abbondante amorfo. Dopo un giorno si trovarono dei piccoli aghi scalariformi misti al precedente precipitato amorfo, il quale è il solo insolubile nell'acido cloridrico.

Con *cloruro mercurico:* solo dopo un giorno si trovarono degli aghetti disposti a croce.

Con *bicromato potassico ed acido solforico*: colorazione verdastra.

CONCLUSIONI.

Dalle esperienze precedenti risulta abbastanza chiaramente, che dal punto di vista chimico almeno, le stesse sostanze od almeno sostanze simili a quelle finora indicate coi nomi di alcaloidi cadaverici o ptomaine, si possono estrarre dai liquidi animali in istato fisiologico e prima che entrino in putrefazione. Evidentemente ciò non esclude punto che nella putrefazione, principalmente degli albuminoidi, si generi nuova copia di tali sostanze; anzi è questo il caso più probabile, ma l'edifizio finora inalzato resta in gran parte scosso dai fatti da noi indicati.

Esse confermano inoltre una osservazione fatta dal prof. Paternò al prof. Selmi in seno alla Commissione pei veneficî nel maggio scorso, quando il Selmi comunicava le sue esperienze sulle basi patologiche dalle urine, pubblicate negli Atti della r. Accademia dei Lincei (Transunti vol. V, p.174 e 243). Il Paternò, domandando al Selmi se le sue esperienze sulle urine patologiche erano state precedute da altre su urine fisiologiche ed avendone ottenuto risposta negativa, osservava come perdeva d'importanza la considerazione del Selmi, il quale supponeva che *in parecchie malattie, infettive o no, quando la deassimilazione degli elementi plastici ed istologici, avviene in modo anomalo* e con una profonda *alterazione dei medesimi, abbiano da ingenerarsi dei prodotti somiglianti a quelli che si vanno ingenerando nei prodotti di putrefazione*. Or domandiamo noi a quale risultato pratico si vuole venire, almeno pel momento, quando non è dubbio che questi principî alcaloidei, o altri che da essi non ci è dato per ora distinguere, si trovano nell'urina normale? E ammesso che una differenza vi sia nell'azione fisiologica dei principî estratti dalle urine patologiche e da quelle fisiologiche, perchè non esaminare prima attentamente quale parte in questa attività possono avervi i germi della malattia?

Noi ci asterremo pel momento da tutte le altre considerazioni, lieti soltanto di avere messo sul tappeto una questione che se da un lato scuote i risultati da valenti chimici ottenuti in questi ultimi anni, dall'altro richiamando la quistione nei suoi veri termini, potrà servire a spianare la via nelle ulteriori ricerche, e nella speranza che nella tossicologia forense d'ora in poi, prima di esperimentare l'azione fisiologica di un estratto cadaverico, si cerchino e si determinino i criterî, ai quali un tale estratto debba soddisfare per essere sicuri che esso non contenga dei germi infettivi. Insomma a noi sembra che nella ricerca degli alcaloidi la prova fisiologica ha valore soltanto quando si è certi che l'azione sull'animale è esclusivamente dovuta all'alcaloide.

Finalmente non possiamo trascurare di accennare che le idee da noi esposte in maggio di quest'anno a proposito delle ricerche del prof. Selmi sulle basi patologiche, hanno ricevuto una nuova ed importante conferma da A. Gauthier, il quale pochi mesi dopo presentava all'Accademia di Medicina di Parigi una Memoria provando, come noi avevamo già fatto pel sangue, che dai prodotti normali di secrezione animale, e particolarmente dall'urina, possono estrarsi delle sostanze che presentano le reazioni generali delle ptomaine.

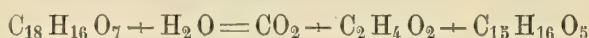
Ricerche sull'acido usnico e sopra altre sostanze estratte dai licheni.

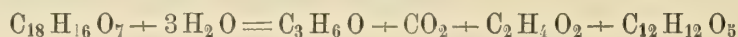
Memoria del Socio corrisp. EMANUELE PATERNÒ

letta nella seduta dell' 8 gennaio 1882.

I. Acido usnico e suoi derivati.

Or sono alcuni anni, ho pubblicato una Memoria intorno all' acido usnico ([1]), nella quale ho stabilito che a tale sostanza spetta la formola $C_{18}H_{16}O_7$ ed ho indicato alcune trasformazioni importanti a cui dava origine. Fra di esse meritano di essere rammentate quella che ha luogo riscaldando l'acido usnico, con alcool in tubi chiusi a 150°, che espressi con l'equazione:

$$C_{18}H_{16}O_7 + H_2O = CO_2 + C_2H_4O_2 + C_{15}H_{16}O_5$$

e l'altra, che si avvera riscaldando l'acido usnico con potassa in una corrente d'idrogeno, che rappresentai con l'equazione seguente:

$$C_{18}H_{16}O_7 + 3H_2O = C_3H_6O + CO_2 + C_2H_4O_2 + C_{12}H_{12}O_5$$

Il composto $C_{15}H_{16}O_5$, ottenuto nella prima di queste reazioni, fu da me indicato col nome di acido decarbousnico, l'altro $C_{12}H_{16}O_5$ fu chiamato acido pirousnico. Mostrai inoltre che quest' ultimo perdeva facilmente dell' anidride carbonica per lo scaldamento dando origine ad un nuovo corpo, probabilmente $C_{11}H_{12}O_3$, ed accennai infine che nell'azione della potassa sull'acido usnico, variando un poco le condizioni dell'esperienza, poteva ottenersi un nuovo composto, diverso dall'acido pirousnico, ma di composizione assai vicina.

Quasi contemporaneamente a me H. Salkowski ([2]) si occupava dello stesso argomento con risultati molto diversi. Egli continuò ad ammettere per l'acido usnico la formola $C_{18}H_{18}O_7$, e credette di stabilire che, per l'azione della potassa fusa, esso fornisse un acido $C_9H_{10}O_4$ per la equazione:

$$C_{18}H_{18}O_7 + H_2O = 2\,C_9H_{10}O_4$$

In seguito il Salkowski ([3]) cercò di spiegare la differenza dei nostri risultati supponendo ch'io avessi lavorato sul vero acido usnico, mentre egli avrebbe avuto per le mani l'acido carbonusnico scoperto da O. Hesse nel 1861 ([4]). Ed avendo io sollevato dei dubbi sulla esistenza di un tale acido, l'Hesse credette di doverne riprendere lo studio ([5]) e confermando i suoi primi risultati e, fondandosi principalmente sulla

([1]) Gazz. Chim. Ital. t. VI, p. 113. — ([2]) Berichte etc. di Berlino, 1875, p. 1460. — ([3]) Jahresbericht, 1875, p. 610. — ([4]) Annalen der Chimie und Pharmacie t. 137, p. 241. — ([5]) Berichte ecc. 1877, p. 1325.

composizione del sale potassico, credette di stabilire indubitatamente che esistesse un acido carbonusnico $C_{19}H_{18}O_8$ differente dall' usnico. Quest' ultimo lavoro mi diede occasione di pubblicare una Memoria, che fu letta in questa r. Accademia il 16 giugno 1878 [1], e nella quale fui abbastanza fortunato per provare con esperienze ed argomenti inoppugnabili che l'acido usnico ed il carbonusnico non erano altrimenti due corpi diversi, ma una stessa ed unica sostanza, e che se la composizione del sale potassico sembrava non condurre alla formola $C_{17}H_{16}O_7$, da me stabilita per l'acido usnico, ciò era dovuto al fatto, da me già implicitamente ammesso, che la sostanza indicata col nome di acido usnico era realmente un anidride $C_{18}H_{16}O_7$, i cui sali monometallici corrispondevano perciò alla formola $C_{18}H_{17}M_1O_8$.

I risultati di questo e del precedente lavoro sull'acido usnico sono stati generalmente accettati, e nè il Salkowski, nè l'Hesse hanno creduto di ritornare sull'argomento per sostenere il loro assunto.

Prima di por termine a questo breve cenno sui lavori compiti negli ultimi anni intorno all'acido usnico, mi resta a dire che, pochi mesi addietro, Stenhouse e Groves [2], scaldando l'acido usnico con l'acido solforico, hanno ottenuto un acido che hanno chiamato usnolico, al quale attribuiscono la formola $C_{27}H_{24}O_{10}$, e dalla cui composizione sono condotti a supporre per l'acido usnico la formola $C_{54}H_{50}O_{11}$, per ogni verso poco probabile e che potrebbe soltanto servire ad indicare come agli autori non sia giunta notizia proficua di quanto sull'acido usnico è stato fatto negli ultimi tempi.

Debbo pure richiamare sommariamente la storia di un altro acido che l'Hesse [3] credette di distinguere dall'acido usnico e chiamò βusnico, e la cui esistenza confermava Stenhouse [4] nel 1870 proponendo di chiamarlo acido cladonico. La storia di quest'acido non può andar disgiunta da quella dell'acido usnico, giacchè lo Stenhouse il quale nel 1850 [5] aveva scoperto la βorcina ed indicatala quale un prodotto di trasformazione dell'acido usnico, trovato in seguito erroneo questo fatto, si affrettava ad attribuire all'acido βusnico o cladonico l'origine di quella sostanza [6]; mentre, secondo le mie esperienze, l'acido βusnico non è punto un composto sui generis, ma dell'acido usnico il cui punto di fusione trovasi accidentalmente abbassato per la presenza di sostanze estranee, come avvalora il fatto che il così detto acido βusnico non è stato mai estratto solo da un dato lichene, ma è stato sempre rinvenuto insieme ad altri prodotti di difficile separazione; del resto l'acido rinvenuto da me ed Oglialoro [7] nella *Lecanora atra* e che l' Hesse [8] considera come βusnico, non è che acido usnico, come è stato confermato dal prof. Strüver che si compiacque di esaminarne i cristalli.

Sparita così anche la diversità dell'acido usnico col cladonico o βusnico, e stabilito che l'acido usnico non forniva βorcina, bisognò andare in cerca nuovamente della sorgente di questa sostanza, e lo Stenhouse, che prima aveva scoperto la βorcina, credendola un prodotto di trasformazione dell'acido usnico, che in seguito ne

[1] Gazz. Chim. Ital. t. XIII. — [2] Journal of the Chemichal Society, may 1881, p. 234. — [3] Annalen, t. 155, p. 51. — [4] Jahresbericht, 1861, p. 697. — [5] Jahresbericht di Svanberg, 1850, p. 429. — [6] Annalen, t. 155, p. 51. — [7] Gaz. Chim. Ital. t. VII, p. 189. — [8] Berichte ecc. 1877, p. 1325.

aveva attribuito la formazione all'acido βusnico, non ci ha fatto molto aspettare ed in un lavoro recentemente pubblicato, insieme a Groves ([1]), è riuscito ad isolare il vero composto originario della βorcina, in un acido che questa volta sembra ben definito, nell'acido barbatinico.

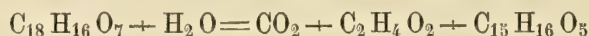
Ho creduto necessario di richiamare alla memoria del lettore questi fatti non tanto per rilevare le contraddizioni continue nelle quali, non pure chimici diversi, ma lo stesso individuo, è caduto nello stesso studio dell'acido usnico, ma principalmente perchè da questi fatti chiaramente risulta che parecchi sperimentatori hanno dovuto avvalersi nelle loro ricerche di acido usnico assai impuro.

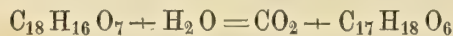
Passerò ora ad esporre i risultati delle esperienze sull'acido usnico che ho compito negli ultimi tempi, dolente che varie cause, che non trovano luogo per essere esposte in questo scritto, mi abbiano impedito di portarle a quel grado di compimento che sarebbe stato desiderabile.

1. *Decarbousneina.* Nella mia prima Memoria sull'acido usnico fondandomi sui risultati della composizione centesimale, che mi fornirono:

	I	II
Carbonio	64,68	65,03
Idrogeno	5,77	5,85

attribuii a questa sostanza la formola $C_{15}H_{16}O_5$ ed interpretai la sua formazione, dall'anidride usnica, con l'equazione:

$$C_{18}H_{16}O_7 + H_2O = CO_2 + C_2H_4O_2 + C_{15}H_{16}O_5$$

Accennai però che della formazione dell'acido acetico in questa reazione non mi ero assicurato con apposite esperienze, ma ne avevo soltanto riconosciuto l'odore, e aggiunsi inoltre le seguenti parole: « Del resto non credo che sia ancor detta l'ultima « parola su questo argomento e mi propongo di ritornare su queste esperienze fra « non guari ». Ora, uno studio più completo della decarbousneina ed il complesso delle trasformazioni dell'acido usnico, mi hanno condotto al risultato che la decarbousneina prenda origine dall'acido usnico (anidride usnica) per la eliminazione soltanto degli elementi dell' anidride carbonica, come viene indicato dalla seguente equazione:

$$C_{18}H_{16}O_7 + H_2O = CO_2 + C_{17}H_{18}O_6$$

Alla nuova formola corrisponde una composizione centesimale assai prossima a quella richiesta dalla formola $C_{15}H_{16}O_5$ da me precedentemente ammessa, ed i risultati delle analisi si avvicinano più a quella che a questa.

La ragione che, principalmente, mi porta a cambiare la formola della decarbousneina ha per base il comportamento di essa con la potassa, reazione la quale, come esporrò a suo tempo, dà origine ad un nuovo acido della formola $C_{15}H_{16}O_5$, prima attribuita alla decarbousneina.

Ecco intanto i risultati di talune analisi da me fatte della decarbousneina pura:

([1]) Annalen, t. CCIII, p. 285.

I. gr. 0,2538 di sostanza fornirono gr. 0,5948 di anidride carbonica e gr. 0,1356 di acqua;
II. gr. 0,2683 di sostanza fornirono gr. 0,6281 di anidride carbonica e gr. 0,1443 di acqua;
III. gr. 0,262 di sostanza fornirono gr. 0,514 di anidride carbonica e gr. 0,137 di acqua;
IV. gr. 0,240 di sostanza fornirono gr. 0,5643 di anidride carbonica e gr. 0,1118 di acqua;

Cioè, calcolando la composizione centesimale:

	I	II	III	IV
Carbonio	63,91	63,84	63,50	64,13
Idrogeno	5,93	5,97	5,81	5,19

La formola $C_{17}H_{18}O_6$ richiede:

Carbonio	64,15
Idrogeno	5,66

mentre quella $C_{15}H_{16}O_5$, che prima avevo ammessa, esige:

Carbonio	65,21
Idrogeno	5,78

Come ho detto nella precedente Memoria, la decarbousneina si forma scaldando l'acido usnico con alcool a 150°, in tubi chiusi per la durata di 4 a 5 ore. Siccome in questa reazione si forma abbondantemente una sostanza resinosa, credo necessario di fare talune avvertenze sul metodo che ho riconosciuto migliore per farne la separazione, giacchè se non si prendono particolari precauzioni capita sovente che nella purificazione la decarbousneina vada interamente perduta e si resinifichi completamente. Ad evitare questo inconveniente ecco come si opera: si versa il contenuto dei tubi in una larga capsula e si abbandona per una notte all'evaporazione spontanea; l'indomani si trova la maggior parte della decarbousneina cristallizzata e più o meno inquinata da una sostanza mucilagginosa; si aggiunge allora dell'etere, si raccoglie sopra un filtro la parte cristallina che rimane indisciolta, si lava con poco etere, si lascia disseccare all'aria e finalmente si cristallizza dall'alcool bollente. Operando precisamente in questo modo si riesce ad ottenere una quantità di decarbousneina corrispondente al 50 % dell'acido usnico impiegato. È questo il massimo rendimento al quale mi sia riuscito di pervenire.

Intorno alla genesi della decarbousneina debbo aggiungere che, a sempre meglio confermare che nella sua formazione sia necessario l'intervento dell'acqua o di una sostanza capace di fornirla e che l'alcool non entra nella sua costituzione, ho fatto due esperienze. Da una parte cioè ho scaldato acido usnico, a 150°, con acqua, ed ho constatato la produzione della decarbousneina, e dall'altra parte ho scaldato alla medesima temperatura dell'acido usnico con xilene perfettamente secco; in quest'ultimo caso all'apertura del tubo non si osservò svolgimento di anidride carbonica e si rinvenne l'acido usnico inalterato; scaldando a temperatura molto più elevata, cioè a 200°, parte dell'acido usnico si resinifica, ma non ho potuto osservare formazione di decarbousneina.

La decarbousneina è una sostanza che difficilmente si presta à delle trasformazioni: sebbene abbia i caratteri di un acido e si sciolga facilmente nell'ammoniaca e negli alcali, pure non mi è riuscito di prepararne alcun sale, perchè è ossidabilissima;

la sua soluzione ammoniacale riduce il nitrato di argento e le soluzioni alcaline assorbono con avidità l'ossigeno atmosferico.

Non sono nemmeno riuscito a prepararne dei derivati acetilici, nè per l'azione del cloruro di acetile, nè per quella dell' anidride acetica, nè tampoco per l' azione contemporanea dell'anidride acetica e dell'acetato sodico.

2. *Acido decarbousnico.* Nella mia prima Memoria ho indicato il prodotto dell'azione dell'alcool sull'acido usnico indistintamente coi nomi di decarbousneina e di acido decarbousnico; da ora in poi conserverò per esso il primo di questi nomi soltanto, ed adopererò quello di acido decarbousnico per indicare un nuovo composto che prende origine nell'azione della potassa sulla decarbousneina.

Nella menzionata Memoria sull'acido usnico interpretando la formazione dell'acido pirousnico, che prende origine nell' azione della potassa sull' acido usnico, ho detto che non credevo improbabile che in tale azione si formasse prima decarbousneina, la quale per l'ulteriore azione della potassa si sarebbe poi trasformata in acido pirousnico. Volendo chiarire questo punto ed importandomi, per delle considerazioni che in seguito esporrò, di conoscere se dalla decarbousneina potesse ottenersi dell' acetone, tanto più allora che ancora supponevo contenesse 3 at. di carbonio meno dell'acido usnico, ho creduto importante di studiare l'azione della potassa sulla decarbousneina, operando nelle stesse condizioni descritte nella preparazione dell' acido pirousnico ed escludendo per quanto è possibile l'intervento dell'aria.

Gr. 30 di decarbousneina pura furono introdotti in un pallone con gr. 30 d'idrato potassico in pezzi e, dopo avere escluso l'aria con una corrente d'idrogeno, si aggiunsero gr. 75 di acqua, la quale sciogliendo la potassa con elevazione di temperatura produce immediatamente la contemporanea soluzione della decarbousneina dando un liquido di color rosso intenso; ho scaldato all'ebollizione che ho mantenuta per circa 10 minuti: quindi ho diluito con acqua il liquido divenuto rosso bruno e subito ho trattato con acido cloridrico. Si forma allora un abbondante precipitato giallastro che ho raccolto sopra un filtro, l'acqua filtrata quasi incolora in principio abbandonata a se stessa depone lentamente una polvere sottilissima di color violetto indaco, che resta in parte in sospensione. Il precipitato giallo, prodotto dall'acido cloridrico, fu lavato sul filtro con acqua fredda, e purificato per cristallizzazioni dall' alcool bollente, e lavature con etere. Allo stato di purezza fornì all'analisi i seguenti risultati:

I. gr. 0,2472 di sostanza diedero gr. 0,5892 di anidride carbonica e gr. 0,128 di acqua;
II. gr. 0,2844 di sostanza diedero gr. 6752 di anidride carbonica e gr. 0,1527 di acqua.

Cioè per 100:

	I	II
Carbonio	65,00	64,79
Idrogeno	5,71	5,92

che conducono alla formola $C_{15}H_{16}O_5$, precedentemente ammessa per la decarbousneina, e per la quale si calcola:

Carbonio	65,21
Idrogeno	5,78

Questa nuova sostanza che, come ho detto, chiamerò *acido decarbousnico*, cristallizza dall'alcool in bei prismetti corti e pesanti, di color giallo cedrino come

l'acido usnico, e fusibili a 198-199°; questi cristalli si elettrizzano con la più grande facilità e si attaccano al vetro in modo da sembrare sempre umidi. L'acido decarbousnico si scioglie mediocremente nell'alcool bollente, pochissimo in quello freddo e nell'etere, e sembra insolubile nell'acqua. Scaldato con l'anidride acetica, per circa quattro ore, in un apparecchio a riflusso vi si scioglie completamente; aggiungendo acqua si precipita un olio bruno pesante, che dopo poche ore si rapprende in una massa cristallina, la quale, raccolta sopra un filtro e cristallizzata replicate volte dall'alcool e dall'etere, può separarsi in due diverse sostanze; una, che si depòne per la prima, fusibile a 147-148°, l'altra più solubile, fusibile a 130-131°.

La sostanza fusibile a 147-148° si presenta in bei cristallini gialli con dicroismo verde; nella soluzione acquosa di potassa si scioglie facilmente per leggiero scaldamento, dando una soluzione rossa, dalla quale l'acido cloridrico precipita dell'acido decarbousnico. La composizione, e questo fatto mostrano che trattasi di un derivato monoacetilico dell'acido decarbousnico. Infatti:

gr. 0,340 di sostanza fornirono gr. 0,7945 di anidride carbonica e gr. 0,1765 di acqua:

Cioè %

Carbonio 63, 73
Idrogeno 5, 76

mentre per la formola $C_{15}H_{15}O_5 . C_2H_3O$ si calcola:

Carbonio 64, 15
Idrogeno 5, 66

L'altra sostanza, fusibile a 130-131°, si depone pel raffreddamento della soluzione alcoolica bollente, in sottili aghi quasi incolori e splendidissimi, ordinariamente riuniti a ventaglio. All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

gr. 0,2558 di sostanza diedero gr. 0,5027 di anidride carbonica e gr. 0,1301 di acqua.

Cioè %:

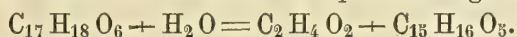
Carbonio 63, 19
Idrogeno 5, 73

Sembra quindi ch'essa sia un derivato biacetilico dell' acido decarbousnico $C_{15}H_{14}O_5(C_2H_3O)_2$, pel quale si calcola:

Carbonio 63, 33
Idrogeno 5, 55

Questa sostanza si scioglie nella potassa dando una soluzione quasi incolora in principio, ma che rapidamente si colora in rosso.

L'acido decarbousnico, secondo tutte le probabilità, si forma dalla decarbousneina per eliminazione di un acetile come indica la equazione seguente:

$$C_{17}H_{18}O_6 + H_2O = C_2H_4O_2 + C_{15}H_{16}O_5.$$

Ed è degno di nota il fatto che il derivato monoacetilico di esso, pur avendo la medesima composizione della decarbousneina, non è con essa identico. Fatti analoghi, come vedremo, si ripetono per altri composti del gruppo dell'acido usnico.

Debbo finalmente accennare che nell'azione della potassa sulla decarbousneina, si forma in piccola quantità una sostanza che mi è sembrata identica a quella che descriverò in seguito di questa Memoria sotto il nome di acido pirousnetico.

3. *Acido pirousnetico*. Nelle ricerche sull'acido usnico, pubblicate nel 1876, ho detto che nell'azione della potassa su tale acido, riscaldando per circa $^1/_4$ d'ora all'ebollizione, prendeva origine il composto che ho chiamato acido pirousnico, mentre che riscaldando soltanto a b. m. si formava un prodotto diverso, ma di composizione assai vicina, che all'analisi mi aveva dato:

	I	II
Carbonio	60, 26	60, 36
Idrogeno	5, 13	5, 41

Ho creduto importante di ripetere e completare queste esperienze. Posso ora completamente confermare quanto avevo detto: la nuova sostanza prende origine ogni qualvolta, nella separazione dell'acido pirousnico, invece di riscaldare a fuoco nudo e mantenere il liquido in ebollizione, si scalda a b. m. per una mezz'ora. La sua produzione si riconosce facilmente, giacchè neutralizzando con acido cloridrico la soluzione rossa risultante, nel caso della formazione dell'acido pirousnico non si precipita che un poco di sostanza bituminosa, mentre quando si forma il nuovo composto esso viene immediatamente precipitato sotto forma di fiocchi gialli. Anche in questo caso le proporzioni che ho riconosciuto più convenienti sono per 10 p. di acido usnico, 25 di potassa e 25 di acqua.

L'acido pirousnetico grezzo, precipitato dall'acido cloridrico, si raccoglie sopra un filtro, e si lava ben bene con acqua, e poi si purifica cristallizzandolo dall'alcool bollente e lavandolo con etere.

Prima di analizzare questa sostanza bisogna disseccarla a 120° in una corrente d'aria secca, giacchè essa, principalmente se ottenuta per cristallizzazione dall'alcool acquoso, trattiene ostinatamente delle considerevoli quantità di acqua, che può ascendere sin circa al 9 $^0/_0$. Disseccata completamente mi ha fornito all'analisi i seguenti risultati:

I. gr. 0,3086 di sostanza diedero gr. 0,6873 di anidride carbonica e gr. 1441 di acqua;
II. gr. 0,3793 di sostanza fornirono gr. 0,8405 di CO_1 e gr. 0,1795 di H_2O;
III. gr. 0,3664 fornirono gr. 0,8101 di CO_1 e gr. 0,1725 di H_2O;
IV. gr. 0,2443 fornirono gr. 0,5195 di CO_1 e gr. 0,112 di H_2O.

Cioè $^0/_0$:

	I	II	III	IV
Carbonio	60, 29	60, 43	60, 30	60, 47
Idrogeno	5, 22	5, 25	5, 23	5, 31

Risultati questi che si accordano perfettamente con quelli da me prima ottenuti e che conducono alla formola $C_{14}H_{14}O_6$, per la quale si calcola $^0/_0$:

Carbonio	60, 43
Idrogeno	5, 03

L'acido pirousnetico cristallizza in laminette o in aghi piatti che non son riuscito ad avere perfettamente incolori o bianchi, ma che conservano sempre una leggiera tinta grigio perlaceo. Si fonde da 183 a 186°, annerendo e decomponendosi. È poco solubile nell'acqua, si scioglie bene nell'alcool bollente, poco nell'alcool freddo; è pure mediocremente solubile nell'etere e nella benzina.

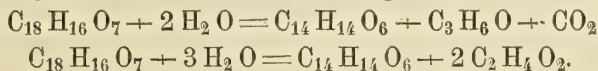
Scaldato in tubi chiusi con acqua, a 130-140°, per circa 4 ore, si scioglie completamente e pel raffreddamento si separa inalterato sotto forma di prismetti leggiermente giallognoli; questi prismi infatti sono fusibili a 185° ed all'analisi hanno dato:

gr. 0,238 fornirono gr. 0,5262 di CO_2 e gr. 0,112 di H_2O ossia $^0/_0$:

Carbonio 60, 29
Idrogeno 5, 22

La formazione di un composto $C_{14}H_{14}O_6$ per l'azione della potassa sull'acido usnico può aver luogo secondo una delle due seguenti reazioni:

$$C_{18}H_{16}O_7 + 2\,H_2O = C_{14}H_{14}O_6 + C_3H_6O + CO_2$$

$$C_{18}H_{16}O_7 + 3\,H_2O = C_{14}H_{14}O_6 + 2\,C_2H_4O_2.$$

In favore alla prima interpretazione parlano la facilità con la quale l'acido usnico perde gli elementi dell'anidride carbonica, e la produzione di acetone che ho nettamente constatato nella formazione dell'acido pirousnetico, sebbene, avuto riguardo che non si ottiene mai più del 25 $^0/_0$ di acido pirousnetico, potrebbe attribuirsi la formazione dell'acetone ad una diversa decomposizione di un'altra porzione dell'acido usnico. Parla in favore della seconda interpretazione il fatto che l'acido usnetico, per ulteriore azione della potassa, continua a fornire dell'acetone; ora a me sembra assai poco probabile che l'acido usnico sia atto ad eliminare successivamente 6 atomi di carbonio sotto forma di acetone e perciò ammesso che l'acido pirousnetico contenga ancora gli elementi per generarlo, difficilmente potrei supporre che esso si formi pure nella produzione dell'acido pirousnetico e viceversa.

Però non intendo con ciò risolvere la quistione, prima di aver meglio chiarito con nuove esperienze la matassa assai intrigata della costituzione dell'acido usnico e dei suoi derivati.

Ho esaminato l'azione del cloruro di acetile sull'acido pirousnetico. Scaldando a b. m. si svolge abbondantemente acido cloridrico; dopo due ore ho distillato l'eccesso di cloruro di acetile ed il residuo, dopo un certo tempo, si rapprese in una massa cristallina che ho purificato per cristallizzazioni dall'acido acetico e dall'alcool acquoso. Ottenni così una sostanza cristallizzata in piccoli aghetti bianchi tendenti al grigio, molto solubili nell'alcool e nella benzina, poco nell'etere e meno ancora nell'acqua; si fonde a 168°; pel disseccamento a 100° non perde di peso ed a 120° si altera profondamente. All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,3361 di sostanza fornirono gr. 0,7365 di CO_2 e gr. 0,1555 di acqua;
II. gr. 0,3462 fornirono gr. 0,7593 di CO_1 e gr. 0,1615 di H_2O;
III. gr. 0,3902 fornirono gr. 0,852 di CO_1 e gr. 0,1762 di H_2O.

Cioè $^0/_0$:

	I	II	III	Media
Carbonio	59, 76	59, 81	59, 54	59, 70
Idrogeno	5, 14	5, 18	5, 02	5, 11

Questi risultati conducono ad ammettere che per l'azione del cloruro d'acetile sull'acido pirousnetico si formi un derivato monoacetilico $C_{14}H_{13}O_6(C_2H_3O)$, pel quale si calcola;

Carbonio 60, 00
Idrogeno 5, 00

Pel derivato biacetilico $C_{14}H_{12}O_6(C_2H_3O)_2$ si calcola:

Carbonio 59, 66
Idrogeno 4, 97

Come ho accennato questo derivato acetilico si altera profondamente, perdendo di peso, per lo scaldamento a 120°; cristallizzando dall'alcool acquoso, il prodotto così modificato, si depone prima un poco della sostanza primitiva inalterata, e nelle acque madri resta disciolto dell'acido pirousnetico che ho riconosciuto al punto di fusione (181-184°) ed alla composizione. Infatti:

gr. 0,240 di sostanza fornirono gr. 0,5302 di anidride carbonica e gr. 0,1155 di acqua, cioè $^0/_0$:

Carbonio 60, 25
Idrogeno 5, 34

mentre per l'acido pirousnetico, $C_{14}H_{14}O_6$, si calcola:

Carbonio 60, 43
Idrogeno 5, 03

Debbo infine accennare che il derivato acetilico in parola si scioglie a freddo nella soluzione concentrata d'idrato potassico dando una soluzione gialla, dalla quale l'acido cloridrico precipita dell'acido pirousnetico fusibile a 184°; se l'azione si fa a caldo e si prolunga per un certo tempo, si manifesta l'odore di acetone, la soluzione alcalina si colora in verde (per l'intervento dell'ossigeno atmosferico) e l'acido cloridrico non dà più che un leggiero precipitato; indizi questi della probabile formazione di acido pirousnico.

4. *Usnetolo.* L'acido pirousnetico, come ho accennato, si fonde a circa 185° decomponendosi; se lo scaldamento si fa in un tubo ed in una corrente d'idrogeno si vede prodursi un abbondante sublimato, nel mentre riesce facile constatare la formazione di anidride carbonica. Il sublimato che si ottiene scaldando l'acido pirousnetico costituisce un nuovo composto, che chiamerò *usnetolo.*

Il miglior modo di preparazione dell'usnetolo consiste nello scaldare in una canna di Boemia l'acido pirousnetico in una lenta corrente d'idrogeno: è necessario, onde evitare che buona parte della sostanza si carbonizzi, di scaldare lentamente e giova adoperare un tubo molto più lungo di quanto richiederebbe la quantità della sostanza, in guisa che una buona parte resti fredda ed ivi venga a condensarsi l'usnetolo. In una delle migliori operazioni da gr. 5,3 di acido pirousnetico ottenni gr. 2,8 di usnetolo grezzo. Per purificarlo si cristallizza parecchie volte ed alternativamente dall'alcool acquoso e dalla benzina. All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

gr. 0,253 di sostanza, disseccata a 100°, fornirono gr. 0,6177 di CO_2 e gr. 0,136 di H_2O, cioè $^0/_0$:

Carbonio 66,59
Idrogeno 5,97

Questi numeri conducono alla formola $C_{13}H_{14}O_4$ che richiede $^0/_0$:

Carbonio 66,66
Idrogeno 5,98

L'usnetolo adunque si forma dall'acido pirousnetico per eliminazione di CO_2, come indica l'equazione seguente:

$$C_{14}H_{14}O_6 = CO_2 + C_{13}H_{14}O_4.$$

L'usnetolo puro si presenta in bellissimi aghi splendenti, lunghi, duri e friabili, e di color giallognolo se ottenuti per cristallizzazione dall'alcool acquoso. Dalla benzina cristallizza invece in aghetti leggieri, ammassati e meno colorati. Si fonde a 179°.

5. *Acido pirousnico.* Preparazioni numerose di quest'acido in condizioni varie, mi hanno confermato che le proporzioni di acido usnico, potassa ed acqua, non che il modo e la durata dello scaldamento da me precedentemente indicati, forniscono il migliore rendimento; però non mi è mai riuscito di ottenere, in acido pirousnico puro, più del 25 % del peso dell'acido usnico adoperato.

L'acido pirousnico per la ebollizione con un eccesso di cloruro di acetile si scioglie mano mano svolgendo acido cloridrico; pel raffreddamento non si separa nulla di cristallizzato, e distillando il cloruro di acetile eccedente, rimane una sostanza oleosa che soltanto dopo alcuni giorni si rapprende in cristalli. Questi cristalli spremuti fra carta sugante, e cristallizzati nuovamente da un solvente appropriato costituiscono dei prismetti spesso aggruppati intorno ad un centro, i quali se isolati e voluminosi sono dotati di splendore serico, se ammassati e piccoli costituiscono una massa cotonacea; hanno sempre una leggiera tinta rosea, simile a quella dei sali manganosi puri. Si fondono a 205°. Sono solubili nell'alcool, nell'etere, nella benzina, nell'acido acetico, nell'alcool acquoso e nell'acqua bollente senza alterarsi, anche per l'ebollizione.

Lo stesso composto si forma scaldando l'acido pirousnico con l'anidride acetica.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,2913 di sostanza diedero gr. 0,6351 di anidride carbonica e gr. 0,139 di acqua:
II. gr. 0,2892 diedero gr. 0,6324 di anidride carbonica e gr. 0,1358 di acqua;
III. gr. 0,264 diedero gr. 0.5761 di anidride carbonica e gr. 0,1238 di acqua.

Deducendo dai numeri precedenti la composizione centesimale si ha:

	I	II	III
Carbonio	59,46	59,63	59,51
Idrogeno	5,30	5,21	5,21

Se ora si comparano questi risultati con la teoria per la composizione dei derivati mono- bi- e triacetilico dell'acido pirousnico, si deduce che il composto in esame è più probabilmente un biacetilderivato. Infatti si ha:

	Acido pirousnico	Derivato monoacetilico	Derivato biacetilico	Derivato triacetilico
	6 —	—	—	—
Carbonio . .	61,01	60,43	60,00	59,67
Idrogeno . .	5,08	5,03	5,00	4,97

La piccola differenza però che si osserva nella composizione centesimale di questi diversi composti non permette di dedurre una conseguenza decisiva.

L'acqua sino a 120° non altera il derivato acetilico dell'acido pirousnico; a più alta temperatura lo decompone con formazione di acido acetico e di una sostanza oleosa bruna.

6. *Usneolo.* Indico con questo nome il prodotto della distillazione secca dell'acido

pirousnico, già da me sommariamente descritto (Gazzetta Chimica, t. VI, p. 127). Per prepararlo s'introduce l'acido pirousnico in una canna di vetro di Boemia in quantità da riempirne soltanto un terzo della lunghezza; e poi, mentre si fa passare una lenta corrente d'idrogeno, lasciando fredda soltanto l'ultima terza parte del tubo aperta all'aria, si riscalda prima la parte intermedia vuota e poi gradatamente la parte contenente l'acido pirousnico. In tal modo l'usneolo che si forma è obbligato a passare per un tratto di tubo vuoto e scaldato, nel quale si compie la decomposizione di un poco di acido pirousnico trasportato dalla corrente gassosa, e finalmente va a depositarsi nell'ultimo terzo del tubo mantenuto alla temperatura ordinaria. Operando con cura ed evitando, per quanto è possibile, che il prodotto si carbonizzi, l'acido pirousnico fornisce il 50 $^0/_0$ di usneolo. Questo si purifica per cristallizzazioni ripetute dall'alcool acquoso, dall'etere o dalla benzina, e si presenta in piccoli prismi bianchi talvolta aggruppati intorno ad un centro, e di colore perlaceo quando sono cristallizzati dalla benzina. Allo stato di purezza si fonde a 175°, come indicai nella prima Memoria. L'usneolo è molto solubile nell'alcool e nell'etere, poco nel cloroformio e nella benzina del commercio, anche meno nell'acqua fredda; nella benzina pura si scioglie abbastanza bene. La sua soluzione acquosa riduce il nitrato di argento e dà col cloruro ferrico un precipitato bianco sporco.

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

I. gr. 0,3199 di sostanza fornirono gr. 0,803 di anidride carbonica e gr. 0,185 di acqua.
II. gr. 275 di sostanza fornirono gr. 0,6935 di anidride carbonica e gr. 0,1566 di acqua.

Cioè per $^0/_0$:

	I	II
Carbonio	68,45	68,77
Idrogeno	6,42	6,32

Questa composizione elementare conduce alla formola $C_{11}H_{12}O_3$, per la quale si calcola:

Carbonio	68,75
Idrogeno	6,25

L'usneolo si forma adunque dall'acido pirousnico, come l'usnetolo dall'acido pirousnetico, per eliminazione di CO_2:

$$C_{12}H_{12}O_5 = CO_2 + C_{11}H_{12}O_3.$$

L'usneolo all'ebollizione si scioglie nel cloruro di acetile, e distillando dopo alcune ore di scaldamento l'eccesso di questo, rimane una sostanza oleosa bruna che col tempo si rapprende in una massa cristallina nerastra; si purifica il prodotto di questa reazione lavando prima con etere, che trasporta la materia bruna, e poscia cristallizzandolo replicate volte dall'alcool acquoso, dall'etere o dall'acido acetico. Si ottiene così sotto forma di aghetti bianchi, fusibili a 141-142° e volatili senza decomposizione, che all'analisi diedero i risultati seguenti:

I. gr. 0,2575 di sostanza fornirono gr. 0,612 di anidride carbonica e gr. 0,137 di acqua;
II. gr. 0,277 di sostanza fornirono gr. 0,6605 di anidride carbonica e gr. 1472 di acqua.

Onde per $^0/_0$:

	I	II
Carbonio	64,81	65,03
Idrogeno	5,91	5,90

Comparando questi numeri con quelli che si calcolano pei derivati mono- bi- e triacetilico dell'usneolo:

	$C_{11}H_{11}O_3(C_2H_3O)$	$C_{11}H_{10}O_3(C_2H_3O)_2$	$C_{11}H_9O_3(C_2H_3O)_3$
	—	—	—
Carbonio	66,66	65,21	64,15
Idrogeno	5,98	5,79	5,66

risulta, come assai probabile, che il derivato ottenuto sia il biacetilico.

Non credo intanto di dover tralasciare di fare osservare che mentre i derivati acetilici dell'acido carbousnico, dell'acido pirousnetico e dell'usneolo si fondono a temperatura più bassa dei composti dai quali derivano, il solo derivato acetilico dell'acido pirousnico ha un punto di fusione più elevato dello stesso acido pirousnico, come si scorge dal seguente prospetto:

1. Acido decarbousnico si fonde a . . . . 198-199°
   Derivato monoacetilico » . . . . 147-148°
   » biacetilico » . . . . 130-131°
2. Acido pirousnetico » . . . . 185-186°
   Derivato acetilico » . . . . 168°
3. Usneolo » . . . . 175°
   Derivato acetilico » . . . . 141-142°
4. Acido pirousnico » . . . . 195°
   Derivato acetilico » . . . . 205°

Essendo l'usneolo il derivato più semplice che fin ora mi sia riuscito di ottenere dall'acido usnico, è naturale ch'io abbia avuto il pensiero di sottometterlo ad un attento studio, perchè da esso dovevano principalmente attendersi i dati necessarî per venire alla costituzione dell'acido usnico. Sventuratamente però le difficoltà per ottenere una buona quantità di usneolo non sono piccole, e basta per vederlo riandare la serie delle trasformazioni necessarie per giungere fino ad esso; si aggiunga che occupato in altri studî e spesso distolto da cause fortuite dal mio lavoro, non ho potuto consacrare a queste ricerche quel tempo che sarebbe stato richiesto per condurle a buon fine, e si avrà così la ragione per la quale oggi non presento, intorno a questa parte, che dei risultati incompleti. Ecco infatti quello che ho potuto pel momento raccogliere:

1) Ho distillato gr. 4,5 di usneolo con venti volte il suo peso di polvere di zinco. Non ottenni alcun sublimato cristallino, ma potei raccogliere alcune gocce di un liquido, di odore misto di menta e di fenati alcoolici, bollente da sotto 100° fino a temperatura molto elevata, ed in parte solubile nella potassa. Facendo passare i gaz che si svolgevano attraverso il bromo, osservai la produzione di un bromuro.

2) Ho riscaldato l'usneolo in tubo chiuso a 130° con un eccesso di acido jodidrico, bollente a 127°. Si trasforma in una sostanza cristallina quasi nera, che lavata con solfuro di carbonio, si presenta in lunghi aghi, duri, di splendore vitreo, neri o quasi, insolubili nei solventi comuni, infusibili e che danno una polvere rossa. Due analisi mi hanno dato in media

Carbonio 63,23
Idrogeno 5,20

risultati che condurrebbero alla formola $C_8H_8O_3$ che richiede:

Carbonio 63,15
Idrogeno 5,26

ma, io non credo di dovere attribuire a queste analisi un valore serio, perchè fatte sopra un prodotto che non potè purificarsi; credo invece più probabile che la nuova sostanza sia un polimero dell'usneolo, analogo a quello ottenuto da Stenhouse e Groves dal β naftolo, ed agli altri da me accennati nella Memoria sull'acido lapacico. Altre esperienze potranno facilmente chiarire questo punto.

3) Debbo finalmente accennare che fondendo con potassa l'usneolo ho ottenuto una sostanza che si avvicina alla pirocatechina.

7. *Acido usnolico.* Come ho accennato nella introduzione di questa Memoria, Stenhouse e Groves [1] poco tempo addietro hanno ottenuto dall'acido usnico un nuovo derivato, che chiamano acido usnolico, la cui formola $C_{27}H_{24}O_{10}$ non ha alcun rapporto con quella sin ora ammessa per l'acido usnico e con quelle dei numerosi derivati che ho descritto. Ho creduto perciò del più grande interesse di avere nelle mani un tale composto, e sebbene la ristrettezza del tempo e la mancanza di materia prima non mi abbiano permesso di farne uno studio un poco completo, purtuttavia ho ottenuto sin dal principio delle mie indagini un risultato che merita di attirare l'attenzione. — Ho preparato l'acido usnolico seguendo precisamente le indicazioni di Stenhouse e Groves ed ho ottenuto un prodotto cogli stessi caratteri che hanno indicato questi chimici; però mentre essi hanno, per la composizione, ottenuto in media:

Carbonio 63,78
Idrogeno 5,02

i risultati miei sono stati i seguenti:

I. gr. 0,2392 di sostanza fornirono gr. 0,5462 di anidride carbonica e gr. 0,1049 di acqua;
II. gr. 0,2542 di sostanza fornirono gr. 0,5858 di anidride carbonica e gr 0,1174 di acqua;
III. gr. 0,2823 di sostanza fornirono gr. 0,6478 di anidride carbonica e gr. 0,1278 di acqua;
IV. gr. 0,302 di sostanza fornirono gr. 0,6912 di anidride carbonica e gr. 0,144 di acqua;
V. gr. 0,225 di sostanza fornirono gr. 0,532 di anidride carbonica e gr. 0,0998 di acqua.

Cioè %

	I	II	III	IV	V
Carbonio	62,27	62,85	62.58	62,42	62,90
Idrogeno	4,87	5,13	5,03	5,00	4,93

Come si vede la differenza è notevole e tanto più degna di osservazione in quantocchè non si tratta di una sola analisi, ma di parecchie e fra di loro concordanti. Pel momento non credo di dovere aggiungere parola.

8. *Anilide usnica.* Nella mia prima Memoria sull'acido usnico (Gazzetta Chimica, t. VI, p. 118) ho accennato che sciogliendo l'acido usnico in un miscuglio di alcool e di anilina, si formava una sostanza che supposi fosse un usnato di anilina. Lo studio di essa mi ha mostrato invece che trattasi di un'anilide dell'acido usnico.

Si prepara l'anilide usnica scaldando leggermente acido usnico sciolto nella benzina, o sospeso nell'alcool, con un eccesso di anilina, e cristallizzando il prodotto

[1] Journal of the Chemical Society, may 1881, p. 234.

dall'alcool bollente o dall'acido acetico. Si può pure ottenere riscaldando una soluzione alcoolica di usnato potassico con cloridrato di anilina.

L'anilide usnica cristallizza dall'alcool bollente in sottili laminette di color giallo cedrino pallido e di splendore vitreo, e dall'acido acetico in prismi duri e pesanti. Si fonde a 170-171°. Nell'alcool bollente è mediocremente solubile, in quello freddo si scioglie pochissimo; anche nell'etere è poco solubile; è invece solubilissima nell'acido acetico caldo e nella benzina.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,2616 di sostanza diedero gr. 0,663 di anidride carbonica e gr. 0,126 di acqua;
II. gr. 0,3122 di sostanza diedero gr. 0,787 di anidride carbonica e gr. 0,1465 di acqua;
III. gr. 0,3282 di sostanza diedero gr. 0,823 di anidride carbonica e gr. 0,1546 di acqua;
IV. gr. 0,2457 di sostanza diedero gr. 0,6148 di anidride carbonica e gr. 0,1195 di acqua;
V. gr. 0,2411 di sostanza diedero gr. 0,6028 di anidride carbonica e gr. 0,1173 di acqua;
VI. gr. 0,1793 di sostanza diedero gr. 0,451 di anidride carbonica e gr. 0,884 di acqua;
VII. gr. 0,228 di sostanza diedero gr. 0,5765 di anidride carbonica e gr. 0,1085 di acqua;
VIII. gr. 0,4104 di sostanza fornirono c.c. 14,1 di azoto alla temperatura di 15°,3 e sotto la pressione di m.m. 765,9.
IX. gr. 0,3893 di sostanza fornirono c.c. 11,9 di azoto a 17°,9 e sotto la pressione di m.m. 760,2.

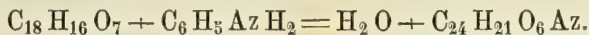
Cioè, deducendo la composizione centesimale:

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Carbonio	69,12	68,74	68,38	68,24	68,18	68,59	68,72	—	—
Idrogeno	5,35	5,21	5,23	5,40	5,40	5,48	5,28	—	—
Azoto	—	—	—	—	—	—	—	4,01	3,52

Risultati che conducono alla formola $C_{24}H_{21}O_6N$ per la quale si calcola:

Carbonio	68,73
Idrogeno	5,01
Azoto	3,34

Si tratta adunque di un' anilide prodotta dall'unione di una molecola di acido usnico (anidride) e di una di anilina, con eliminazione degli elementi di una molecola di acqua. Infatti:

$$C_{18}H_{16}O_7 + C_6H_5AzH_2 = H_2O + C_{24}H_{21}O_6Az.$$

L'anilide usnica si scioglie facilmente nella potassa acquosa a freddo dando una soluzione di un bel color giallo, dalla quale l'acido cloridrico precipita una sostanza che ha l'apparenza ed il punto di fusione (169-171°) dell'anilide usnica, ma che ne differisce nella composizione. Essa infatti, purificata per cristallizzazione dall'alcool, ha fornito all' analisi i seguenti risultati:

I. gr. 0,250 di sostanza diedero gr. 0,639 di anidride carbonica e gr. 0,1204 di acqua;
II. gr. 0,2548 di sostanza diedero gr. 0,6535 di anidride carbonica e gr. 0,1227 di acqua;

Cioè per %

	I	II
Carbonio	69,74	69,94
Idrogeno	5,45	5,35

Risultati che fanno supporre che per l'azione della potassa l'anilide usnica perda CO_2 per trasformarsi in un'anilide $C_{23} H_{23} O_6 Az$, corrispondente alla decarbousneina, per la quale si calcola:

Carbonio 70,23
Idrogeno 5,85

L'anilide usnica per la ebollizione con l'acido cloridrico o con l'acido solforico diluito non perde dell'anilina, nè subisce trasformazione alcuna. Anche per la ebollizione col cloruro di acetile rimane inalterata; scaldata, in tubi chiusi a 120°, con anidride acetica rimane in gran parte inalterata ed in parte si decompone, senza fornire, a quanto sembra, derivati acetilici. A 160°, con alcool in tubi chiusi, si trasforma in una sostanza che dall'alcool bollente cristallizza in aghi sottilissimi, che per lo scaldamento cominciano a colorarsi a 200°, si rammolliscono appena verso 220° ed a più alta temperatura si decompongono, fornendo dell'anilina fra i prodotti volatili.

Finalmente l'anilide usnica, la quale, come ho detto, non viene alterata per la ebollizione con l'acido solforico diluito, si scioglie facilmente nell'acido solforico concentrato dando una soluzione rossa, dalla quale l'acqua precipita dei fiocchi gialli di una nuova sostanza contenente ancora, come mi sono accertato, il residuo dell'anilina. Sembra quindi che l'anilide usnica si presti a subire una serie di trasformazioni analoghe a quelle che presenta l'acido usnico, senza perdere il residuo dell'anilina. Il tempo mi è mancato per esaminare attentamente questi derivati.

9 *Conclusioni e considerazioni generali*. Da quanto ho esposto in questa Memoria chiaramente si scorge come l'acido usnico sia senza dubbio una delle sostanze più complesse fin ora estratte dal regno vegetale, e nonostante le molteplici trasformazioni alle quali si presta io non credo che fin ora sia conosciuto abbastanza per potere, non dico dare una formola di costituzione, ma nemmeno per istabilire come siano fra loro collegati i diversi gruppi, eliminati i quali, dall'acido usnico, composto a 18 at. di carbonio, si perviene all'usneolo che ne contiene 11 at. soltanto: sull'intima costituzione di quest'ultimo qualunque congettura sarebbe poi prematura. Mi sforzerò non pertanto, sulla base dei fatti fin ora noti e lasciando da parte la costituzione dell'usneolo, di cercare di gettare un poco di luce sul modo come possibilmente potrebbe essere costituito il rimanente della molecola dell'acido usnico.

Dalle esperienze esposte in questa Memoria e da quelle pubblicate nel 1876 e nel 1878 risulta:

1. Che il così detto acido usnico $C_{18} H_{16} O_7$ è realmente un'anidride e che i suoi sali corrispondono alla formola $C_{18} H_{17} MO_8$. Risulta inoltre dalle esperienze di Salkowski che l'acido usnico è capace di dare sali basici.

2. L'acido usnico (anidride) perdendo CO_2 ed acquistando gli elementi di una molecola d'acqua si trasforma in decarbousneina, $C_{17} H_{18} O_6$, sostanza la quale pur conservando i caratteri acidi è alterabilissima in contatto alle basi e si avvicina per le facoltà riduttrici all'acido pirogallico.

3. Dalla decarbousneina si può eliminare per l'azione della potassa un acetile e si ottiene allora l'acido decarbousnico $C_{15} H_{16} O_5$, il quale è nel complesso un acido più energico della decarbousneina, non ha più le facoltà eminentemente riduttrici di quella ed è atto a fornire, a quanto sembra, un derivato monoacetilico ed un biacetilico.

4. Per l'azione della potassa sull'anidride usnica si forma un primo prodotto $C_{14}H_{16}O_6$, che può dar luogo ad un derivato monoacelitico e che è certamente un carbacido contenente il gruppo COOH perchè nella distillazione secca perde CO_2 e si trasforma in usnetolo $C_{13}H_{14}O_4$, in modo del tutto simile come l'acido salicilico dà fenol, l'acido orsellico orcina, l'acido gallico piragallol ecc. ecc.

5. Finalmente l'ultimo prodotto dell'azione della potassa sull'acido usnico, è l'acido pirousnico $C_{12}H_{12}O_5$, che si forma per eliminazione di CO_2, $C_2H_4O_2$ e C_3H_6O ed assorbimento degli elementi di $3H_2O$; esso dà un derivato biacetilico, e come l'acido usnetico, contiene il gruppo COOH, poichè riscaldato perde CO_2 e genera l'usneolo $C_{11}H_{12}O_3$; quest'ultimo, come l'acido pirousnico, dà luogo alla formazione di un derivato biacetilico.

Da tutti questi fatti si deduce che la formola di struttura dell'acido usnico, o meglio del complesso molecolare che dall'acido usnico $C_{18}H_{15}O_7$ permette di arrivare all'acido pirousnico $C_{11}H_{11}O_3 \cdot CO\,OH$, deve soddisfare alla condizione di potere eliminarsi per parte e successivamente nei seguenti modi, cioè:

1. Perdere anidride carbonica sola, acquistando H_2O (formazione di decarbousneina);

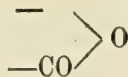
2. Perdere anidride carbonica ed acido acetico, acquistando $2H_2O$ (formazione di acido decarbousnico);

3. Perdere anidride carbonica ed acetone, acquistando gli elementi di $2H_2O$ (formazione di acido pirousnetico);

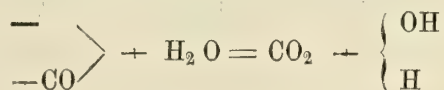
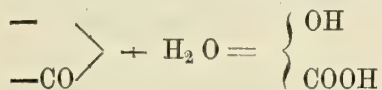
4. Finalmente perdere anidride carbonica, acido acetico ed acetone acquistando $3H_2O$ (formazione di acido pirousnico); tenendo presente che tutti i prodotti che da queste trasformazioni risultano sono degli acidi contenenti inoltre uno o due ossidrili.

Dirò francamente che fin ora non mi è riuscito di immaginare una formola che soddisfi a tutte le condizioni superiormente indicate, non credendomi autorizzato ad ammettere delle trasposizioni molecolari e volendo che da essa fosse risultato a colpo d'occhio la relazione che lega la produzione dei diversi derivati. Non credo però superfluo di fare talune osservazioni.

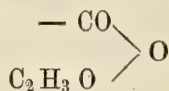
E prima di tutto a me sembra che dal confronto dell'acido usnico con la decarbousneina e l'acido decarbousnico, possa dedursi che nella formazione della decarbousneina si elimini sotto forma di CO_2 quel gruppo stesso che dà luogo negli usnati alla formazione del COOM, il quale gruppo che nell'acido usnico (anidride) è:

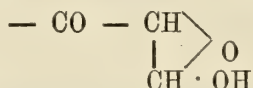
$$\left.\begin{matrix}- \\ -CO\end{matrix}\right> O$$

assorbendo gli elementi dell'acqua dia luogo alla formazione di un ossidrile nuovo:

$$\left.\begin{matrix}- \\ -CO\end{matrix}\right> + H_2O = \left\{\begin{matrix}OH \\ COOH\end{matrix}\right.$$

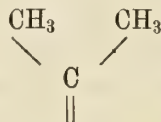
$$\left.\begin{matrix}- \\ -CO\end{matrix}\right> + H_2O = CO_2 + \left\{\begin{matrix}OH \\ H\end{matrix}\right.$$

la presenza del quale rendendo da un lato possibile la formazione dei sali basici, dall'altro lato spiega la facile ossidabilità della decarbousneina.

Nella trasformazione poi della decarbousneina in acido decarbousnico bisogna tener presente che sebbene si elimini un acetile non può ammettersi che la prima sia semplicemente il derivato acetilico del secondo, perchè allora l'acetile decarbousnico dovrebbe essere identico alla decarbousneina, cosa contraria al fatto; bisogna quindi ammettere o che la decarbousneina sia un'anidride mista e contenga il gruppo

$$\begin{array}{l} -\,CO \diagdown \\ \qquad\qquad \rangle\, O \\ C_2H_3O \diagup \end{array}$$

ed allora assorbendo gli elementi dell'acqua può formarsi acido acetico $C_2H_3O \cdot OH$ nel mentre si costituisce il gruppo COOH, ed in questo caso è naturale che nell'azione del cloruro di acetile sull'acido decarbousnico l'acetile entrando in un ossidrile produca un isomero della decarbousneina; o pure si potrebbe supporre che nella decarbousneina esista un gruppo simile a quello rappresentato dallo schema:

$$\begin{array}{l} -\,CO\,-\,CH \diagdown \\ \qquad\qquad\;\; | \quad \rangle\, O \\ \qquad\qquad CH \cdot OH \end{array}$$

il quale può assorbendo H_2O trasformarsi in $C_2H_4O_2$ e COOH. Nell'uno e nell'altro caso l'acido decarbousnico conterrebbe il COOH ed un ossidrile almeno, cioè l'ossidrile costituitosi nell'atto della formazione della decarbousneina: è però più probabile che ne contenga due, come sembra indicare la esistenza del derivato biacetilico.

In quanto alla produzione dell'acetone, per l'azione della potassa sull'acido usnico, debbo osservare che la ipotesi annunziata nelle prime ricerche che essa fosse dovuta alla presenza del gruppo:

$$\begin{array}{ccc} CH_3 & & CH_3 \\ \diagdown & & \diagup \\ & C & \\ & \| & \end{array}$$

deve essere modificata. Lo studio infatti dell'anilide usnica, sostanza per molti riguardi paragonabile all'acido anilpiruvico studiato da Boettinger [1] mi fa invece supporre che la formazione dell'acetone sia da attribuirsi alla presenza di un gruppo già ossigenato, p. es.:

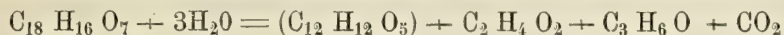
$$\begin{array}{c} CH_3 \\ | \\ CO \\ | \\ CH_2 \end{array}$$

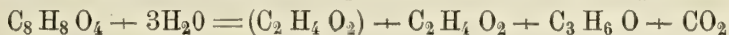
In questo caso però la formazione dell'acetone sarebbe collegata alla introduzione di un ossidrile almeno (o di altro gruppo corrispondente) nel nucleo della molecola dell'acido usnico.

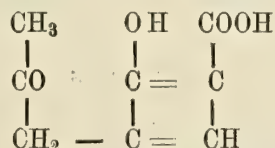
Finalmente non posso tralasciare di notare che esaminando la trasformazione dell'acido usnico in pirousnico, si resta colpiti dalla perfetta analogia che vi ha fra

[1] Annalen t. 188, p. 336.

la decomposizione che subisce l'acido usnico e quella che nelle stesse condizioni presenta l'acido deidroacetico. Infatti mentre l'acido usnico, assorbendo gli elementi di $3H_2O$, si decompone in acido pirousnico, acido acetico, acetone ed anidride carbonica:

$$C_{18}H_{16}O_7 + 3H_2O = (C_{12}H_{12}O_5) + C_2H_4O_2 + C_3H_6O + CO_2$$

l'acido deidroacetico secondo Oppenheim e Precht (¹) fornisce acido acetico (2 mol.), acetone ed anidride carbonica per una equazione del tutto corrispondente:

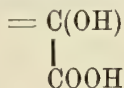
$$C_8H_8O_4 + 3H_2O = (C_2H_4O_2) + C_2H_4O_2 + C_3H_6O + CO_2$$

e con la sola differenza che in quest' ultimo caso l'acido pirousnico è rappresentato da una seconda molecola di acido acetico. Potrebbe dunque a prima vista supporsi che nell'acido usnico siano aggruppati intorno alla molecola dell'acido pirousnico gli stessi gruppi e nello stesso modo che nell'acido deidroacetico sono aggruppati intorno ad una molecola di acido acetico. Però bisogna prima di tutto osservare che l'analogia non può essere completa poichè le formole $C_{18}H_{16}O_7$ e $C_8H_8O_4$ rappresentano la prima un' anidride, la seconda un acido vero. Del resto prendendo come punto di partenza la formola di struttura data da Oppenheim e Precht (²) per l'acido deidroacetico:

```
CH3     OH   COOH
 |       |    |
CO       C =  C
 |       |    |
CH2  —   C =  CH
```

difficilmente si potrebbe pervenire ad una formola probabile per l'acido usnico. È vero che la formola di Oppenheim e Precht, a mio modo di vedere, non è inappuntabile e perciò posto anche che gli acidi usnico e deidroacetico fossero similmente costituiti, nessuno obbligherebbe a prenderla come base indiscutibile, ma non è men vero che per quanto abbia escogitato non mi sia riuscito di venire a qualche cosa di concreto.

Tutto quanto ho superiormente esposto mi porta a supporre che nelle diverse trasformazioni che l' acido usnico subisce, per dar luogo ai prodotti descritti, debbano avvenire delle trasposizioni, che fin ora non posso indicare con certezza, e non mi sembra improbabile che nell'acido usnico sia contenuto il gruppo

```
— CO
  |
— CO
```

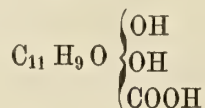
della benzoina, o un gruppo simile: questo gruppo, come è noto, assorbendo gli elementi dell'acqua per dare l'acido benzilico si trasforma in

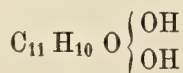
```
= C(OH)
  |
  COOH
```

e nel caso della trasformazione dell'acido usnico in decarbousneina potrebbe perciò trasformarsi in

$$= CH\,(OH)$$

(¹) Berichte ecc. di Berlino, t. IX. p. 325.
(²) Berichte ecc. di Berlino, t. IX, p. 1401.

Per il momento credo di dovermi astenere da tutt'altre considerazioni. Spero di potere presto essere in grado di raccogliere nuovi fatti che gettando nuova luce su questo argomento assai complesso mi portino alla conoscenza dell'intima costituzione dell'acido usnico e dei suoi derivati. Per ora di stabilita con certezza non può considerarsi che la formola

$$C_{11} H_9 O \begin{cases} OH \\ OH \\ COOH \end{cases}$$

per l'acido pirousnico, e quella

$$C_{11} H_{10} O \begin{cases} OH \\ OH \end{cases}$$

per l'usneolo, restando però a chiarirsi la costituzione del gruppo $C_{11} H_{10} O$. In quanto a quest' ultimo posso soltanto dire che tutto porta a credere che esso sia un derivato della benzina, contenente più d'una catena laterale, delle quali una legata al carbonio per mezzo dell'atomo di ossigeno ; ciò risulta dalla distillazione sullo zinco, operazione nella quale si ottiene un idrocarburo della serie dell'etilene, ed una sostanza che sembra un' anisol.

II. Acido fiscico.

Con questo nome indico un nuovo acido, che ho estratto e studiato, insieme al prof. Scichilone, dalla *Fiscia parietina*, *Schaer*, che cresce abbondantemente in Sicilia sugli alberi di agrumi.

Si estrae quest'acido dal lichene, collocato in un apparecchio a spostamento, per mezzo dell'alcool bollente. Si ottiene una massa nera vischiosa, la quale trattata con etere lascia indisciolto il nuovo acido sotto forma di una polvere cristallina quasi nera, che si purifica lavandola con etere e cristallizzandola parecchie volte dalla benzina in presenza di carbone animale. La quantità che se ne ottiene è veramente piccola rispetto al lichene adoperato. L'acido fiscico puro si presenta in bei cristallini di color rosso bruno, fusibili a 204-204°, 5 ; si scioglie facilmente nella potassa e nel carbonato potassico dando sali di un bel colorito rosso, come fa l'acido crisofanico ; quando si riprecipita dalla soluzione potassica e si cristallizza dall'alcool perde il colore rosso e si presenta in aghi di color giallo canario, fusibili à 200°, ma che sembrano identici alla sostanza primitiva.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati :

I. gr. 0,2729 di sostanza fornirono gr. 0,6737 di anidride carbonica e gr. 0,1163 di acqua;
II. gr. 0,3565 di sostanza fornirono gr. 0,8845 di anidride carbonica e gr. 0,1629 di acqua.

Cioè %

	I	II
Carbonio	67,33	67,66
Idrogeno	4,73	5,08

La piccola quantità di prodotto che abbiamo avuto a nostra disposizione non ci ha permesso di approfondire lo studio di questo acido, il quale, sebbene a prima vista si avvicini molto all' acido crisofanico purtuttavia ne differisce per la composizione e pel punto di fusione notevolmente più elevato.

Fin ora mi sono limitato ad osservare che l'acido fiscico riscaldato con anidride acetica dà origine ad un derivato acetilico, e che distillato con la polvere di zinco fornisce un idrocarburo solido che non è nè antracene, nè metilantracene, ma la cui natura non abbiamo potuto determinare fin ora.

Debbo finalmente accennare che la maggior parte dello estratto alcoolico della *Fiscia parietina* è costituito da una sostanza bruna vischiosa, la quale scaldata con potassa svolge abbondantemente una base molto volatile, di reazione fortemente alcalina e di odore ammoniacale. Sono attualmente occupato, in comune al prof. Scichilone, a studiare più attentamente l'acido fiscico e gli altri prodotti che si rinvengono nella *Fiscia parietina.*

Mi corre intanto l'obbligo di accennare che verso la fine di settembre ora scorso parlando col prof. Koerner seppi com'egli stava studiando un acido che molto si avvicinava a quello esaminato da me e Scichilone, e che secondo il Koerner diceva; si trasforma per l'azione della potassa in acido crisofanico. A me sembra purtuttavia che si tratti di due corpi diversi.

III. Acido atranorico e derivati. Acido rangiformico.

L'acido atranorico fu scoperto da me ed Oglialoro ([1]) nella *Lecanora atra*; in seguito fu da me rinvenuto nello *Stereocalun Vesuvianum* ([2]). Continuando lo studio dei principî contenuti nei licheni della Sicilia, ho trovato il medesimo acido nella *Cladonia rangiformis Schaer*, che vegeta abbondantemente nei boschetti della R. Favorita presso Palermo. Per mezzo dell'etere l'acido atranorico si estrae dalla Lecanora atra mischiato ad acido usnico, dallo Stereocaulon Vesuvianum si ottiene invece quasi puro; nella Cladonia rangiformis è accompagnato da un nuovo acido che sarà nel seguito descritto sotto il nome di acido rangiformico.

La *Cladonia rangiformis*, ben disseccata al sole e polverizzata, abbandona all'etere circa il 3 % di un prodotto cristallino quasi bianco o leggermente giallo, dal quale si ottiene l'acido atranorico trattandolo prima coll'alcool bollente e con etere che trasportano l'acido rangiformico, e cristallizzando poscia la parte indisciolta dal cloroformio, dalla benzina o, meglio, dallo xilene bollente. L'acido atranorico così ottenuto si fonde, come quello estratto dagli altri licheni indicati, da 190 a 194° secondo i campioni; esso è pochissimo solubile nell'alcool, nell'etere, nel cloroformio e nella benzina a freddo; si scioglie mediocremente nel cloroformio e nella benzina bollente ed ancor più nello xilene caldo. All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,3465 di sostanza fornirono gr. 0,770 di anidride carbonica e gr. 0,1535 di acqua;
II. gr. 0,312 di sostanza fornirono gr. 0,700 di anidride carbonica e gr. 0,145 di acqua;
III. gr. 0,218 di sostanza fornirono gr. 0,4869 di anidride carbonica e gr. 0,1014 di acqua.

Cioè %

	I	II	III
Carbonio	60,60	61,19	60,92
Idrogeno	4,92	5,19	5,17

([1]) Gazzetta Chimica Italiana, t. VII, p. 289. — ([2]) Ibid.

mentre per la formola $C_{19} H_{18} O_8$ si calcola:

Carbonio 60,96
Idrogeno 4,81

L'acido atranorico si scioglie facilmente nella potassa e nell'ammoniaca dando soluzioni di color giallo canario, dalle quali viene riprecipitato inalterato per l'aggiunta di acido cloridrico.

Scaldato, per alcune ore, in tubi chiusi con acqua a 150°, si decompone svolgendo anidride carbonica e trasformandosi in due diverse sostanze, delle quali una molto più solubile nell'acqua bollente si rinviene cristallizzata nei tubi in magnifici aghi, l'altra molto meno solubile si separa sotto forma di masse resinose brune. La prima si ottiene pura facendo bollire il prodotto della reazione con acqua, filtrando a caldo, e cristallizzando replicate volte dall'acqua bollente il prodotto che si depone pel raffreddamento. Si ha così in belli aghi, rugosi al tatto, splendenti e fusibili a 100-101°: essa si scioglie abbastanza bene nell'acqua bollente, molto meno in quella fredda: è assai solubile nell'alcool e nell'etere; ha i caratteri di un acido e si scioglie a freddo facilmente negli alcali e nei carbonati alcalini dando, come l'acido atronorico, soluzioni gialle. La sua soluzione ammoniacale dà col nitrato di argento un precipitato verdastro che alla luce si altera rapidamente. La sua soluzione acquosa è colorata in verde bruno dal cloruro ferrico, ed in rosso di sangue dal cloruro di calce; quest' ultima colorazione svanisce però prontamente tanto più in presenza di un eccesso di reattivo.

All'analisi ha dato:

gr. 0,315 di sostanza fornirono gr. 0,688 di anidride carbonica e gr. 0,1729 di acqua, cioè:

Carbonio 59,93
Idrogeno 6,10

Chiamerò quest'acido col nome di *acido atranorinico.*

L'altro prodotto che si forma nell'azione dell'acqua sull'acido atranorico resta in gran parte indisciolto nell'acqua bollente, e si purifica cristallizzandolo dall'alcool in presenza del carbone animale. Si ottiene in belle laminette micacee fusibili a 140-141°: è poco solubile nell'acqua, anche bollente, e si scioglie bene nell'alcool e nell'etere. È anch' esso un acido, e si scioglie facilmente negli alcali e nei carbonati alcalini senza però colorarsi; il suo sale di argento è un precipitato bianco che imbrunisce subito alla luce. Col cloruro di calce dà la stessa reazione degli acidi atranorico e atranorinico, ma col cloruro ferrico non dà reazione alcuna. Lo chiamerò *acido atrarico.* Un'analisi mi ha dato:

gr. 0,2866 di sostanza fornirono gr. 0,4792 di anidride carbonica e gr. 0,1626 di acqua, cioè:

Carbonio 45,60
Idrogeno 6,30

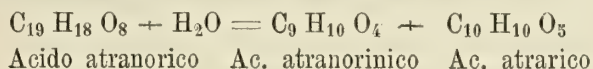
Da quanto ho esposto risulta che l'acido atranorico per l'azione dell' acqua si trasforma in due nuovi acidi l'atranorinico e l'atrarico, come l'acido evernico si trasforma in everninico ed orcellico.

Dippiù i risultati dell'analisi dell'acido atranorinico rendono probabile ch' esso abbia la formola $C_9 H_{10} O_4$ e che sia un nuovo isomero degli acidi everninico, ombellico ed idrocafeico; infatti per essa formola si calcola:

Carbonio 59,30
Idrogeno 5,49

Non è quindi improbabile, che l'anidride carbonica che si svolge nell' azione dell'acqua sull'acido atranorico sia dovuta ad una decomposizione secondaria, e che la reazione principale avvenga nel senso dell'equazione:

$$C_{19} H_{18} O_8 + H_2O = C_9 H_{10} O_4 + C_{10} H_{10} O_5$$

Acido atranorico   Ac. atranorinico   Ac. atrarico

L'acido atranorico secondo questo modo di vedere verrebbe a collocarsi nella serie degli acidi lecanorico, everninico e barbatinico, che sono l'uno omologo dell'altro

$C_{16} H_{14} O_7$ acido lecanorico.
$C_{17} H_{16} O_7$ acido everninico.
$C_{19} H_{20} O_7$ acido barbatinico.

con la sola differenza che conterrebbe un atomo di ossigeno in più e due atomi meno d' idrogeno dell'ultimo di questi acidi. Debbo inoltre aggiungere che l'acido atrarico non corrisponde difatto alla formola $C_{10} H_{10} O_5$ che risulta dalla equazione che ho scritto, ma si approssima invece a quella $C_{10} H_{10} O_5 + 3H_2O = C_{10} H_{16} O_8$ per la quale si calcola:

Carbonio 45,45
Idrogeno 6,06

L'acido atranorico si scioglie pure nell'idrato baritico dando una soluzione di color giallo canario, la quale, per la ebollizione, depone carbonato baritico e si colora in giallo rossastro. La soluzione per l'aggiunta di acido cloridrico dà un precipitato giallo arancio, costituito da piccoli aghi, che disseccato e trattato con etere vi si scioglie lasciando un piccolo residuo rosso bruno; dalla soluzione eterea si ottiene una sostanza di color giallo pallido che purificata per cristallizzazione dall'acqua bollente si presenta in piccoli aghi che conservano una leggiera tinta giallognola e che si fondono da 115 a 118°; questa sostanza si comporta col cloruro ferrico, cogli alcali e con l'ipoclorito come l'acido atranorinico ed io credo probabilissimo che sia un miscuglio di esso con acido atrarico, che non si riuscì a separare per la troppo piccola quantità di sostanza di cui potevo disporre.

Come ho accennato, nella *Cladonia rangiformis* è contenuto insieme all'acido atranorico un nuovo acido che dirò *acido rangiformico.* Esso si separa dall'atranorico per mezzo dell'alcool e si purifica per cristallizzazioni dalla benzina bollente; si ottiene sotto forma di laminette bianche mal definite fusibili a 104-106°. All'analisi ha dato:

gr. 0,2557 di sostanza fornirono gr. 0,6095 di anidride carbonica e gr. 0,226 di acqua, cioè per $^0/_0$:

Carbonio 65,13
Idrogeno 9,84

Si scioglie facilmente nell'ammoniaca a freddo e la soluzione col nitrato di

argento precipita il corrispondente sale di argento in fiocchi bianchi. Disseccato a 100° ha dato all'analisi:

gr. 0,3914 lasciarono un residuo di gr. 0,1435 di argento metallico.

Cioè %

Argento 36,6

Da questi risultati che debbono essere considerati come approssimativi risulta che l'acido rangiformico non appartiene alla serie aromatica ed alla classe degli acidi che più comunemente si estraggono dai licheni. Sembra ch'esso corrisponda invece alla formola $C_{11}H_{18}O_3$ e che sia un omologo inferiore dell'acido lichenstearico $C_{14}H_{24}O_3$ scoperto da Schedermann e Knop (¹).

Infatti per la formola $C_{11}H_{18}O_3$ si calcola %

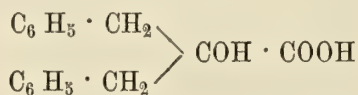
Carbonio	66,66
Idrogeno	9,09

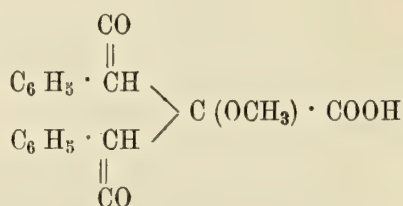
e pel sale di argento $C_{11}H_{17}AgO_3$.

Argento . . . . 35,44 %.

In una prossima Memoria mi propongo di ritornare su questo nuovo acido della *Cladonia rangiformis*, di chiarire meglio la costituzione dell'acido atranorico, e di esporre i risultati ottenuti nello studio di altri licheni e principalmente della *Ramalina fraxinea* L. *var. ampliata Ach* e della *Ramalina pollinaria*. Prima di chiudere intanto questa Memoria sugli acidi dei licheni mi sia permesso di aggiungere una parola sulla costituzione dell'acido vulpico.

Le belle esperienze di A. Spiegel dalle quali risulta la identità dell'acido ossatolilico con l'acido dibenzilglicolico

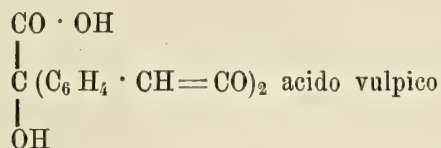
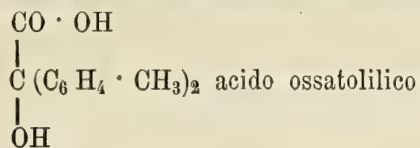
$$\begin{matrix} C_6H_5 \cdot CH_2 \\ C_6H_5 \cdot CH_2 \end{matrix} \Big\rangle COH \cdot COOH$$

collegate agli altri fatti relativi alla formazione ed alle trasformazioni dell' acido vulpico $C_{18}H_{19}O_5$, hanno mostrato alla evidenza che la costituzione dell'acido vulpico corrisponde a quella espressa dalla formola:

$$\begin{matrix} & CO \\ & \| \\ C_6H_5 \cdot & CH \\ C_6H_5 \cdot & CH \\ & \| \\ & CO \end{matrix} \Big\rangle C(OCH_3) \cdot COOH$$

Ora sento il bisogno di richiamare all'attenzione del sig. Spiegel che se non la formola precisamente identica a quella che risulta dalle sue esperienze, una molto simile ne ho dato fino dal 1875 nella mia prima Memoria sull'acido usnico, dove considerai l'acido ossatolilico come acido ditolilglicolico. La differenza adunque fra quanto l'esperienza ha mostrato e quello ch' io avevo supposto si riduce soltanto a

(¹) Annalen t. VI. p. 149 e p. 159.

ciò che l'acido ossatolilico contiene il benzile $C_6 H_5 \cdot CH_2$ —, mentre io avevo creduto contenesse il tolile — $C_6 H_4 \cdot CH_3$: del resto l'uno e l'altro gruppo possono dar luogo alla formazione di toluene. Ecco le formole ch' io scrissi nel 1875:

$$\begin{array}{l} CO \cdot OH \\ | \\ C\,(C_6 H_4 \cdot CH_3)_2 \quad \text{acido ossatolilico} \\ | \\ OH \end{array}$$

$$\begin{array}{l} CO \cdot OH \\ | \\ C\,(C_6 H_4 \cdot CH{=}CO)_2 \quad \text{acido vulpico} \\ | \\ OH \end{array}$$

Da queste formole risulta soltanto che le trasformazioni già note dell' acido vulpico permettevano di preconizzare la sua costituzione contrariamente a quanto era scritto in parecchi libri del tempo.

Ricerche sull'acido lapacico.

Memoria del Socio corrisp. EMANUELE PATERNÒ

letta nella seduta dell' 8 gennaio 1882.

I. Introduzione.

Occorrendo l'Esposizione universale di Filadelfia nell'anno 1876, il Comitato centrale della Repubblica argentina dava alle stampe un importante volume, compilato sotto la direzione del signor Riccardo Napp, nel quale è esposto in modo ammirabile tutto quanto possa interessare lo straniero che di quella giovane Repubblica voglia formarsi un concetto, relativamente alla storia, alle varie istituzioni politiche ed amministrative, alla geografia, alla statistica, al regno naturale, alle industrie, al commercio, all'agricoltura ecc. (¹).

Nel capitolo XV di tale opera, scritto dal prof. Max Siewert, parlandosi delle materie coloranti di origine vegetale, è fatto cenno a p. 272 di un nuovo acido estratto da un albero (Rigogniacca della famiglia del Tecoma, Gris.) chiamato volgarmente *Lapacho*. Esso acido dal Siewert detto *lapacico*, dal nome del legno che lo contiene, viene da lui considerato come un glucoside della formola $C_{36}H_{40}O_6$, il quale per l'azione dell'acido solforico concentrato fornisca zucchero ed *acido lapaconico* $C_{20}H_{20}O_4$. Siccome di queste ricerche del Siewert non è fatto cenno, almeno che sia a mia cognizione, in nessun'opera ed in nessun periodico scientifico dell'Europa, e siccome i risultati degli studî da me fatti differiscono notevolmente da quelli del Siewert, così, a maggiore intelligenza di essi, credo conveniente di porre sotto gli occhi del lettore la traduzione letterale di quanto dal Siewert è stato pubblicato su questo argomento.

Ecco pertanto ciò ch'egli dice:

« Quest'albero (il Lapacho) è uno dei più eleganti rappresentanti della forma-
« zione sottotropicale delle provincie settentrionali. Ciò non ostante il suo studio dal
« punto di vista botanico non è stato terminato. Vi sono due o tre specie di Lapa-
« cho; una dà fiori gialli; una seconda fiori di un roseo chiaro violaceo. La prima
« è più rara della seconda; in primavera, il Lapacho a fiori rosei è il più bell'orna-
« mento delle colline e dei piani. L'albero, prima di emettere le sue foglie, si ricopre
« di una tal massa di fiori che i raggi solari non possono traversarla.

« Il Lapacho cresce abitualmente isolato e s'innalza al di sopra delle vegeta-
« zioni circostanti, ed è impossibile di figurarsi un più bel colpo d'occhio di quello
« di quest'albero in piena fioritura.

« Ma non si ferma qui l'interesse che si collega a questo vegetale; il suo legno
« è durissimo e viene adoperato per molti usi industriali.

(¹) La *République Argentine*, par R. Napp, aidé de plusieurs collaborateurs. Ouvrage écrit par ordre du Comité centrale Argentin pour l'Exposition de Philadelphie. Buenos-Aires, 1876.

« Questo legno possiede pure, dal punto di vista chimico, parecchie importanti « proprietà: offre per il bruciamento la più piccola quantità di cenere di tutti i « legni del paese (1%) e questa cenere è formata principalmente da fosfati. Inoltre « la composizione chimica della materia organica è molto complessa; fin'ora vi si è « determinato dal 5 al 7% di tannino nella corteccia e nel legno; 3 a 5% di una « sostanza simile al caoutchouc; 7,5% di una materia colorante (gialla) facilmente « cristallizzabile, e 9 a 12,5% di un' altra sostanza colorante di minor importanza « ed incristallizzabile. Questo legno, contenendo una materia simile al caoutchouc e « delle materie coloranti resinose, cioè insolubili nell'acqua, deve naturalmente resi- « stere per lungo tempo alla putrefazione. Inoltre gli abitanti pretendono che quando « ha soggiornato per qualche tempo nell'acqua, s'indurisce in modo da resistere alla « scure più tagliente.

« Noi non abbiamo studiato che la sostanza colorante gialla che si trova cri- « stallizzata nel legno stesso. Per ottenerla ed isolarla, si fa bollire la segatura o i « pezzi del legno in caldaie piene d' acqua, aggiungendovi, per ciascun chilogramma « di legno, 10 grammi di carbonato sodico cristallizzato. Si passa la decozione attra- « verso uno staccio ed il legno è sottomesso ad una nuova ebollizione con un'eguale « quantità d'acqua; si rinnova questa operazione per una terza volta. In queste deco- « zioni si fa bollire del nuovo legno aggiungendovi 5 grammi di carbonato sodico « per ciascun chilogramma di legno. L'estratto è così concentrato sino a che 10 litri « di acqua contengano la materia colorante di 5 chilogrammi di legno. Questo estratto « concentrato e raffreddato, è quindi precipitato con l'acido cloridrico che vi si ag- « giunge fino a che precipita materia colorante.

« Il precipitato è giallo verdastro. Per estrarne la materia colorante pura si « lava sopra un filtro, poscia si fa bollire in acqua addizionata di carbonato sodico. « Si opera una seconda precipitazione a freddo per mezzo dell'acido cloridrico ed il « precipitato è lavato nuovamente sino a che non contenga più tracce di acido.

« Infine il residuo disseccato è sciolto in alcool bollente; si fa cristallizzare il « liquido alcoolico che si filtra nuovamente onde allontanarne i corpi estranei.

« Si ottiene così, con questo metodo, da 100 chil. di legno, 10 chil. di materia « colorante o 7,5 di sostanza pura cristallizzata.

« Quest'ultima è solubile in 7,75 parti di alcool bollente di 85° ed in 94,5 « di alcool freddo. Questa materia colorante, poco conosciuta fin ora, sposta facil- « mente l'acido carbonico dal carbonato sodico e si discioglie in parte per formare « un liquido color sangue; così si è sicuri che rappresenti un acido organico; noi « gli abbiamo dato in conseguenza, e fondandoci sulla sua origine, il nome di *acido* « *lapacico.*

« L'acido lapacico cristallizzato dall'etere forma foglie sottilissime di color giallo « verdastro; la cristallizzazione dell'alcool dà fogliette simili o cristalli prismatici « piccolissimi, e la cristallizzazione per sublimazione fornisce cristalli in forma di « aghi finissimi. Non abbiamo potuto fin ora determinare la forma di questi cristalli « che però crediamo quadrangolari. Come l'acido libero, tutti i sali fin ora ottenuti « si sciolgono nell'alcool bollente.

« Le basi, in qualunque quantità siano, come i carbonati solubili nell'acqua,

« agiscono energicamente sull'acido lapacico, che per questa ragione ne sembra molto
« appropriato per preparare della carta da servire per constatare le reazioni chimiche;
« infatti, la carta da filtro impregnata di lapaciato sodico, colorato in bruno, diventa
« gialla sotto l'influenza degli acidi liquidi e riprende il suo colore bruno carico
« sotto l'influenza delle basi. I lapaciati di piombo e di bario, cristallizzati dall'alcool
« non contengono acqua di cristallizzazione; al contrario, il lapaciato sodico cristal-
« lizzato dall'acqua ne contiene una quantità così considerevole da perderla alla tem-
« peratura del bagnomaria. Raffreddandosi, si opera una seconda cristallizzazione che pre-
« senta alla superficie l'aspetto di un velluto bruno carico. Trattato con l'acido ni-
« trico concentrato e caldo, l'acido lapacico si scioglie in parte svolgendo vapori
« rutilanti. Trattato con lo stesso acido diluito si scioglie completamente.

« La soluzione raffreddata dà luogo ad una nuova cristallizzazione di un color
« rosso chiaro che non abbiamo ancora studiato completamente, l'acido nitrolapacico.

« Trattato a caldo con l'acido solforico concentrato, l'acido lapacico si scioglie
« completamente senza svolgimento di gaz, e si trasforma in un liquido color di
« sangue. Versato nell'acqua, questo liquido lascia precipitare una materia color arancio,
« che lavata e sciolta nell'alcool bollente, cristallizza sotto forma di piccoli aghi fini
« e splendenti di colore più o meno bruno.

« Se si tratta con la soluzione alcalina cuprica di Fehling ciò che resta disciolto
« nell'acido solforico, si ottiene una sostanza mucilagginosa dell' aspetto dello zuc-
« chero d'uva (glucoso). Noi abbiamo dato provvisoriamente il nome di acido lapa-
« conico alla sostanza cristallizzata che risulta dall'azione dell'acido solforico.

« La stessa reazione si effettua per l' ebollizione prolungata dell'acido lapacico
« con gli acidi solforico e cloridrico diluiti d'acqua.

« Le esperienze fatte sino ad ora sembrano indicare, per la composizione dei
« due acidi, le formole seguenti.

$C_{36} H_{40} O_6$ acido lapacico
$C_{20} H_{20} O_4$ acido lapaconico

Acido lapacico

	Determinazione	Calcolo
C =	76,15 %	76,06 %
H =	7,06 »	7,04 »
O =	16,79 »	16,90 »
	100,00 %	100,00 %

Acido lapaconico

	Determinazione	Calcolo
C =	74,00 %	74,07 %
H =	6,18 »	6,17 »
O =	19,82 »	19,76 »
	100,00 %	100,00 %

« Il lapaciato d'ammoniaca neutro trattato col gaz acido solforoso forma una so-
« stanza che non abbiamo ancora studiato ».

L'acido lapacico, che ho adoperato nelle mie ricerche, mi è stato in parte spedito dal chmo. prof. P. N. Arata dell'Università di Buenos-Aires, il quale pregato da me nell'anno 1877, se potesse farmi tenere un campione del prodotto del Siewert, con una gentilezza e liberalità delle quali non potrei mai abbastanza ringraziarlo, preparava e generosamente mi donava due campioni di acido lapacico: uno più puro del peso di grammi 160, l'altro grezzo del peso di grammi 450. In seguito per mezzo del r. Governo mi sono procurato 200 chilogrammi all'incirca di segatura di legno di *Lapacho*, dal quale ho estratto una considerevole quantità dell'acido.

Prima di passare alla esposizione delle ricerche da me fatte, debbo accennare che, in data del 7 maggio 1878, il prof. Arata mi dava un'altra prova della sua gentilezza avvertendomi che l'acido lapacico era secondo tutte le probabilità identico all'acido taiguico studiato parecchi anni prima dall' Arnoudon, e comunicandomi taluni particolari sulle diverse varietà di Lapacho e sull'origine dell'acido da lui speditomi, indicazioni che per la loro importanza credo conveniente d'inserire in questa Memoria estraendole dalla lettera del mio egregio amico.

Dopo avermi detto che essendogli capitata sott'occhio la Memoria dell'Arnoudon sull'acido taiguico, ed aver visto in questo prodotto fotografato l'acido lapacico del Siewert, l'Arata soggiunge: « Ricorsi ad un lavoro del distinto botanico signor Do-
« menico Parodi, che soggiornò molti anni nel Paraguay, pubblicato negli *Anales de*
« *la Sociedad Cientifica Argentina* ed alla p. 37 del vol. V trovai *Tayé-yú* (nome gua-
« rany) *Lapacho amarillo.* Avendo parlato dopo al suddetto signor Parodi mi ha con-
« fermato che il *Lapacho* si chiama nel Paraguay *Tayé*, distinguendo il Lapacho *morado*
« col nome di *Tayé-hú* ed il *giallo* col nome di *Tayé-yú* ».

Ed in seguito aggiunge:

« Debbo ripeterle che col nome di Lapacho si trovano in commercio legni molto
« differenti. Si conosce un *Lapacho morado* (col quale preparai una parte dell'acido
« inviatole), un *Lapacho amarillo* (credo che di questa specie siano il pezzo di legno
« e la segatura) e mi dicono che si trovi anche un lapachillo ».

Ho voluto trascrivere queste indicazioni favoritemi dall' Arata, sia per l'importanza che realmente hanno, sia ancora per mostrare pubblicamente quanto interesse abbia preso alle mie ricerche e qual'è la gratitudine che gli debbo. Mi affretterò intanto a dichiarare che tanto l'acido lapacico cristallizzato speditomi dall'Arata, tanto quello da me estratto dalla segatura da lui inviatami, tanto quello che in grande copia ho poi ottenuto dai 200 chilogrammi di segatura, sono stati da me trovati perfettamente identici, onde può dedursene che le diverse varietà di *Lapacho* contengono la medesima sostanza.

Debbo infine accennare che appena ricevuta la lettera dell'Arata, mi affrettai a far pregare dal collega e mio carissimo amico prof. Alfonso Cossa, il prof. Arnoudon perchè, potendo, mi avesse fornito un campione di acido taiguico e delle indicazioni sull'argomento; il prof. Arnoudon rispondeva: « L'acido taiguico ed il lapacico sono
« realmente identici ed il legno *Lapacho* (l'ho già asserito) non è altro che il taigú
« da me esaminato nel 1855 ».

2. Acido lapacico e suoi sali.

Per estrarre l'acido lapacico dalla segatura del legno mi sono avvalso del metodo stesso del Siewert, che consiste nel trattare la segatura a caldo con una soluzione di carbonato sodico e precipitare poi l'acido, dalla soluzione sodica, per mezzo dell'acido cloridrico.

S'introducono, in una grande caldaia di rame, 10 chilogrammi di segatura di legno di *Lapacho* con 500 grammi di carbonato sodico cristallizzato e 80 litri di acqua: già a freddo comincia la reazione ed il liquido si colora mano mano in un bel rosso di sangue; si porta all'ebollizione, si lascia raffreddare e si filtra attraverso un lino; la segatura si sottopone per altre due o tre volte all'ebollizione con carbonato sodico, aggiungendone per ciascuna nuova operazione 100 grammi soltanto, e le soluzioni sodiche si trattano con acido cloridrico. Si forma così, principalmente in quella della prima estrazione, un abbondante precipitato giallo di acido lapacico impuro, il quale disseccato all'aria ed al sole, corrisponde all'8 $^0/_0$ all'incirca del peso della segatura impiegata.

Il Siewert, per purificare l'acido lapacico, ricorre ad una seconda soluzione nel carbonato sodico e successiva precipitazione con acido cloridrico, e quindi alla cristallizzazione dall'alcool bollente. Questo metodo mi è però sembrato difettoso, giacchè l'acido lapacico grezzo contiene una sostanza resinosa rosso-bruna, solubile sia nel carbonato sodico sia nell'alcool, e che difficilmente si riesce a separare per cristallizzazioni da tale solvente. La purificazione riesce molto meglio e più facilmente ricorrendo all'etere o alla benzina, nei quali la sostanza bruna amorfa è del tutto insolubile. Ordinariamente ho operato nel modo seguente: l'acido lapacico grezzo si mette per porzioni di 500 grammi, in un apparecchio a spossamento e si tratta con etere sino a che questo rifluisca incoloro; la sostanza cristallina gialla trasportata dall'etere si getta sopra un filtro, si lava con altro poco etere, si spreme fortemente fra carte, si polverizza e si cristallizza finalmente dalla benzina avendo cura di non farne soluzioni troppo concentrate a caldo, per impedire che si rapprendono subito in massa appena cominciano a raffreddarsi, rendendo impossibile la filtrazione. — Operando nel modo descritto, da 500 grammi di prodotto grezzo, non si ottengono mai più di 180 a 200 grammi di acido lapacico purificato, sicchè, secondo le mie esperienze, la quantità di acido lapacico puro che può estrarsi dal legno ascende, al massimo, al 5 $^0/_0$. Il Siewert dice di avere ottenuto il 7,5 $^0/_0$ di materia pura cristallizzata, ma io credo che l'acido da lui preparato contenesse ancora della materia bruna resinosa. Del resto la differenza tra le quantità relative di prodotto da noi ottenute, può anche essere dovuta a differenze nella provenienza, e forse anche nella varietà, del legno di *Lapacho*.

L'acido lapacico puro cristallizza dall'etere e dalla benzina in piccoli prismi ben definiti, dall'alcool in sottili laminette, di un bel color giallo canarino. La forma dei suoi cristalli, determinata dall'egregio dott. Panebianco, è monoclina [1]. È solubilissimo nell'alcool bollente; nella benzina, a caldo, si scioglie in grandissima copia,

[1] Gazz. chim. italiana, t. X, p. 80.

a freddo, molto meno; nell'etere è meno solubile che nelle due precedenti sostanze: si scioglie pure considerevolmente nel cloroformio, nell'acido acetico e nella sua anidride; è pure un poco solubile nella glicerina calda e pel raffreddamento si separa in sottilissimi aghi. Riscaldato con acqua, in tubi chiusi a 150°, sembra che vi si sciolga in una certa proporzione e che pel raffreddamento si deponga cristallizzato in bei prismi, nelle condizioni ordinarie può dirsi insolubili anche nell'acqua bollente.

Si fonde a 138°. Riscaldato a più alta temperatura si decompone lasciando un abbondante residuo carbonoso; però in piccola quantità ed in una corrente gassosa può sublimarsi parzialmente in piccoli aghi.

L'acido lapacico è facilmente solubile nelle soluzioni degli idrati alcalini e di quelli alcalino-terrosi, nell'ammoniaca e nei carbonati alcalini, dando delle soluzioni colorate in rosso vivo più o meno intenso; in presenza dell'acqua sposta anche l'acido carbonico dai carbonati di calcio, bario e stronzio. La soluzione ammoniacale è precipitata dalla più gran parte delle soluzioni metalliche. Per lunga ebollizione si scioglie parzialmente nell'acido cloridrico concentrato; negli acidi solforico e nitrico concentrati si scioglie invece facilmente a freddo dando soluzioni di un bel rosso di sangue, dalle quali l'acqua precipita una sostanza rosso-arancio, che non è più acido lapacico, e che sarà in seguito studiata.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,4099 di sostanza diedero gr. 1,119 di anidride carbonica a gr. 0,2145 di acqua;
II. gr. 0,2927 di sostanza diedero gr. 0,803 di anidride carbonica e gr. 0,1555 di acqua;
III. gr. 0,2755 di sostanza diedero gr. 0,7498 di anidride carbonica e gr. 0,146 di acqua;
IV. gr. 0,2981 di sostanza diedero gr. 0,7168 di anidride carbonica e gr. 0,1557 di acqua.

Ossia, deducendo la composizione centesimale:

	I.	II.	III.	IV.
Carbonico. . . .	75,45	74,82	74,22	74,58
Idrogeno	5,81	5,90	5,88	5,80

La sostanza essendo, come mi sono assicurato, priva di azoto, la formola che meglio si accordi coi precedenti risultati è quella $C_{15} H_{14} O_3$, per la quale si calcola:

Carbonio	75,38
Idrogeno	5,78

Come vedremo in seguito anche a questa formola conducono le analisi dei sali dell'acido lapacico. Giova intanto notare fin da ora che la composizione elementare da me trovata differisce notevolmente da quella del Siewert, il quale pel suo acido lapacico rinvenne:

Carbonio.	76,16
Idrogeno	7,06

Le mie analisi differiscono pure, ma in senso opposto, da quelle dell'acido taiguico di Arnoudon (¹), il quale ottenne:

Carbonio	70,9
Idrogeno	5,9

(¹) Nuovo Cimento, t. VII, p. 37, 1858.

Esse si accordano invece, da un lato con quella dell'acido lapaconico del Siewert, che diede:

Carbonio 74,00
Idrogeno 6,18

e ancor meglio poi con le analisi della groenhartina di Stein (1), considerata come identica all'acido taiguico, e per la quale fu ottenuto in media:

Carbonio 74,64
Idrogeno 5,32

Del resto ritorneremo in seguito su questo punto e mostreremo che nonostante queste discrepanze, tutto conduce alla conclusione che acido taiguico, groenhartina ed acido lapacico siano una medesima ed unica sostanza.

Lapaciato sodico: $C_{15} H_{13} O_3 Na + 5H_2 O$. L'acido lapacico, come sappiamo, si scioglie facilmente nelle soluzioni di carbonato sodico colorandosi in rosso intenso. Per la preparazione del lapaciato sodico ho riscaldato una soluzione di bicarbonato sodico puro con un eccesso di acido lapacico; la soluzione filtrata e concentrata a b. m. si rapprende pel raffreddamento in una massa cristallina radiata di color rosso cupo e dell'apparenza e splendore del velluto; col tempo perde la struttura cristallina ed il suo colore diventa tanto oscuro da sembrar nero. Questo sale è idrato e si fonde nella sua acqua di cristallizzazione ad una temperatura di poco superiore ai 50°, formando uno strato oleoso rosso oscuro che si raccoglie sotto uno strato di acqua che viene a galleggiare; pel raffreddamento si riprende in massa cristallina.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 1,1177 di sale, asciugato sopra carta all'aria libera, per lo scaldamento a 130°, in una corrente d'aria secca, perdettero gr. 0,2791 di acqua;
II. gr. 0,2996 di sale idrato fornirono gr. 0,0697 di solfato sodico;
III. gr. 0,2539 di sale idrato fornirono gr. 0,0491 di solfato sodico;
IV. gr. 0,2424 di sale fornirono gr. 0,049 di solfato sodico.

Deducendo da questi risultati la composizione centesimale si ha:

	I.	II.	III.	IV.
Acqua	24,97	—	—	—
Sodio	—	6,82	6,26	6,51

Risultati questi che si accordano con la formola $C_{15} H_{13} O_3 Na + 5H_2 O$, per la quale si calcola:

Acqua 25,42
Sodio 6,49

Per la solubilità ho trovato che:

gr. 3,5783 di soluzione, satura a 24°, lasciarono un residuo secco di gr. 0,4703; cioè 100 parti di acqua, sciolgono 24°,

p. 15,13 di sale sodico anidro.

Il lapaciato di sodio è pure solubile nell'alcool, ma in minor proporzione.

Lapaciato potassico: $C_{15} H_{13} O_3 K$. Il sale potassico si può preparare scaldando una soluzione acquosa di carbonato potassico con un eccesso di acido lapacico,

(1) Journal fuer Praktische Chemie, t. 99, p. 3, 1866.

svaporando, riprendendo il residuo con alcool concentrato, tornando a svaporare la soluzione e cristallizzandolo finalmente dall'acqua bollente; o pure, facendo bollire una soluzione alcoolica di acido lapacico con carbonato potassico polverizzato, filtrando, svaporando e cristallizzando il residuo dall'acqua bollente.

Allo stato secco costituisce una massa cristallina di color rosso cupo, tanto oscuro che sembra grigio o nero; le sue soluzioni acquosa ed alcoolica sono invece decisamente rosse.

All'analisi ha dato i risultati seguenti:

I. gr. 0,2424 fornirono gr. 0,)78 di solfato potassico;

II. gr. 0,2117 fornirono gr. 0,0661 di solfato potassico.

Cioè in 100:

	I.	II.
Potassio.	14,43	14,62
mentre si calcola:		
Potassio	13,93	—

Questo sale non contiene acqua di cristallizzazione.

Per la solubilità ho trovato, che:

gr. 7,436 di soluzione, satura a 24°, lasciarono un residuo secco del peso di gr. 1,857 onde si calcola che 100 p. di acqua sciolgono a 24°:

p. 33,28 di lapaciato potassico.

Lapaciato ammonico: $C_{15} H_{13} O_3 . Az H_4$. L'acido lapacico si scioglie, con la più grande facilità, nell'ammoniaca generando una soluzione di un bel colore rosso sanguigno, la quale, se concentrata e preparata a caldo, depone pel raffreddamento il sale ammonico sotto forma di aghi abbastanza grossi e ben definiti, di color rosso mattone. Questo sale, esposto all' aria, perde facilmente l' ammoniaca e dopo pochi giorni si trasforma completamente in acido lapacico. Per averlo quindi secco, bisogna o asciugarlo rapidamente fra carta o abbandonarlo, in un' atmosfera di ammoniaca. sotto una campana di cristallo in presenza di calce viva. Anche la sua soluzione, bollita, perde facilmente ammoniaca ricoprendosi di cristallini di acido lapacico libero.

Essendo assai difficile di avere questo sale che soddisfi alla doppia condizione di essere secco e non decomposto, le sue analisi presentano delle incertezze. Ecco pur tuttavia i risultati ottenuti:

I. gr. 0,434 del sale ammonico furono messi in sospensione nell'acqua, fu aggiunto un eccesso di acido cloridrico, si filtrò, si lavò bene, ed alla soluzione si aggiunse cloruro platinico; si svaporò a b. m. si riprese il residuo con alcool assoluto, ed il cloroplatinato ottenuto raccolto sopra un filtro e disseccato però gr. 0,4395;

II. gr. 0,4395 di cloroplatinato (quello stesso precedentemente ottenuto) per la calcinazione lasciarono un residuo di platino del peso di gr. 0,1942;

III. gr. 0,597 di sale furono scaldati con calce sodata, secondo il metodo di Varrentrapp e Will, l'ammoniaca fu trasformata in cloroplatinato, e questo per la calcinazione lasciò un residuo di platino del peso gr. 0,2121.

Da questi dati si calcola che 100 parti di sale ammonico contenevano:

	I.	II.	III.
Ammoniaca ($N H_3$) . . .	7,70	7,68	6,10

La teoria per la formola $C_{15} H_{13} O_3 . NH_4$ del sale anidro richiede 6,95 % di $N H_3$ e per quella $C_{15} H_{13} O . NH_4 + H_2O$ il 6,49 %. Osservando intanto che il sale dell'analisi I e II era stato disseccato in un'atmosfera di ammoniaca, e quello della III era stato invece asciugato fra carte e per l'esposizione all'aria, e che perciò nel primo caso doveva prevedersi un eccesso di ammoniaca, e nel secondo una perdita, io credo che i risultati ottenuti debbono condurre a supporre che il sale ammoniaco, sia come quello potassico, anidro.

Il Siewert nel suo lavoro dice che trattando questo sale con anidride solforosa si formava una sostanza ch' egli non esaminò, ma che fa supporre sia diversa dall'acido lapacico. Ho ripetuto questa esperienza sia versando una soluzione di anidride solforosa nella soluzione di lapaciato ammonico, sia facendo passare una corrente di anidride solforosa secca sopra il sale anch'esso secco; nell'uno e nell'altro caso ho constatato che si mette in libertà l'acido lapacico, il quale non subisce ulteriore trasformazione. Ho soltanto notato che nell'ultimo caso l'acido lapacico assume un colorito rosso arancio, assai persistente e che non sono riuscito a fargli perdere sciogliendolo nel carbonato sodico e riprecipitandolo con acido cloridrico: del resto il dott. Panebianco mi ha assicurato che anche cristallograficamente è identico all'acido lapacico.

Lapaciato di argento: $C_{15} H_{13} O_3 Ag$. Questo sale si precipita sotto forma di una polvere amorfa, di un magnifico colore rosso scarlatto, aggiungendo del nitrato di argento ad una soluzione del sale ammonico. Raccolto sopra di un filtro, allo stato umido è molto voluminoso, ma perdendo l'acqua si contrae notevolmente. Disseccato nel vuoto, in presenza di acido solforico, è anidro come mostrano le seguenti analisi:

I. gr. 0,305 di lapaciato di argento fornirono gr. 0,5282 di anidride carbonica, e gr. 0,1158 di acqua;

II. gr. 0,410 fornirono gr. 0,1262 di argento;

III. gr. 0,2242 fornirono gr. 0,0694 di argento.

Cioè in 100 parti:

	I.	II.	III.
Carbonio	51,28	—	—
Idrogeno	3,81	—	—
Argento	—	30,78	30,95

mentre per la formola $C_{15} H_{13} O_3 Ag$ si calcola:

Carbonio	51,57
Idrogeno	3,72
Argento	30,95

Questo sale riscaldato a 100° in una stufa a b. m. si altera profondamente, subendo un parziale rammollimento e trasformandosi in una massa verde bruna, la quale trattata con alcool od etere cede al solvente un miscuglio di acido lapacico e di una sostanza polverosa amorfa di un bel colore rosso, che probabilmente è un prodotto di ossidazione. Questa nuova sostanza si separa facilmente dall'acido lapacico per mezzo della soluzione del carbonato sodico, in cui è insolubile. Non è stata pel momento studiata.

Partendo da gr. 8,3388 di lapaciato di argento secco dopo 2 ore di scaldamento a 100° si aveva avuto una perdita di gr. 0,1454, ed il sale così alterato dopo trattamento con alcool ed etere conteneva dal 65,14 al 67,34 % di argento; non sembra però che contenesse argento libero.

Lapaciato di calcio: $(C_{15} H_{13} O_3)_2 Ca + H_2O$. Fu preparato mischiando soluzioni di lapaciato ammonico e di cloruro calcico; si ottiene sotto forma di un precipitato amorfo color rosso mattone, pochissimo solubile, e che per lo scaldamento in seno all'acqua stessa si trasforma in una polvere granulosa bruna, senza però subire alcuna alterazione nella composizione. Ecco in conferma i risultati delle analisi:

I. gr. 1,523 di sale per lo scaldamento in una corrente di aria secca a 100-105° perdettero gr. 0,0875 di acqua;
II. gr. 1,434 del sale per lo scaldamento a 110° perdettero gr. 0,083 di acqua;
III. gr. 0,2936 del sale per lo scaldamento a 110° perdettero gr. 0,0162 di acqua;
IV. gr. 0,8688 del sale per lo scaldamento a 110° perdettero gr. 0,0496 di acqua;
V. gr. 0,4843 di sale secco fornirono gr. 0,1031 di solfato calcico;
VI. gr. 0,5718 di sale secco fornirono gr. 0,1462 di solfato calcico;
VII. gr. 0,2455 di sale idrato fornirono gr. 0,0539 di solfato calcico.

Da questi dati si calcola:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.
Acqua.	5,74	5,78	5,51	5,80	—	—	—
Calcio (nel sale anidro)	—	—	—	—	7,37	7,52	—
Calcio (nel sale idrato)	—	—	—	—	—	—	6,45

Questi risultati conducono alla formola di un sale con 2 mol. o con 1 e ½ mol. di acqua di cristallizzazione, per le quali si calcola:

	con 2 H_2O	con 1 ½ H_2O
Acqua	6.45	4,91
Calcio nel sale anidro.	7,62	7,62
Calcio nel sale idrato.	7,13	7,28

Io inclino a supporre che il sale contenga 1 ½ mol. di acqua, per analogia col sale stronzico che sarà in seguito descritto.

In quanto alla solubilità due determinazioni mi hanno dato i seguenti risultati:

I. gr. 13,307 di soluzione, satura a 24°, lasciarono un residuo secco del peso di gr. 0,0295;
II. gr. 7,2096 di soluzione satura, alla medesima temperatura, lasciarono un residuo del peso di gr. 0,0163. Cioè 100 parti di acqua, sciolgono a 24°, parti:

0,222 a 0,226 di lapaciato calcico secco.

Lapaciato baritico: $(C_{15} H_{13} O_3)_2 Ba + 7 H_2O$. Questo sale può prepararsi facendo bollire acido lapacico e carbonato baritico in presenza di molta acqua, filtrando a caldo e lasciando cristallizzare per raffreddamento, o pure precipitando, con cloruro baritico, la soluzione concentrata del sale ammonico, raccogliendo il precipitato, lavandolo bene con acqua fredda, e cristallizzandolo un paio di volte dall'acqua bollente. Il lapaciato baritico è pochissimo solubile nell'acqua fredda, in quella calda si scioglie mediocremente e pel raffreddamento si depone in lunghi aghi sottilissimi

e filiformi, che al colore, alla maniera colla quale si rapprendono e al tutto insieme ci avvicinano al coagulo sanguigno. All'analisi ha fornito i risultati seguenti:

I. gr. 0,7682 di sale perdettero per lo scaldamento a 115°, in una corrente d'aria secca gr. 0,1508 di acqua;
II. gr. 0,918 di sale perdettero per lo scaldamento a 120° gr. 0,1662 di acqua;
III. gr. 0,5977 di sale perdettero gr. 0,1106 di acqua;
IV. gr. 0,7755 » » gr. 0,1383 »
V. gr. 0,696 » » gr. 0,1258 »
VI. gr. 1,093 » » gr. 3,1813 »
VII. gr. 0,3005 di sale secco fornirono gr. 0,1075 di solfato di bario;
VIII. gr. 0,1515 di sale fornirono gr. 0,0535 di solfato baritico;
IX. gr. 0,465 di sale secco fornirono gr. 0,1685 di solfato baritico;
X. gr. 0,259 di sale fornirono gr. 0,0947 di solfato baritico;
XI. gr. 0,2265 » » gr. 0,0841 »

Cioè in 100 parti:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.
Acqua .	19,63	18,10	18,50	17,83	18,07	18,07	—	—	—	—	—
Bario. .	—	—	—	—	—	—	21,03	20,76	21,3	21,49	21,81

Considerando che questo sale perde difficilmente le ultime tracce di acqua di cristallizzazione e che, nonostante che sia più stabile del corrispondento sale calcico, purtuttavia per protratto scaldamento, anche a 110°, si altera trasformandosi in una polvere bruna; io, credo poter dedurre dalle analisi superiormente riportate che al lapaciato baritico spetti la formola $(C_{15} H_{13} O_3)$, Ba ⊹ 7 H_2O, per la quale si calcola:

Acqua . . . . 1[illegible],53
Bario 22,13

spiegando la deficienza nel bario trovato con la supposizione che il sale non era completamente secco. A conferma di questo modo di vedere debbo dire che le determinazioni per le quali ho avuto, pel bario, numeri più alti corrispondono a quelle porzioni di sale che furono più lungamente disseccate. Debbo pure accennare che la grande copia di acqua rinvenuta in questo sale mi fece in principio sospettare che potesse contenere dell'acqua interposta; ma il dubbio fu rimosso, dacchè alcune delle precedenti determinazioni furono fatte dopo aver lasciato il sale esposto per ben due mesi all'aria libera sopra carta sugante.

Per la solubilità furono ottenuti i seguenti risultati:

I. gr. 28,2747 di soluzione, satura a 27°,3, lasciarono un residuo secco del peso di gr. 0,067;
II. gr. 14,4862 di soluzione, satura a 26°,3, lasciarono un residuo del peso di gr. 0,0339;
III. gr. 14,8255 di soluzione, satura a 25°,2, lasciarono un residuo di gr. 0,0348.

Da questi risultati si calcola che 100 parti di acqua sciolgono, alle indicate temperature:

I.	II.	III.	
0,237	0,234	0,235	parti

di lapaciato baritico anidro.

Lapaciato di stronzio: $(C_{15}\,H_{13}\,O_3)_2\,St + 1\frac{1}{2}\,H_2O$. Questo sale fu ottenuto per doppio scambio fra il lapaciato ammonico ed il cloruro di stronzio. Costituisce un precipitato rosso bruno, che, disseccato, assume un colore molto oscuro tendente al violetto. Non si riesce a cristallizzarlo dall'acqua bollente ed in generale si avvicina molto più al sale calcico, che a quello baritico.

All'analisi ha dato i risultati seguenti:

I. gr. 1,3131 di sale per lo scaldamento a 100° perdettero gr. 0,0641 di acqua;
II. gr. 0,718 di sale, scaldato a 100-105°, perdettero gr. 0,0349 di acqua;
III. gr. 0,2975 di sale disseccato (I) fornirono gr. 0,0765 di solfato stronzico;
IV. gr. 0 2144 del sale idrato fornirono gr. 0,0545 di solfato stronzico.

Da questi dati si calcola:

	I.	II.	III.	IV.
Acqua	4,88	4,87	—	—
Stronzio	—	—	12,20	12,08

Questi risultati conducono ad ammettere che il sale stronzico cristallizzi con $1\frac{1}{2}$ mol. di acqua. Infatti per una sola formola si calcola:

Stronzio 11,84
Acqua 4,52

Lapaciato di piombo: $(C_{15}\,H_{13}\,O_3)_2$ Pb. Si precipita sotto forma di una polvere rosso arancione aggiungendo acetato di piombo ad una soluzione di lapaciato potassico puro. È quasi insolubile nell'acqua; nell'alcool bollente si scioglie in certa quantità e pel raffreddamento cristallizza in piccoli aghi piatti di color rosso bruno. Tanto il sale precipitato, quanto quello cristallizzato dall'alcool non perdono di peso per lo scaldamento a 150°. Due determinazioni di piombo hanno confermato ch'esso è anidro. Infatti:

I. gr. 0,2101 di sale fornirono gr. 0,0922 di solfato piombico:
II. gr. 0,2907 di sale fornirono gr. 0,1263 di solfato piombico.

Cioè per 100:

	I.	II.
Piombo	29,98	29,68

mentre per la formola del lapaciato piombico si calcola:

Piombo . . . . 30,14 %.

Lapaciato di anilina: $C_{15}\,H_{14}\,O_3\,.\,C_6\,H_5\,.\,NH_2$. Come è noto Liebermann [1] cercando d'interpretare la trasformazione dell'αnaftochinonanilide nell'anilide del β naftochinone, ha trovato che l'ossinaftochinone bollito con acetato di anilina ed acido acetico si trasformava anch'esso nell'anilide indicata. Or, risultando dalle esperienze, che saranno in seguito esposte, che l'acido lapacico è l'ossichinone di un omologo della naftalina, ho tentato di prepararne il corrispondente anilide col processo di Liebermann, ed ho perciò fatto bollire, per un certo tempo, un miscuglio di acido lapacico ed anilina con un eccesso di acido acetico cristallizzabile; pel raffreddamento ho ottenuto una sostanza, la quale però invece di essere l'anilide aspettata, come mi ha mostrato l'analisi, è semplicemente il sale di anilina dell'acido lapacico.

(1) Berichte ecc. t. XIV, p. 1664, 1881.

Il lapaciato di anilina cristallizza dall'alcool bollente in piccoli aghi prismatici, di color giallo arancio, fusibili a 121-122°. All'analisi ha dato:

I. gr. 0,2601 di sostanza fornirono gr. 0,719 di anidride carbonica e gr. 0,14 di acqua;
II. gr. 0,2676 di sostanza fornirono gr. 0,737 di anidride carbonica e gr. 0,1488 di acqua.

Cioè per 100:

	I.	II.
Carbonio	75,39	75,11
Idrogeno	5,98	6,18

mentre per la formola $C_{15} H_{14} O_3 . C_6 H_7 N$ si calcola:

Carbonio	75,22
Idrogeno	6,24

Lapaciato di p. toluidina: $C_{15} H_{14} O_3 . C_6 H_4 . CH_3 . NH_2$. Si prepara in modo simile al sale di anilina, e si presenta in laminette di color giallo aranciato fusibili a 129,5-130°.

All' analisi ha dato i seguenti risultati:

gr. 0,2481 fornirono gr. 0,6780 di anidride carbonica e gr. 0,1366 di acqua.

Cioè per $^0/_0$:

Carbonio	74,53
Idrogeno	6,11

Per la formola si calcola:

Carbonio	75,63
Idrogeno	6,59

Lapaciato di o. toluidina. Si prepara come il suo isomero e si presenta in belle laminette gialle fusibili a 135°. All' analisi ha dato:

gr. 0,2852 di sostanza fornirono gr. 0,7821 di anidride carbonica e gr. 0,1564 di acqua.

Cioè per $^0/_0$:

Carbonio	74,78
Idrogeno	6,09

3. Azione del bromo.

Siewert non ha studiato l'azione del bromo sull'acido lapacico; Arnoudon, relativamente all'acido taiguico, dice soltanto che si fonde nel bromo, ma non ha cercato d' isolare ed analizzare il prodotto della reazione; Stein invece (l. c.) facendo gocciolare il bromo sulla groenhartina sospesa in acqua, ha ottenuto un prodotto, contenente in media il 37,46 $^0/_0$ di bromo, che rappresenta con la formola $C_{30} H_{28} O_9 Br_4 = C_{30} H_{22} Br_4 O_6 + 3H_2O$. Io non sono riuscito ad avere il composto di Stein, ma ho invece ottenuto un derivato monobromurato dell'acido lapacico corrispondente alla formola: $C_{15} H_{13} Br O_3$.

Il metodo migliore al quale, dopo parecchi tentativi, mi sono fermato per la preparazione di questo composto, consiste nello sciogliere per leggiero scaldamento gr. 50 di acido lapacico (p. m. = 242) in gr. 400 di acido acetico e nella soluzione tiepida versare rapidamente gr. 35 di bromo, diluito in un egual peso di acido acetico; poscia si versa la soluzione giallo-bruna che si forma in una grande quantità di acqua; si ottiene così un abbondante precipitato fioccoso di color giallo arancio,

che costituisce il derivato bromurato e che si purifica facilmente. Se nella preparazione di questo composto si fa giocciolare il bromo lentamente, o si scalda durante l'azione del bromo, o altrimenti si lascia raffreddare la soluzione acetica prima di precipitarla con acqua, allora non solo il rendimento del prodotto bromurato diminuisce notevolmente, ma la operazione può andare del tutto perduta, perchè si forma in gran copia una sostanza vischiosa che impedisce la purificazione e cristallizzazione del prodotto.

Avendo osservato che durante l'azione del bromo sulla soluzione acetica di acido lapacico non si svolgevano vapori di acido bromidrico, ho voluto assicurarmi se esso rimaneva disciolto nell'acido acetico o se invece l'acido lapacico si sommava al bromo direttamente. A questo scopo, in una operazione nella quale avevo impiegato per 25 grammi di acido lapacico circa 20 grammi di bromo, dopo avere precipitato con acqua, ho raccolto e misurato il liquido separato dal precipitato, e trattandone una piccola porzione con nitrato di argento ho determinato l'acido bromidrico che conteneva. Il liquido misurava c. c. 1370 e di esso c. c. 15 mi fornirono gr. 0,2485 di bromuro di argento, corrispondenti a gr. 0,1507 di bromo: si calcola in conseguenza che i c. c. 1370 del liquido contenevano in soluzione, sotto forma di acido bromidrico, gr. 9,65 di bromo. Da ciò si deduce che il bromo agì come sostituente e non addizionandosi all'acido lapacico, come del resto risulta dalla composizione e dalle proprietà del prodotto.

Per purificare l'acido lapacico bromurato si raccoglie sopra un filtro il precipitato giallo arancio, sopra indicato, si dissecca sopra carta, si lava con etere per eliminare un poco di sostanza vischiosa che l'accompagna sempre, e finalmente si cristallizza un pajo di volte dall'alcool bollente.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,7855 di sostanza diedero gr. 0,5828 di anidride carbonica e gr. 0,1065 di acqua;
II. gr. 0,4245 di sostanza diedero gr. 2481 di bromuro di argento;
III. gr. 0,350 di sostanza diedero gr. 0,2092 di bromuro di argento;
IV. gr. 0,4342 di sostanza fornirono gr. 0,2424 di bromuro di argento;
V. gr. 0,3812 di sostanza fornirono gr. 0,226 di bromuro di argento.

Da questi numeri si calcola:

	I.	II.	III.	IV.	V.
Carbonio . . .	55,67	—	—	—	—
Idrogeno . . .	4,14	—	—	—	—
Bromo . . .	—	24,86	25,42	24,37	25,22

La teorca per la formola $C_{15} H_{13} Br O_3$ richiede:

Carbonio	56,07
Idrogeno	4,04
Bromo	24,92

L'*acido lapacico monobromurato*, pel raffreddamento della sua soluzione alcoolica bollente, cristallizza in magnifiche laminette di un bel colore rosso arancio di lucentezza vitrea, leggerissime e friabili. Si fonde a 139-140° in un liquido bruno e si decompone a più alta temperatura, svolgendo del bromo e lasciando un abbondante residuo carbonoso. È solubilissimo nell'alcool bollente, molto meno in quello

freddo; nell'etere freddo si scioglie pochissimo; è solubile nell'acido acetico, nella benzina ecc.

Questo composto non ha più i caratteri di un acido. Infatti esso non solo non isposta, come l'acido lapacico, l'acido carbonico dai carbonati alcalini e dagli alcalino-terrosi, ma a freddo non si scioglie menomamente nella soluzione d'idrato potassico: riscaldando vi si scioglie lentamente dando una soluzione rossa. È pure insolubile, a freddo, nell'ammoniaca acquosa.

Nell'acido nitrico ordinario si scioglie facilmente dando una soluzione di color rosso intenso, dalla quale l'acqua precipita il prodotto inalterato, fusibile a 138-140°; se però si scalda all'ebollizione allora cominciano a svolgersi vapori rutilanti, la soluzione va mano mano scolorandosi e diventa gialla, e l'acido nitrico svaporato lascia un residuo, il quale cristallizzato dall'acqua bollente ho riconosciuto per acido ftalico, che per maggiore conferma ho trasformato in anidride. Sotto questo riguardo, come risulta dalle esperienze che saranno in seguito esposte, l'acido bromolapacico si comporta come l'acido lapacico stesso; soltanto l'ossidazione avviene più difficilmente, perchè oltrecchè essa non comincia che all'ebollizione, ho potuto osservare che anche dopo aver fatto bollire per $^1/_4$ d'ora gr. 10 di acido bromolapacico con gr. 50 di acido nitricc concentrato, aggiungendo acqua si precipitò ancora una buona porzione (circa 2 grammi) di sostanza insolubile. Come vedremo nel caso dell'acido lapacico l'ossidazione avviene più facilmente e più completamente.

Anche all'azione dell'acido solforico, l'acido bromolapacico, resiste bene. A freddo vi si scioglie dando una soluzione rosso-bruno intenso, la quale scaldata per circa $^1/_4$ d'ora a b. m. sino a che cominciava a sentirsi l'adore dell'anidride solforosa e lasciata raffreddare, per l'aggiunzione di acqua, precipita il prodotto inalterato, che ho riconosciuto, dopo averlo cristallizzato dall'alcool, al punto di fusione ed al tenore in bromo. Infatti:

gr. 0,140 di sostanza fornirono gr. 0,0793 di bromuro di argento, cioè:

	Trovato	Teoria
Bromo	24,14	24,92

Un altro fatto, non meno importante, si osserva nell'azione della potassa alcoolica. Ho trattato 10 grammi di acido bromolapacico con 30 gr. d'idrato potassico disciolto in 100 gr. di alcool assoluto; esso vi si scioglie immediatamente dando una soluzione di color giallo-bruno tanto intenso da sembrare opaca; dopo 10 minuti ho diluito con acqua od ho aggiunto acido cloridrico; si forma così un precipitato nero, il quale raccolto e cristallizzato dall'alcool, in presenza di carbone animale, ha fornito il derivato bromurato inalterato:

gr. 0,2498 del prodotto diedero infatti gr. 0,1398 di bromuro di argento, cioè:

Bromo $^0/_0$ 23,71

Similmente aggiungendo anilina ad una soluzione alcoolica di acido lapacico monobromurato e riscaldando a b. m. si ottiene una soluzione rosso-bruna, che trattata con acqua ed acido cloridrico precipita il derivato inalterato.

Riscaldandolo con ammoniaca alcoolica a 100°, in tubi chiusi, l'acido bromolapacico si decompone fornendo a quanto sembra del bromuro ammonico. Scaldato

con acetato di argento a 150° pende pure il bromo sotto forma di bromuro di argento. Però non ho ancora esaminato i prodotti di queste reazioni.

Una trasformazione assai importante subisce l'acido lapacico monobromurato quando lo si scalda con anidride acetica ed acetato sodico. Alla ebollizione, il miscuglio, si colora in un bel verde smeraldo assai intenso, colore che si mantiene anche dopo $^1/_4$ d'ora e più di riscaldamento. Diluendo allora con acqua si precipita una sostanza vischiosa bruna, la quale separata dalla soluzione acquosa, lavata con acqua, disseccata alla meglio e trattata con etere, cede a questo una resina verde, e lascia indisciolta una sostanza cristallizzata in magnifiche laminette, di splendore affatto metallico e di color rosso di rame un poco oscuro, le quali però esaminate al microscopio per trasparenza sembrano gialle; questa sostanza polverizzata, o strofinata sopra carta o con una bacchetta di vetro assume un colore azzurro come riflesso violaceo come l'indaco. Essa è insolubile, o quasi, nell'acqua, nell'alcool, nell'etere, nell'acido acetico, nell'anidride acetica, nella benzina ecc.; fra i solventi neutri, che abbia fin ora provato, si scioglie nel solo solfuro di carbonio dando una soluzione di un magnifico colore azzurro-verdastro. Dalla potassa ed in generale dalle sostanze alcaline non è alterata; nell'acido solforico si scioglie dando una soluzione rossa che diluita passa al verde; con l'acido nitrico dà una soluzione rossa, dalla quale l'acqua precipita una sostanza fioccosa gialla solubile nell'etere. Come vedremo questa medesima sostanza si forma più facilmente da un altro derivato dell'acido lapacico, che sarà in seguito descritto sotto il nome di *lapacone*.

Debbo infine accennare che ho pure sommariamente esaminato l'azione del cloro sull'acido lapacico. A questo scopo ho sciolto gr. 25 di acido lapacico in gr. 200 di acido acetico, e scaldando a b. m. vi feci passare una corrente di cloro sino a rifiuto (circa 4 ore); diluendo con acqua si precipita un olio pesante leggermente giallastro che prende la consistenza del miele, ma dal quale non sono riuscito ad avere un prodotto cristallizzato.

4. Derivati acetilici.

L'acido lapacico si scioglie mediocremente nel cloruro di acetile bollente e si depone pel raffreddamento in grossi cristalli ben definiti; però, anche dopo parecchie ore di ebollizione, non viene alterato se si toglie che una piccola quantità se ne resinifica. Si scioglie pure nell'anidride acetica bollente e cristallizza inalterato pel raffreddamento. Si riesce ad avere derivati acetilici dell'acido lapacico, riscaldandolo con un eccesso di anidride acetica a 150° in tubi chiusi, o pure per l'azione dell'anidride acetica e dell'acetato sodico in un apparecchio a riflusso; in quest'ultimo caso variando la durata dello scaldamento si hanno prodotti diversi.

Derivato monoacetilico: $C_{15}\ H_{13}\ O_3 . C_2\ H_3\ O$. Si forma questo composto riscaldando in tubi chiusi a 150°, per la durata di 3 ore, l'acido lapacico con un eccesso di anidride acetica; si ottiene una soluzione rosso-bruna dalla quale si precipita con acqua il derivato acetilico, che si purifica poi per cristallizzazione dall'alcool bollente. Però un processo più rapido, che fornisce più facilmente un prodotto puro, e che permette di preparare in tempo brevissimo quella quantità che si desidera di questo derivato, consiste nello scaldare un miscuglio di 2 p. di acido lapacico, 2 p. di

acetato sodico e 5 p. di anidride acetica. Per lo scaldamento questo miscuglio si colora rapidamente ed in pochi istanti, la soluzione che va formandosi assume una tinta di color rosso di vino, che continuando a riscaldare svanisce nuovamente passando al giallo bruno, e poi mano mano al verde. Questi mutamenti di colore sono costanti ed avvengono prima che avvenga l'ebollizione. Per ottenere il derivato monoacetilico bisogna sospendere lo scaldamento appena comincia a manifestarsi la colorazione verde, cioè ordinariamente dopo 3 o 4 minuti di riscaldamento, ed in ogni modo sempre prima che il liquido entri in ebollizione. Aggiungendo allora acqua, si separa un olio pesante, mobile, di color giallo bruno, che si rapprende ben tosto in una bella massa cristallina. Essa costituisce il derivato monoacetilico dell'acido lapacico quasi puro, e non resta che a cristallizzarla un paio di volte dall'alcool bollente. La quantità che se ne ottiene è quasi teorica; in una operazione nella quale adoperai gr. 100 di acido lapacico ricavai più di 90 grammi di questo derivato, cristallizzato due volte dall'alcool e del tutto puro.

L'acido lapacico monoacetilato cristallizza dall'alcool in bei prismi corti e friabili, di color giallo di solfo, e di splendore vitreo. È insolubile nell'acqua, molto solubile nell'etere e nell'alcool bollente, assai meno nell'alcool freddo; si scioglie pure nella benzina, nel cloroformio, nell'acido acetico ecc. ecc. Si fonde a 82-83° in un liquido giallo trasparente e mobilissimo che pel raffreddamento si rapprende in massa cristallina.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

gr. 0,3178 di sostanza diedero gr. 0,3328 di anidride carbonica e gr. 0,1658 di acqua, cioè in 100 parti:

Carbonio	71,49
Idrogeno	5,79

mentre per la formola $C_{15} H_{13} O_3 . C_2 H_3 O$ si calcola:

Carbonio	71,83
Idrogeno	5,63

Questo composto riscaldato in tubi chiusi con un eccesso di anidride acetica non viene ulteriormente acetilato, ma rimane in gran parte inalterato ed in parte si trasforma in una resina solubile, con color verde, nell'anidride acetica, nell'alcool, nell'etere. Scaldato con acqua, a 120°, non viene nemmeno scomposto. Si scioglie facilmente, agitandolo a freddo, nella soluzione alcoolica d'ammoniaca colorandosi in rosso intenso e per l'aggiunta di acido cloridrico dà un abbondante precipitato giallo, che raccolto e cristallizato dall'alcool fu riconosciuto, al punto di fusione ed agli altri caratteri, per acido lapacico.

Ho pure studiato l'azione del bromo e nell'acido nitrico su questo derivato acetilico. Ecco i risultati ottenuti.

Alla soluzione di gr. 10 di questo composto in gr. 50 di acido acetico fu aggiunto, riscaldando a b. m. grammi 10 di bromo, ed il liquido rosso ottenuto fu rapidamente versato in una considerevole quantità di acqua distillata. Si ottenne così un precipitato fioccoso, color giallo di cromo, che fu raccolto sopra un filtro, disseccato all'aria e sciolto nell'etere. La soluzione eterea depose pel raffreddamento delle

laminette rosso arancio, che lavate con poco etere e cristallizzate dall'alcool bollente, si fondevano a 134-135°.

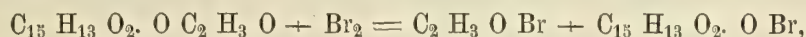
gr. 0,3335 di tale sostanza fornirono gr. 0,1998 di bromuro di argento, ossia per °/₀:

Bromo 25,49

Questi risultati non lasciano dubbio che si tratti di acido bromolapacico, il quale come sappiamo si fonde a 139-140° e contiene °/₀:

Bromo 24,92

Nell'azione quindi del bromo sul derivato monoacetilico viene eliminato l'acetile e si forma lo stesso acido bromolapacico che si ottiene dall'acido libero. Probabilmente la trasformazione ha luogo nel senso indicato dalla seguente equazione:

$$C_{15} H_{13} O_2 . O C_2 H_3 O + Br_2 = C_2 H_3 O Br + C_{15} H_{13} O_2 . O Br,$$

essendo difficile spiegare altrimenti la formazione dell'acido bromolapacico. Non nascondo, che avendo delle ragioni per supporre che nell'acido bromolapacico descritto il bromo si trovasse legato all'ossigeno, io speravo bromurando il derivato acetilico e saponificando il prodotto della reazione, poter pervenire ad un acido bromolapacico contenente il bromo legato al carbonio.

Nell'azione dell'acido nitrico ho operato nel modo seguente. Gr. 50 del derivato acetilico furono aggiunti per piccole porzioni a gr. 250 di acido nitrico della densità di 1,48, esternamente raffreddato con neve. Evitando qualsiasi innalzamento di temperatura si ottiene, senza svolgimento di vapori nitrosi, una soluzione rossa: se però non si opera con cura si determina un'ossidazione energica che, una volta iniziata, è impossibile frenare. — La soluzione nitrica versata in molta acqua dà un abbondante precipitato fiaccoso rosso arancio, il quale fu raccolto sopra un filtro, lasciato seccare, e lavato con etere per eliminare un poco di sostanza vischiosa, quindi si cristallizzò dall' alcool diluito boll nte e dalla benzina dividendolo in varie frazioni. Ho incontrato delle difficoltà per ottenere da questo prodotto una sostanza a punto di fusione ben determinato; adoperando come solvente la benzina si ottiene quasi sempre un prodotto cristallizzato in laminette di color rosso litargirio, fusibili con alterazione a 166-168°; però quando questo prodotto si tratta con alcool in quantità insufficiente a discioglierlo tutto, la parte indisciolta ha un punto di fusione più elevato, e spesso superiore ai 170°; ma ricristallizzata dalla benzina riprende il punto di fusione primitivo. Aggiungerò che nonostante queste variazioni nel punto di fusione, non sono riuscito ad isolare prodotti diversi. L'analisi di una porzione ben cristallizzata, fusibile a 167-168°, mi ha dato i seguenti risultati;

I. gr. 0,2695 di sostanza diedero gr. 0,6156 di anidride carbonica, e gr. 0,1165 di acqua;

II. gr. 0,3136 di sostanza diedero c. c. 8,5 di azoto, alla temperatura di 19°,8 e a 756,4 mm. di pressione, corrispondenti a gr. 0,0097189.

Cioè per 100:

	I.	II.
Carbonio	62,27	—
Idrogeno	4,80	—
Azoto	—	4,27

Questi risultati fanno supporre che si sia formato un derivato mononitrico del composto acetilico. Infatti per la formola: $C_{15} H_{12} (NO_2) O_3 . C_2 H_3 O$ si calcola:

Carbonio	62,00
Idrogeno	4,56
Azoto	4,25

Spero di potere in altra occasione esaminare meglio questo composto, il quale potrebbe condurre ad un acido nitrolapacico.

Altro derivato acetilico: Se, nell'azione dell'anidride acetica e dell'acetato sodico sull'acido lapacico, invece di sospendere lo scaldamento appena il liquido dal rosso passa al giallo e comincia a colorarsi in verde, si continua a scaldare mantenendo l'ebollizione per circa $^1/_4$ d'ora, non si ottiene più traccia del derivato acetilico superiormente descritto, ma si forma un nuovo composto. — Aggiungendo acqua alla massa verde, che si ottiene, si separa una sostanza oleosa pesante di color verde bruno, che dopo alcune ore si rapprende in cristalli: si raccoglie, si polverizza e si tratta a freddo con dell'etere, il quale trasporta una resina verde e lascia un residuo di color bianco sporco, che costituisce il nuovo composto: esso si termina di purificare per cristallizzazioni dall'alcool bollente o dall'acido acetico diluito. — In una operazione nella quale impiegai 80 gr. di acido lapacico, 80 gr. di acetato sodico e 250 gr. di anidride acetica, ottenni grammi 55 di questo composto puro.

Questo nuovo derivato dell'acido lapacico cristallizza dall'alcool bollente in aghetti o in piccoli prismi che difficilmente si ottengono incolori e trasparenti, e che più comunemente formano una massa bianca perlacea. È pochissimo solubile nell'etere e nell'alcool freddo; si scioglie mediocremente nell'alcool bollente e nell'acido acetico. Si fonde a 131-132°.

All'analisi ha fornito i risultati seguenti:

I. gr. 0,2822 di sostanza diedero gr. 0,7225 di anidride carbonica e gr. 0,146 di acqua;
II. gr. 0,2248 di sostanza diedero gr. 0,5691 di anidride carbonica e gr. 0,1148 di acqua;
III. gr. 0,207 di sostanza diedero gr. 0,5284 di anidride carbonica e gr. 0,109 di acqua;
IV. gr. 0,1856 di sostanza diedero gr. 0,4738 di anidride carbonica e gr. 0,999 di acqua;
V. gr. 0,311 di sostanza diedero gr. 0,8022 di anidride carbonica e gr. 0,1565 di acqua.

Cioè per 100:

	I.	II.	III.	IV.	V.
Carbonio	69,81	69,04	69,62	69,62	70,34
Idrogeno	5,74	5,67	5,88	5,98	5,58

Queste analisi furono fatte con prodotti provenienti da preparazioni diverse e disseccati, ora nel vuoto in presenza di acido solforico, ora per lo scaldamento a 100° in una corrente di aria secca; quella V, che si allontana sensibilmente dalle altre, è relativa ad un campione di prodotto che era stato lungamente riscaldato e che si era parzialmente decomposto lasciando sublimare degli aghi sottilissimi. Fatta astrazione di tale analisi, tutte le altre si accordano bene con la formola $C_{15} H_{12} O_3 (C_2 H_3 O)_2$ di un derivato biacetilico dell'acido lapacico, per la quale si calcola:

Carbonio	69,93
Idrogeno	5,52

Però il comportamento di questo composto non assicura che realmente tale sia la sua costituzione, perchè in nessuna condizione mi è stato possibile di ritornare da esso all'acido lapacico. Riscaldato con acqua, a 150° in tubi chiusi, non si altera sensibilmente; dai carbonati alcalini e dalla potassa acquosa diluita non è sciolto a freddo; l'idrato potassico lo scioglie lentamente a caldo senza alterare la parte che rimane indisciolta: la soluzione che si forma è di color giallo bruno e si colora in rosso all'aria. Sostituendo alla potassa acquosa quella in soluzione alcoolica l'andamento della reazione è come nel caso precedente, soltanto la soluzione avviene a freddo; essa è di color giallo bruno, non precipita per aggiunta di acqua, e si colora in rosso all'aria. Diluendola con acqua e trattando poscia con acido cloridrico si ottiene un precipitato giallo bruno, che sovente si separa in principio oleoso, ma che ben tosto si rapprende in massa cristallina; questa sostanza, che è solubilissima nell'etere, nell'alcool e nella benzina, si purifica per cristallizzazione dall'alcool acquoso bollente e si ottiene sotto forma di piccoli aghi piatti, di color arancio e di splendore serico, che si fondono a 140-141°. Sulla sua natura chimica non posso nulla affermare pel momento; differisce dall'acido lapacico perchè in contatto ai carbonati alcalini ed agli idrati non si colora in rosso, nè si scioglie anche riscaldando. All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,4723 di sostanza diedero gr. 0,2822 di anidride carbonica e gr. 0,2119 di acqua;
II. gr. 0,2798 di sostanza fornirono gr. 0,7997 di anidride carbonica e gr. 0,1274 di acqua;
III. gr. 0,2381 di sostanza diedero gr. 0,6228 di anidride carbonica e gr. 0,1073 di acqua.

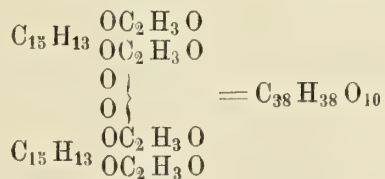
Cioè per cento:

	I.	II.	III.
Carbonio	74,38	75,02	74,46
Idrogeno	4,98	5,05	5,22

Come si vede questa sostanza ha una composizione elementare assai vicina a quella dell'acido lapacico.

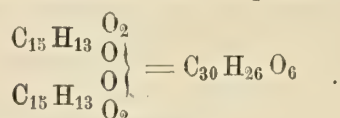
Ho pure esaminato l'azione dell'ammoniaca alcoolica su questo derivato acetilico; si forma anche in questo caso una soluzione gialla rossastra, dalla quale si ottiene una sostanza che si avvicina nel punto di fusione e nel comportamento cogli alcali, a quella ottenuta per l'azione della potassa.

Come vedremo in seguito, discutendo la costituzione dell'acido lapacico e dei suoi derivati, non è improbabile che il derivato che abbiamo visto formarsi per l'azione prolungata dell'anidride acetica ed acetato sodico sull'acido lapacico, corrisponda alla formola:

$$\begin{array}{l} C_{15}H_{13}\begin{array}{l}OC_2H_3O\\OC_2H_3O\end{array} \\ \quad\quad\quad \begin{array}{l}O\\O\end{array}\Big\} \\ C_{15}H_{13}\begin{array}{l}OC_2H_3O\\OC_2H_3O\end{array} \end{array} = C_{38}H_{38}O_{10}$$

per la quale si calcola:

Carbonio	69,72
Idrogeno	5,81

e che il prodotto che ne risulta trattandolo con la potassa alcoolica sia:

$$\left.\begin{matrix} C_{15}H_{13}\,\begin{matrix}O_2\\O\end{matrix} \\ C_{15}H_{13}\,\begin{matrix}O\\O_2\end{matrix}\end{matrix}\right\} = C_{30}H_{26}O_6 \quad .$$

Per quest'ultima formola si calcola infatti:

Carbonio	74,68
Idrogeno	5,39

Accennerò finalmente che ho pure sommariamente esaminato l'azione del bromo e dell'acido nitrico su questo derivato acetilico. Nel primo caso, dirò soltanto che, non si forma acido monobromolapacico. Nel secondo si ottengono, a quanto sembra due prodotti nitrati diversi, dei quali uno cristallizza in aghi rosso arancio fusibili a 147-148°, l'altro, meno solubile nell'etere, è in aghetti gialli fusibili a temperatura un poco più elevata. L'analisi del primo di questi composti mi ha dato i seguenti risultati: I. gr. 0,3179 di sostanza fornirono gr. 0,6274 di anidride carbonica e gr. 0,1208 di acqua; II. gr. 0,2302 di sostanza fornirono c. c. 14,8 di azoto alla temperatura di 12°,6 e sotto la pressione di mm. 751,9. Cioè per cento:

	I.	II.
Carbonio	53,82	—
Idrogeno	4,22	—
Azoto	—	7.40

5. Azione degli ossidanti.

Aggiungendo dell'acido cromico ad una soluzione acetica di acido lapacico ha luogo una reazione violentissima accompagnata da svolgimento di anidride carbonica, la quale cessa soltanto quando tutto l'acido lapacico è trasformato per completa ossidazione.

Se ad una soluzione alcalina di lapaciato potassico si aggiunge circa il doppio peso di permanganato potassico, la soluzione diviene verde quasi istantaneamente, si riscalda, e depone del biossido di manganese; filtrando si ottiene una soluzione gialla che non precipita per aggiunta di acido cloridrico e che ho agitato con etere. L'etere per lo svaporamento lascia un piccolo residuo cristallino, solubile nell'acqua e fortemente acido, il quale, neutralizzato con ammoniaca, fornisce col cloruro di bario un precipitato insolubile nell'acido acetico, solubile nell'acido cloridrico. Ciò prova che si è prodotto dell'acido ossalico, e che l'acido lapacico per l'ossidazione col permanganato potassico è profondamente alterato. Risultati più importanti ho ottenuto per l'azione dell'acido nitrico.

Quando si fa cadere dell'acido lapacico nell'acido nitrico ordinario (p. sp. = 1,38) esso vi si scioglie immediatamente dando una soluzione di color rosso bruno intenso, simile a quello del bromo; se si scalda leggermente cominciano a svolgersi vapori rutilanti ed ha luogo un'ossidazione molto rapida ed energica che continua anche cessando lo scaldamento; terminato lo svolgimento dei vapori nitrosi si osserva che la soluzione ha perduto il color rosso intenso ed è divenuta invece color giallo-arancio; inoltre diluendola con acqua non dà più luogo alla formazione del precipitato fioccoso giallo che si ottiene dalla soluzione preparata a freddo, ma o rimane limpida

o s'intorbida per la separazione di piccole quantità di una sostanza vischiosa gialla. Svaporando la soluzione nitrica si ottiene un abbondante residuo cristallino quasi incoloro. Impiegando, in due volte, grammi 50 di acido lapacico e gr. 800 di acido nitrico, ho ottenuto un residuo cristallino del peso di circa grammi 40. La sostanza così ottenuta, che ha i caratteri di un acido, si purifica facilmente per cristallizzazione dall'acqua bollente, in presenza del carbone animale, e si presenta sotto forma di belle lamine, molto spesse e leggermente perlacee, che si fondono da 195 a 200°.

All'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,345 di sostanza diedero gr. 0,7343 di anidride carbonica e gr. 0,1165 di acqua;
II. gr. 0,3344 di sostanza diedero gr. 0,7138 di anidride carbonica e gr. 0,1154 di acqua.

Cioè in cento parti:

	I.	II.
Carbonio	58,04	58,21
Idrogeno	3,75	3,83

Di questo acido ho preparato il sale d'argento, precipitando con nitrato argentico una soluzione neutra del sale ammonico.

gr. 0,3025 di questo sale argentico per la calcinazione lasciarono un residuo di gr. 0,1731 di argento metallico, cioè per cento:

Argento 57,23

L'acido in esame si fonde, come ho indicato, da 195 a 200°, ed è facile osservare che durante la fusione si altera perdendo dell' acqua; distillandone una certa quantità si possono facilmente raccogliere alcune gocce di acqua, ed in seguito il prodotto fuso entra in ebollizione e passa tutto a 275-280° senza subire la menoma alterazione. Il distillato si rapprende in una massa di aghetti perfettamente bianchi, si scioglie facilmente nell'etere e cristallizza per l'evaporazione in piccoli prismi, ben definiti, fusibili a 130-131°. Questa nuova sostanza sciolta nell'acqua vi si combina per trasformarsi nell'acido primitivo.

All'analisi ha dato i seguenti risultati:

gr. 0,2965 di sostanza fornirono gr. 0,7055 di anidride carbonica e gr. 0,079 di acqua.

Cioè per cento:

Carbonio 64,89
Idrogeno 2,96

I caratteri dell'acido ottenuto per l'azione dell'acido nitrico sull'acido lapacico, il suo punto di fusione, la trasformazione in un' anidride fusibile a 130-131°, non lasciano il menomo dubbio ch'esso sia dell'acido ftalico. Le analisi confermano completamente questo risultato. Infatti per l'acido ftalico $C_8H_6O_4$ si calcola:

Carbonio 57,83
Idrogeno 3,61

pel suo sale d'argento $C_8H_4Ag_2O_4$:

Argento 56,84

e per l'anidride $C_8H_4O_3$:

Carbonio 64,84
Idrogeno 2,70

numeri che si accordano perfettamente con quelli forniti dall'esperienza.

Oltre all'acido ftalico non si ottengono in questa reazione che un poco di sostanza resinosa insolubile nell'acqua e tracce di acido ossalico, la cui presenza ho constatato nelle acque madri nitriche da cui cristallizza l'acido ftalico.

La quantità di acido ftalico che si forma per l'azione dell'acido nitrico sull'acido lapacico è veramente molto considerevole, e sebbene non abbia fatto delle determinazioni quantitative apposite, pure da quanto ho sopra esposto si deduce che supera il 75 per cento del peso dell'acido lapacico impiegato. L'alizarina stessa ne fornisce meno.

6. Distillazione con la polvere di zinco.

La formazione dell' acido ftalico per l'ossidazione dell' acido lapacico e la formola $C_{15}H_{14}O_3$ alla quale conduce la sua composizione elementare, ravvicinando notevolmente questa sostanza all'alizarina ed alla purpurina, rendevano probabile che l'acido lapacico fosse un derivato dell'antracene o del metilantracene; dall'altro lato però il punto di fusione, situato a 138° ed insolitamente basso per tali composti, faceva nascere il dubbio che fosse invece un derivato della naftalina o di un suo omologo. Per risolvere la quistione ho ricorso all'azione della polvere di zinco.

Ho distillato l'acido lapacico, previamente fuso e polverizzato (allo scopo di eliminare qualche traccia del solvente che servì a cristallizzarlo, cioè etere, alcool o benzina) per porzioni di 20 grammi con 200 gr. di polvere di zinco, in una larga canna di vetro congiunta ad un pallone collettore ed avendo subito osservato che durante la distillazione si svolgevano dei gaz infiammabili, ho disposto l'apparecchio in modo da far passare i prodotti gassosi per una bolla di Liebig contenente del bromo.

Partendo da gr. 100 di acido lapacico ho ottenuto una ventina di grammi di un distillato oleoso bruno, contenente delle gocce di acqua e delle particelle solide bianche in sospensione e dotato di forte odore di naftalina. Dal bromo ho potuto ricavare gr. 20 circa di un bromuro oleoso distillato col vapor d'acqua.

La sostanza oleosa bruna conteneva tracce di un corpo fenico e fu perciò trattata con potassa diluita e poscia distillata in una corrente di vapore. Viene così facilmente trasportata una sostanza che si rapprende bentosto, nel tubo stesso del refrigerante, in laminette bianche; verso la fine cessa la distillazione del corpo cristallizzabile ed il vapor d'acqua trasporta invece delle gocce oleose pesanti.

La sostanza cristallizzata fu raccolta, spremuta fra carta sugante, e purificata per cristallizzazione dall'alcool diluito. Si ottiene così in belle lamine, di splendore madreperlaceo, fusibili a 82° e dotate di tutti i caratteri della naftalina. Per maggiore sicurezza ne ho sciolto un poco nell'alcool e vi ho aggiunto una soluzione, parimenti alcoolica, di acido picrico; ho in tal modo ottenuto il picrato di naftalina, il quale cristallizzato dall'etere si presentava in aghi gialli fusibili a 148°.

La parte oleosa che viene trasportata dal vapor di acqua, dopo la naftalina, era in troppo piccola quantità per permettermi di studiarla; purtuttavia ho potuto constatare che essa contiene un idrocarburo bollente verso 250°, che può cristallizzare e che si fonde a temperatura più bassa nella naftalina. Esso è certamente un omologo della naftalina.

In quanto al bromuro, esso dopo che fu distillato col vapor d'acqua e disseccato sul cloruro di calcio, venne sottoposto a distillazione frazionata; comincia a bollire

verso 145° e passa fino a 230°. Dopo tre o quattro distillazioni riesce però facile separarlo in due composti diversi; uno bollente da 149 a 152°, l'altro da 217 a 222°.

Il primo di essi ha fornito all'analisi i seguenti risultati:

I. gr. 0,5757 di questo bromuro, bollente da 149 a 152°, fornirono gr. 0,9999 di bromuro di argento;

II. gr. 0,4296 di bromuro bollente a 149-150° diedero gr. 0,7455 di bromuro di argento;

III. gr. 0,302 di bromuro diedero gr. 0,529 di bromuro di argento.

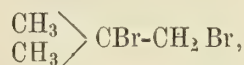
Cioè per cento:

	I.	II.	III.
Bromo	73,90	73,84	74,54

Questi risultati non lasciano dubbio che si tratti di un bromuro di butilene $C_4H_8Br_2$, pel quale si calcola per cento:

Bromo 74,07

Il punto di ebollizione poi rende probabilissimo ch' esso sia il bromuro d' isobutilene

$$\begin{matrix} CH_3 \\ CH_3 \end{matrix} \!\!> CBr\text{-}CH_2Br,$$

il quale bolle a 149°, mentre gli altri due isomeri bollono a 159 ed a 166°, cioè a temperatura notevolmente più elevata.

Il secondo bromuro bollente a 217-222° ha fornito all'analisi i risultati seguenti:

I. gr. 0,2858 di sostanza diedero gr. 0,1854 di anidride carbonica e gr. 0,0652 di acqua;

II. gr. 0,3012 diedero gr. 0,1943 di anidride carbonica e gr. 0,066 di acqua;

III. gr. 0,2716 diedero gr. 0,495 di bromuro d'argento.

Cioè in cento parti:

	I.	II.	III.	Media
Carbonio	17,69	17,59	—	17,64
Idrogeno	2,52	2,43	—	2,47
Bromo	—	—	77,68	77,68

Questi risultati non possono altrimenti spiegarsi che ammettendo che il bromuro non era completamente puro, e che probabilmente contenesse un poco di umidità; purtuttavia da essi si deduce che deve trattarsi di un bromuro, il quale contenendo per circa 18 di carbonio approssimativamente il 78 di bromo, debba per ogni 3 at. di carbonio contenerne 2 di bromo; e non potendo essere del bromuro di propilene, se non altro pel punto di ebollizione elevato, sia un derivato di un idrocarburo a 6 at. di carbonio. Essendo presumibile che nella distillazione dell'acido lapacico sullo zinco, oltre al butilene ed altri idrocarburi non saturi, ne prendono origine altri non assorbiti dal bromo, ho cercato di esaminare più attentamente il miscuglio gassoso che si produce, ma le difficoltà incontrate non mi hanno permesso di venirne alla completa conoscenza. Dirò prima di tutto che nei gaz che si formano per la decomposizione dell'acido lapacico con lo zinco non è contenuta dell'anidride carbonica; infatti in diverse esperienze appositamente fatte e nelle quali ho impiegato per la stessa quantità di zinco polveroso quantità variabili di acido lapacico ho sempre ottenuto approssimativamente la stessa quantità di anidride carbonica che si ottiene anche adoperando dello zinco solo.

In quanto alle analisi eudiometriche dirò che esse mi hanno dato il risultato sorprendente che il miscuglio gassoso non contiene dei gaz assorbibili dall'acido solforico fumante, che una porzione è invece assorbita dalla soluzione di cloruro ramoso (ossido di carbonio), che vi è contenuto dell'idrogeno libero (dovuto, almeno in parte, alla decomposizione con lo zinco dell'acqua che si forma nella reazione); però non mi è stato possibile di dedurre nulla sulla natura e la proporzione dei diversi idrocarburi, nè tampoco, cosa che sarebbe stato importante, di stabilire se nel miscuglio gassoso fosse contenuto del CH_4. In quanto al gaz assorbito dal cloruro ramoso esso è certamente dell'ossido di carbonio, giacchè da esperienze appositamente fatte risulta che esso non è acetilene nè altro idrocarburo che produca un composto argentico passando attraverso una soluzione ammoniacale di nitrato d'argento.

7. Azione dei riduttori.

Il comportamento generale dell'acido lapacico e i risultati ottenuti nella distillazione con lo zinco non che la formazione dell'acido ftalico per la sua ossidazione, avendomi nettamente mostrato ch'esso era un ossichinone di un omologo della naftalina, mi hanno spinto da un lato a preparare l'idroderivato corrispondente e dall'altra a cercare di ottenere l'idrocarburo fondamentale. Ecco i risultati ottenuti.

1. *Azione dell'idrogeno nascente.* Se alla soluzione di lapaciato potassico contenente un eccesso d'idrato alcalino si aggiunge della polvere di zinco, essa perde quasi immediatamente il colore rosso intenso che la caratterizza e si trasforma in un liquido color giallo chiaro, che sembra verde quando contiene della polvere di zinco in sospensione. La soluzione, ridotta di lapaciato potassico, così ottenuta è uno dei reattivi più sensibili dell'ossigeno e lo assorbe con la più grande facilità dell'atmosfera colorandosi immediatamente in rosso; per questa ragione non si ottiene mai perfettamente incolora alla superficie per quante cure si prendano ed anche operando in una corrente d'idrogeno.

Ho tentato d'isolare il prodotto della riduzione dell'acido lapacico aggiungendo acido cloridrico alla soluzione ridotta sopraccennata ed agitando con etere, e cercando di escludere per quanto è possibile la presenza dell'aria. Ho così ottenuto una soluzione eterea, incolora in principio, ma che si colora rapidamente in giallo, la quale distillata lascia un residuo oleoso giallo, che si rapprende in una massa cristallina dopo poco tempo. Tale residuo è senza dubbio l'acido idrolapacico un poco alterato, ed infatti esposto all'aria va mano mano ricoprendosi di laminette cristalline di acido lapacico riconoscibile a tutti i suoi caratteri. Non ostante che non abbia potuto fin ora esaminare attentamente questo prodotto pure dalle esperienze fin ora fatte risulta che l'acido idrolapacico si scioglie nell'acqua bollente e ne cristallizza in aghi incolori, fusibili ad una temperatura vicina ai 100°; allo stato umido si altera però con la più grande facilità trasformandosi in acido lapacico.

Ho pure tentato di ridurre l'acido lapacico con l'anidride solforosa e con lo zinco e l'acido cloridrico; però in quest'ultimo caso si resinifica completamente, e dalla anidride solforosa in soluzione nell'acqua non è ridotto nemmeno per lo scaldamento in tubi chiusi a 150°.

2. *Azione dell'acido jodidrico.* Scaldando l'acido lapacico con circa il proprio peso di fosforo rosso e 4 volte di acido jôdidrico bollente a 127° ha luogo una reazione energica cessata la quale si trovano nel pallone due strati; uno inferiore oleoso e vischioso, di color bruno, l'altro giallastro che è dell'acqua contenente in soluzione acido jodidrico ed acidi del fosforo. Aggiungendo nuova acqua e distillando in una corrente di vapore viene trasportato un olio pesante, che raccolto e disseccato distilla per la maggior parte da 300 a 310°; per la rettificazione si può ottenere sotto forma di un liquido limpido ed appena giallo bollente a 304-306°. Quest'olio è un idrocarburo e dà con l'acido picrico un composto che cristallizza dall'alcool bollente in belli aghi di color rosso arancio fusibili a 140-141°.

Riuscendomi difficile per la piccola quantità di prodotto a mia disposizione di purificare completamente e tanto più di avere perfettamente secco l'idrocarburo isolato, ho analizzato il suo composto picrico. Ecco i risultati ottenuti:

I. gr. 0,2206 di sostanza fornirono gr. 0,4644 di anidride carbonica e gr. 0,0916 di acqua;
II. gr. 0,3238 di sostanza fornirono gr. 0,6803 di anidride carbonica e gr. 0,1475 di acqua;
III. gr. 0,2296 di sostanza fornirono gr. 0,4822 di anidride carbonica e gr. 0,1065 di acqua.

Cioè $^0/_0$:

	I.	II.	III.
Carbonio	57,41	57,29	57,27
Idrogeno	4,61	4,76	5,15

Sebbene questi risultati differiscano notevolmente da quelli che si calcolano per il composto picrico di una amilnaftalina, pure io credo non vi sia dubbio che l'idrocarburo ottenuto sia amilnaftalina, e attribuisco la perdita nelle analisi alla presenza di un poco di acido picrico libero nel composto con l'idrocarburo. Per la formola $C_{10} H_7 . C_5 H_{11} + C_6 H_2 (NO_2)_3 OH$ si calcola:

Carbonio	59,01
Idrogeno	4,90

8. Azione degli acidi concentrati a freddo.

1. *Azione dell'acido nitrico concentrato.* Come ho precedentemente esposto, quando si scalda leggermente l'acido lapacico con acido nitrico ordinario, ha luogo una energica ossidazione e si ottiene abbondantemente dell' acido ftalico. Se invece però si scioglie l' acido lapacico nell' acido nitrico concentrato a freddo la reazione va in tutt' altro senso.

Ho sciolto gr. 100 di acido lapacico in gr. 500 di acido nitrico concentratissimo (del p. sp. di 1,49) raffreddato con neve, ed avendo cura di aggiungere l'acido lapacico per piccole porzioni ed agitando continuamente onde evitare che la temperatura s'innalzi; se non si prendono queste precauzioni e si lascia riscaldare il liquido, allora si sciolgono dei vapori nitrosi ed è più impossibile di frenare l' ossidazione, mentre operando con cura la soluzione si compie senza il menomo svolgimento di ossidi di azoto. Si ottiene così un liquido di color rosso intenso, il quale versato rapidamente in una grande quantità di acqua fornisce un abbondante precipitato fioccoso, di color giallo arancio, che alle volte si separa in principio sotto forma molle e semifluida, ma che ben presto si concreta. Questa sostanza, raccolta

sopra un filtro e disseccata, si lava prima di tutto con etere onde trasportare un poco di materia vischiosa ed attaccaticcia che renderebbe difficile l'ulteriore purificazione, e quindi si cristallizza replicate volte dall'alcool bollente lavando ogni volta i cristalli con etere che si raccoglie a parte. Possono così ottenersi due prodotti diversi; uno in piccola quantità che si accumula nelle acque madri alcooliche e nell'etere di lavaggio, l'altro meno solubile che si ottiene facilmente puro dopo alcune cristallizzazioni dall'alcool bollente. Quest'ultimo, che è il prodotto principale della reazione, si presenta in grossi aghi piatti, di un bel colore giallo arancio carico, che imbruniscono maggiormente per l'azione della luce: mi è riuscito difficile ottenerlo a punto di fusione ben stabile, però i campioni più puri si fondevano un poco sopra dei 150°. Questa sostanza è poco solubile nell'etere, molto solubile nell'alcool bollente, mediocremente in quello freddo; nella benzina è tanto solubile che difficilmente si riesce ad averla cristallizzata da essa. Non contiene azoto ed all'analisi ha fornito i seguenti risultati:

I. gr. 0,2569 di sostanza diedero gr. 0,6955 di anidride carbonica e gr, 0,1351 di acqua;
II. gr. 0,2844 di sostanza diedero gr. 0,7699 di anidride carbonica e gr. 0,1465 di acqua;
III. gr. 0,272 di sostanza diedero gr. 0,743 di anidride carbonica e gr. 0,142 di acqua.

Cioè in 100:

	I.	II.	III.
Carbonio	73,83	73,83	74,49
Idrogeno	5,84	5,72	5,83

Questa composizione è come si vede molto prossima a quella dell'acido lapacico; ma la nuova sostanza non può confondersi con esso; ne differisce pel colore molto più oscuro, pel punto di fusione notevolmente più elevato e principalmente pel comportamento coi carbonati alcalini; l'acido lapacico infatti vi si scioglie immediatamente colorandosi in rosso, mentre la nuova sostanza a freddo rimane perfettamente inalterata ed anche alla ebollizione resiste notevolmente; insomma mentre l'acido lapacico ha il comportamento di un ossichinone la nuova sostanza non ha punto caratteri acidi. Come vedremo in seguito, questo prodotto che propongo di chiamare *lapacone* si forma, più facilmente ed allo stato di maggior purezza, sostituendo all'acido nitrico quello solforico; ma prima di esporre tali esperienze, mi corre l'obbligo di aggiungere due parole sull'altra sostanza che, in piccola quantità, si ottiene insieme al lapacone nell'azione dell'acido nitrico concentrato sull'acido lapacico. Come è stato detto essa si accumula nell'etere di lavaggio e nelle acque madri alcooliche; si purifica per ripetute cristallizzazioni dall'alcool bollente, e si ottiene in belli aghi di color giallo canario, riuniti a fasci o radiati, fusibili a 116-117°. All'analisi ha dato:

gr. 0,2935 di sostanza fornirono gr. 0,7992 di anidride carbonica e gr. 0,1554 di acqua, cioè:

Carbonio	74,16
Idrogeno	5,87

Come si vede adunque anche questa sostanza si avvicina molto, nella composizione, all'acido lapacico; però il punto di fusione non lascia dubbio che si tratti di un corpo diverso. Pel momento non ho potuto continuarne lo studio.

2. *Azione dell'acido solforico.* Il lapacone, come ho già accennato, si ottiene più facilmente per mezzo dell'acido solforico. Per prepararlo si scioglie, agitando a freddo, 1 p. di acido lapacico in 4 p. di acido solforico ordinario; si ottiene così una soluzione color di bromo, che versata in molta acqua fredda precipita il lapacone sotto forma di fiocchi color giallo-arancio, i quali si raccolgono sopra un filtro, si lavano con acqua sino a che non trattengano più acido solforico, e si cristallizzano quindi dall'alcool bollente. Ricorrendo a numerose cristallizzazioni frazionate dall' alcool e dall'etere, ho sempre ottenuto lo stesso prodotto, sicchè in questo caso non si forma che solo lapacone.

Il lapacone preparato con questo processo ha fornito all'analisi i seguenti risultati:
I. gr. 0,2691 di sostanza diedero gr. 0,7248 di anidride carbonica e gr. 0,1371 di acqua;
II. gr. 0,2666 diedero gr. 0,7304 di anidride carbonica e gr. 0,1456 di acqua;
III. gr. 0,2537 diedero gr. 0,6904 di anidride carbonica e gr. 0,1356 di acqua.

Cioè in 100 parti:

	I.	II.	III.	Media
Carbonio	74,45	74,71	74,21	74,46
Idrogeno	5,65	6,07	5,93	5,88

Questi risultati conducono alla formola $C_{15} H_{14} O_3$ dell'acido lapacico, o a quella di un suo polimero, per la quale si calcola

Carbonio	74,38
Idrogeno	5,78

Il lapacone si presenta in magnifici aghi piatti di color rosso arancio e di splendore serico, fusibili a 155-156°. È insolubile nell'acqua, si scioglie abbondantemente nell'alcool bollente; meno nell'alcool freddo e nell'etere; è solubilissimo nella benzina ed in generale si scioglie in tutti i solventi comuni. Si scioglie pure negli acidi solforico e nitrico a freddo, e dall'acqua viene precipitato inalterato, come del resto risulta dal suo modo di preparazione; si scioglie pure colorandosi in rosso nell'acido cloridrico concentrato e fumante senza alterazione. Nella potassa acquosa, di media concentrazione, non si scioglie a freddo; scaldando passa in soluzione di un bel rosso porporino, la quale, filtrata ancor calda, depone pel raffreddamento magnifici aghi di color giallo rossastro e di splendore serico, che al punto di fusione (154-155°) furono riconosciuti per lapacone; la soluzione alcalina filtrata per l'aggiunta di acido cloridrico dà un precipitato che purificato per cristallizzazione dall' alcool fu similmente constatato essere del lapacone.

Il lapacone non viene alterato dal cloruro di acetile e dall'anidride acetica, anche dopo prolungata ebollizione; in tubi chiusi a 150° l' anidride acetica non lo altera nemmeno, però a 180° lo trasforma in un prodotto resinoso nero.

Scaldato con acido nitrico ordinario il lapacone si ossida trasformandosi, come l'acido lapacico, in acido ftalico, ma l'azione è meno rapida e meno completa, e si formano sempre dei prodotti complementari resinosi.

Distillato con la polvere di zinco si comporta in modo simile all'acido lapacico.

La identità del lapacone ottenuto per mezzo dell'acido solforico con quello preparato con l'acido nitrico, oltre a risultare dalla corrispondenza nei caratteri che ho esposto, mi è stata confermata dall'egregio dott. Panebianco, il quale avendo esaminato

i prodotti ottenuti coi due diversi processi li ha trovati cristallograficamente ed otticamente identici.

Una trasformazione importante del lapacone ho osservato trattandolo con acetato sodico ed anidride acetica. Appena comincia a scaldarsi il miscuglio si colora in verde ed ha luogo una reazione abbastanza energica, cessata la quale si vedono, in sospensione al liquido verde, delle magnifiche laminette di splendore metallico; trattando allora con acqua si separa una massa di color verde oscuro risultante dalle laminette cennate impregnate da una sostanza resinosa; raccogliendola e lavandola con etere, viene trasportata la resina verde e rimane indisciolta ed isolata la sostanza cristallina. Partendo da 25 grammi di lapacone e scaldandolo con 40 gr. di acetato sodico e 15 gr. di anidride acetica, ho ottenuto circa gr. 20 della nuova sostanza lavata completamente con etere ed esente di resina. Essa si presenta in magnifiche laminette di splendore affatto metallico e di color rosso di bronzo viste per riflessione, giallo dorato per trasparenza e dotate inoltre di magnifici riflessi azzurri; strofinata con una bacchetta di vetro, fra le dita e sulla carta lascia una macchia del colore dell'azzurro d'indaco, o come questo dotato di riflessi rossastri e di splendore metallico.

Per purificare la nuova sostanza ho incontrato delle difficoltà, essendo essa insolubile o quasi in tutti i solventi. Nell'etere e nell'alcool si scioglie in quantità veramente infinitesimale, ma sufficiente pur tuttavia a colorarli in un bel colore azzurro di cielo molto sflavido; nell'acido acetico, nella benzina, nel cloroformio, nell'anidride acetica a freddo ecc. ecc. è pure pochissimo solubile. I suoi migliori solventi sono l' anidride acetica bollente, il solfuro di carbonio, ed il tricloruro di fosforo. Bollito con anidride acetica si va mano mano sciogliendo dando una soluzione di un bel colore azzurro, abbastanza intenso, la quale per lento raffreddamento lascia deporre il prodotto in cristalli affatto simili a quelli primitivi; la quantità però di sostanza che passa in soluzione è sempre piccolissima, ed invero dopo aver fatto bollire per circa $^1/_4$ d'ora 10 grammi di essa con 260 grammi di anidride acetica, ed aver abbandonato al riposo per 24 ore il liquido filtrato a caldo, ho ottenuto un deposito cristallino del peso di 15 centigrammi appena; la soluzione filtrata, trattata con acqua, precipita una nuova porzione di sostanza, sotto forma di fiocchi azzurri in tutto paragonabili al precipitato di bleu di Prussia, i quali raccolti pesavano circa 5 centigrammi; da ciò risulta che i 260 grammi di anidride acetica avevano complessivamente sciolto non più di 20 centigrammi di questa sostanza, e che perciò 1 p. di essa ha bisogno per disciogliersi di ben 1300 parti all'incirca di anidride acetica bollente e di 3000 parti per lo meno di anidride acetica alla temperatura ordinaria. Il solfuro di carbonio è un solvente dello stesso genere; la soluzione è anche in questo caso di un magnifico azzurro, però da essa non si riesce più ad ottenere sempre sotto forma di un residuo amorfo azzurro. Nel tricloruro di fosforo sembra che si sciolga un poco di più; aggiungendo acqua alla soluzione si precipita inalterata, ma nella forma amorfa azzurra. In generale può dirsi che questo derivato del lapacone è di color rosso di bronzo quando è cristallizzato, ma allo stato polveroso o amorfo è azzurro, come azzurre sono le sue soluzioni nei reattivi neutri.

Su questo importante prodotto ho fatto sin ora altri pochi saggi. Esso non si scioglie, nè si altera per l'azione della potassa anche bollente. Nell' acido solforico

concentrato si scioglie dando una soluzione rossa che diluita passa al verde, e dalla quale non si ottiene più la sostanza primitiva. Per l'azione dell' acido nitrico concentrato a freddo, si rammollisce in parte ed in parte si scioglie con colore rosso; la soluzione trattata con acqua dà un precipitato fioccoso giallo che all'aria si colora lentamente in verde.

Sulla natura di questo derivato che, come evidentemente risulta, è identico a quello precedentemente descritto ed ottenuto per una reazione simile dall'acido bromolapacico, non posso nulla assicurare con certezza pel momento, nemmeno riguardo alla composizione elementare. Ed invero una combustione che volevo fare sopra un campione purificato per cristallizzazione dall'anidride acetica andò perduta, e alle altre fatte sopra la sostanza purificata per lavaggio con etere non può attribuirsi molto valore. Ecco non pertanto i risultati ottenuti:

I. gr. 0,2047 di sostanza fornirono gr. 0,5576 di anidride carbonica e gr. 0,1055 di acqua;
II. gr. 0,2262 fornirono gr. 0,6318 di anidride carbonica e gr. 0,1675 di acqua.

Ossia per 100:

	I.	II.
Carbonio	76,95	76,17
Idrogeno	5,71	5,28

Questi risultati rendono però possibile la supposizione che si tratti di un' anidride del lapacone, ammettendo, come è sotto ogni verso probabile, che il lapacone sia un polimero C_{35} H_{28} O_6 dell' acido lapacico, analogo al composto ottenuto da Stenhouse e Grones per l' azione dell' acido solforico diluito nel βnalfachinone [1], Così essendo il composto in parola corrisponderebbe alla formola $C_{30}\,H_{26}\,O_5$ per la quale si calcola:

Carbonio	77,25
Idrogeno	5,58

Io spero di potere fra non guari risolvere questo dubbio.

9. Identità dell'acido lapacico con l'acido taiguico e la groenhartina.

Prima di procedere oltre e di venire all'esame della costituzione dell'acido lapacico e dei suoi prodotti di trasformazione, credo utile e conveniente, avuto riguardo che le esperienze di Arnoudon sull'acido taiguico e quelle di Stein sulla groenhartina non escono dai limiti di quelle che ho esposto intorno all'acido lapacico, di paragonarle fra loro, onde giustificare quanto ho annunziato nell'introduzione di questa Memoria relativamente alla identità di queste tre sostanze.

Come ho ampiamente esposto nella introduzione, l'argomento principale che porta ad ammettere la identità dell'acido lapacico con l'acido taiguico si deduce dalla origine loro, essendochè l'uno e l'altro sono estratti, se non precisamente dalla stessa pianta, certamente da varietà della medesima specie; non credo su di ciò di dovere insistere avendo già esposta l'opinione di Arata, Parodi e dello stesso Arnoudon, i quali tutti riconoscono questo fatto. Mi fermerò piuttosto a fare il confronto dell'acido

[1] Annalen t. 196, p. 202.

taiguico con l'acido lapacico allo scopo, principalmente, di trovare la ragione di talune discrepanze fra i risultati miei e quelli dell' Arnoudon. Credo però anzitutto necessario di fermarmi un poco, avuto riguardo alle differenze non lievi che esistono riguardo all'acido lapacico fra i risultati miei e quelli del Siewert, sugli argomenti che tolgono ogni dubbio sulla identità delle due sostanze. Sebbene pel comportamento generale e per l'origine botanica non vi sia nemmeno da sospettare ch'io abbia avuto per le mani un prodotto diverso da quello esaminato dal Siewert, pure nel lavoro di questo chimico manca un dato importante pel confronto, cioè il punto di fusione; dall'altro lato la sola analisi da lui fatta gli ha dato:

Carbonio 76,15
Idrogeno 7,06

mentre io ho ottenuto, in media,

Carbonio 74,52
Idrogeno 5,85

Questa differenza notevole, per quanto possa a prima vista colpire, perde in gran parte il suo significato osservando che il Siewert per purificare il suo acido lapacico si è avvalso soltanto della cristallizzazione nell'alcool, ora come ho detto a suo tempo l'acido lapacico si trova mischiato ad una resina solubile nell'alcool, dalla quale difficilmente si separa per mezzo di questo solvente; l'acido da me analizzato, cristallizzato dall'etere o dalla benzina, era del tutto esente da questa resina, ed attribuisco perciò le differenze nella composizione alle impurezze ancora contenute nell'acido del Siewert. E poi sopra una sola combustione non è giusto discutere troppo!

Più difficile a spiegare riesce la formazione del glucoso che il Siewert dice di avere constatato nell'azione dell'acido solforico sull'acido lapacico. Io debbo esplicitamente dichiarare che avendo, nel corso delle mie ricerche, studiato l'azione di parecchi acidi minerali sull'acido lapacico, in nessun caso sono riuscito a constatare la formazione del glucosio. L'acido lapacico del Siewert conteneva forse del tannino? In ogni modo un fatto importante e che getta molta luce sull'argomento è questo: che, l'acido lapaconico, il quale secondo il Siewert costituisce, oltre al glucosio, il secondo prodotto dello sdoppiamento, per l'azione dell'acido solforico, dell'acido lapacico considerato come un glucoside, ha una composizione molto vicina a quella da me trovata per l'acido lapacico puro, conformemente alle altre mie esperienze secondo le quali l'acido lapacico in questa azione si trasforma in un polimero, il lapacone, e che verrebbe a corrispondere al prodotto detto dal Siewert acido lapaconico, senza curarsi del resto di constatarne il comportamento chimico.

Un' ultima osservazione mi resta a fare sul lavoro del Siewert. Egli dice di avere ottenuto un acido nitrolapacico, ma non risulta dalla lettura della sua Memoria che abbia constatato la presenza dell'azoto nel suo prodotto; io credo quindi che la formazione del nitroprodotto sia stata soltanto supposta, e non posso in conseguenza considerare questa osservazione come contradittoria al fatto da me osservato della produzione del lapacone, nell'azione dell'acido nitrico sull'acido lapacico.

Non ostante le precedenti osservazioni io credo che in complesso le discrepanze fra le mie esperienze e quelle del Siewert non siano tali da rendere possibile il

sospetto che avessimo avuto per le mani due prodotti diversi: i punti di contatto e le analogie sono troppe per potere dubitare della identità dei due corpi.

Anche per l'acido taiguico di Arnoudon, il primo argomento per provare la sua identità con l'acido lapacico è quello dell'origine botanica. Vi è inoltre il punto di fusione, trovato dall'Arnoudon a 135° e da me a 138°, e l'assieme di tutti gli altri caratteri e principalmente quelli dei sali di ammonio e di argento. Fra le discrepanze debbo citare il comportamento con la glicerina; io ho trovato che, se l'acido lapacico non viene precipitato dalla soluzione nella glicerina fredda per l' aggiunta di acqua, è soltanto perchè è in essa pochissimo solubile, mentre l'Arnoudon fa supporre che l'acido taiguico, solubile abbondantemente nella glicerina a 50° o 60°, non si possa più separarlo per l'aggiunta di acqua, Ma la più rilevante differenza si osserva nella composizione elementare; l'Arnoudon ha trovato:

Carbonio.	70,9
Idrogeno.	5,9

Però il valore di questo fatto sparisce notando che l'autore stesso dice di dare la precedente composizione centesimale con ogni riserva.

Venendo finalmente a paragonare l'acido lapacico con la groenhartina dello Stein, dobbiamo prima di tutto rilevare che anche questo chimico, come il Siewert, non si curò di determinare il punto di fusione del suo prodotto. Fra le differenze se ne nota una importantissima, che non mi riesce di potere interpretare, ed è quella relativa al comportamento col bromo: lo Stein dice di avere ottenuto un derivato bromurato contenente, in media più del 37 % di bromo, e che ammettendo la formola da me data per l'acido lapacico corrisponderebbe ad un derivato bibromurato pel quale si calcola il 40 % di bromo, mentre io non sono riuscito ad ottenere che un derivato monobromurato pel quale si calcola circa il 25 % di bromo. Il fatto però che il prodotto dello Stein si decompone già pel disseccamento alla temperatura dell'acqua bollente, mi fa sospettare cho il prodotto da lui analizzato non fosse puro e avesse contenuto la sostanza resinosa, più ricca di bromo, la cui formazione anch' io ho osservato.

Però quello che mette fuori ogni dubbio la identità dell'acido lapacico e della groenhartina, oltre al comportamento generale, è secondo me la composizione. Qui si tratta di ben quattro combustioni, fra loro concordanti e che hanno dato in media:

Carbonio	74,64
Idrogeno	5,32

mentre la media delle mie è:

Carbonio	74,52
Idrogeno	5,85

Riassumendo io credo che da quanto vengo di esporre risulti che debba ammettersi che acido lapacico, acido taiguico e groenhartina siano la stessa sostanza. Sono però dolente di non essere riuscito a procurarmi anche piccole quantità delle due ultime sostanze, perchè mi sarebbe allora riuscito facile di risolvere meglio la questione, fondandomi sulla base più solida dei fatti. Bisogna del resto tener presente che nel confronto che delle mie ricerche ho fatto con quelle del Siewert, dell' Arnoudon e dello Stein, ho avuto pochi argomenti sui quali potermi fondare, giacchè

le esperienze di questi chimici non sono certo tali da permettere di caratterizzare completamente una sostanza, ma debbono piuttosto considerarsi come saggi preliminari non sempre fatti sopra prodotti che presentavano le necessarie garanzie di purezza.

Essendo assai importante nell' ulteriore sviluppo della chimica vegetale e nella sempre crescente quantità di nuovi composti che va accumulandosi, di non accrescere la confusione con distinzioni inutili, sarebbe desiderabile che l'Arnoudon e lo Stein si prendessero la pena di riprendere lo studio dei corpi da loro scoperti onde se essi sono, come fermamente credo, identici all' acido lapacico, sia permesso fare sparire dalla scienza due nomi superflui.

10. Costituzione dell'acido lapacico e dei suoi derivati.

In quello che precede mi sono limitato ad esporre i fatti osservati nello studio dell' acido lapacico ed a descrivere i varî derivati ottenuti, ingegnandomi di escludere qualsiasi considerazione teoretica. Però io credo che i fatti raccolti durante questo studio siano sufficienti per permettere di discutere non solo, ma ben anche per istabilire la funzione chimica dell'acido lapacico, e la costituzione sua e dei principali suoi derivati.

1. Ed invero se da un lato la formazione dell'acido ftalico, nella ossidazione dell'acido lapacico per mezzo dell'acido nitrico, ravvicina notevolmente questa sostanza con l'alizarina e la purpurina, e mi ha potuto far supporre per un momento che l'acido lapacico fosse stato un derivato dell'antracene, dall' altro lato la distillazione sullo zinco e la produzione di naftalina, escludendo recisamente quel dubbio, provano che l'acido lapacico è un derivato della naftalina.

In quanto alla funzione chimica. I caratteri nettamente acidi, la composizione dei sali, la formazione e la composizione del derivato monoacetilico, il colore dei sali, la loro facile riduzione per fornire dei composti alla loro volta ossidabilissimi e tutto l'assieme dei fatti, che ho ampiamente esposto in questa Memória, non lasciano il menomo dubbio che l' acido lapacico sia un ossichinone perfettamente paragonabile all'acido naftalinico (ossinaftachinone), ed escludono recisamente la supposizione di chi ha creduto poterlo indicare col nome di *acido butilnaftil carbonico* (V. Indice dei *Berichte*, anno 1879, p. 2437).

Del resto il dubbio che l' acido lapacico sia un acido nel vero termine della parola, contenente il carbossile, oltrecchè venire completamente escluso dal comportamento generale e dagli altri fatti che ho richiamato, è reso anche inammissibile da ciò che in nessuna condizione l'acido lapacico perde dell'anidride carbonica. Io credo quindi giustificata e direi anche provata la idea che l'acido lapacico sia un monoossichinone della serie della naftalina.

Stabilito questo primo punto, il quale include la necessità di ammettere che l' acido lapacico non contenga meno di tre atomi di ossigeno, la composizione elementare porta alla conseguenza che debba contenere per lo meno 15 atomi di carbonio e che la formola più semplice debba essere quindi quella $C_{15} H_{14} O_3$, che ho ammesso in questa Memoria; formola, confermata dalla composizione dei sali che ho descritto in considerevole numero, del derivato monobromurato e di quello monoacetilico. Il punto di fusione dell'acido lapacico notevolmente basso (138°), la sua stabilità,

le proprietà marcatamente e fortemente acide, mi fanno poi escludere il dubbio che possa trattarsi di un prodotto di condensazione e mi fanno inclinare sempre più per la formola più semplice $C_{15}\ H_{14}\ O_3$, la quale essenzialmente non differisce che per un atomo d'idrogeno da quella $C_{30}\ H_{26}\ O_6$ ammessa da Stein per la groenhartina. In vero debbo dire che i risultati della composizione elementare conducono meglio a quest'ultima formola che alla mia, come si scorge gettando uno sguardo sul seguente quadro:

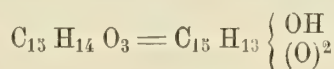
	Media delle mie analisi	Media delle analisi di Stein	Calcolato per $C_{15}\ H_{14}\ O_3$	Calcolato per $(C_{15}\ H_{13}\ O_3)_2$
Carbonio .	74,52	74,64	74,38	74,69
Idrogeno .	5,85	5,32	5,78	5,39

Purtuttavia essendo impossibile di ammettere la formola $C_{15}\ H_{12}\ O_3$, perchè richiede %:

Carbonio	75,00
Idrogeno	5,00

io inclino sempre per quella $C_{15}\ H_{14}\ O_3$ in confronto all'altra $C_{30}\ H_{26}\ O_6$, per le seguenti ragioni principali. Perchè, cioè, la composizione del sale argentico pel quale è presumibile che l'analisi abbia dato risultati più esatti si accorda ottimamente con la formola; perchè ammettendo una formola a 30 atomi di carbonio, bisognerebbe supporre o che l'unione avvenga pei due nuclei di naftalina, d'onde formazione di dinaftile per l'azione dello zinco, o pure che il collegamento dei due gruppi C_{15}, essendo impossibile che ciò sia per l'intermezzo dell'ossigeno, avvenga per mezzo degli atomi di carbonio delle catene laterali, ipotesi non giustificata da nessuna analogia. Si aggiunga a tutto ciò che essendo l'acido lapacico una sostanza che brucia difficilmente e nella cui analisi quindi si richiede il passaggio per lungo tempo di una corrente di ossigeno, non è impossibile che avvenga il trasporto di un poco di umidità nei tubi a potassa, onde il leggiero aumento nel carbonio e la piccola deficienza nell'idrogeno.

Per tutte queste ragioni ho scelto per l'acido lapacico la formola:

$$C_{15}\ H_{14}\ O_3 = C_{15}\ H_{13} \left\{ \begin{matrix} OH \\ (O)^2 \end{matrix} \right.$$

e fonderò su di essa tutte le ulteriori considerazioni.

2. Stabilito adunque che l'acido lapacico sia un ossichinone della naftalina, della formola $C_{15}\ H_{14}\ O_3$, resta ora a vedere la natura della catena o delle catene laterali, ossia resta a conoscere come siano disposti i 5 atomi di carbonio necessarî perchè dal nucleo della naftalina si pervenga al suo composto a 15 atomi di carbonio. I fatti che ho potuto raccogliere per risolvere tale quistione non sono invero numerosi; purtuttavia io credo di potermi avvicinare alla soluzione del problema prendendo ad esame i prodotti gassosi della distillazione dell'acido lapacico sullo zinco. L'analisi dei gaz che si svolgono in questa operazione e che possono considerarsi come il prodotto complementare fra la naftalina e l'acido lapacico, non è stato possibile di farla completamente; purtuttavia è stato mostrato ch'essi contengono con certezza:

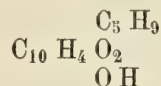
anidride carbonica, ossido di carbonio, idrogeno, butilene, un gaz dotato di azione riducente sul nitrato di argento ed altri idrocarburi non definiti.

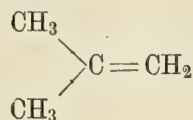
Evidentemente vi deve essere una relazione fra i gaz che si ottengono nella distillazione sulla polvere di zinco di una sostanza a nucleo aromatico e la natura delle catene laterali, non essendo presumibile che l'azione si riduca sempre ed in tutti i casi ad una riduzione; sventuratamente nessuno ch'io sappia si è prima di me occupato di questo esame, e le esperienze di Jahn ([1]) sulla distillazione degli alcooli e degli acidi sulla polvere di zinco non possono ricevere applicazione alcuna pel caso attuale. La sola conseguenza che possa dedursi con certezza dalle esperienze note si è che ordinariamente il metile unito ai nuclei aromatici non si distacca nelle distillazioni sullo zinco; esempio ne siano l'emodina e l'acido crisofanico che forniscono metilantracene, e forse anche le resine che forniscono metilnaftalina ([2]). In quanto al comportamento delle catene laterali più complesse, e principalmente di quelle che contengono più di 2 atomi di carbonio, nulla sappiamo con certezza, se si toglie quella che il timol fornisce cimene. Un solo fatto potrebbe servire di guida nelle deduzioni da fare nel caso che mi occupa ed è la formazione del propilene dall' acido santonoso ([3]), ma sventuratamente la costituzione dei derivati della santonina non è meglio conosciuta di quella dell'acido lapacico. In ogni modo però io credo che la presenza di un idrocarburo a 4 atomi di carbonio nei gaz ottenuti nella distillazione dell'acido lapacico sullo zinco, sia un argomento per ammettere ch' esso contenga una catena laterale a 5 atomi di carbonio, come forse la formazione del propilene dall'acido santonoso fa supporre ch'esso contenga una catena a 4 atomi di carbonio; credo infatti molto probabile che nelle distillazioni sullo zinco le catene laterali non escano integre, e che ciò avvenga poi tanto più difficilmente nei casi, in cui, come in quello che ci occupa, la catena laterale non è il residuo di un idrocarburo saturo, ma contenga dei doppî legami di carbonio. Questa opinione sebbene non basata sopra esperienze dirette non è priva di fondamento, ed ha la sua origine nei risultati da me ottenuti alcuni anni addietro, ma ancora inediti, scaldando diverse sostanze fra le quali l'essenza di anice con anidride fosforica; mentre secondo le esperienze di Engelhardt e Latschninoff il propile del timol esce sotto forma di propilene, io ho osservato che l'allile dell'essenza di anice fornisce etilene. Mi duole che il tempo ed anche i mezzi mi siano mancati per fare delle esperienze sopra sostanze di costituzione nota e poter così dedurre da fatti bene accertati delle conseguenze precise sul comportamento delle catene laterali nelle distillazioni con lo zinco, e mi propongo di farlo in seguito se altri nel frattempo non risolverà la quistione.

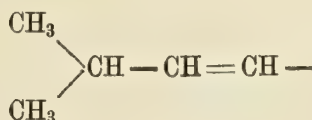
Dai fatti e dalle considerazioni esposte io credo possa dedursi come probabile che il metile costantemente e forse anche altre catene laterali provenienti da radicali saturi restino, secondo i casi, collegati al nucleo, mentre che le catene laterali contenenti dei legami doppî vengano costantemente eliminate fornendo idrocarburi d' ordine inferiore. In ogni modo io credo che, sino a prova del contrario, la supposizione

([1]) Monatshefte der Chemie, 1880, p. 378 e p. 675.
([2]) Ciamician, Gazz. chim. t. IX, p. 304.
([3]) Cannizzaro e Carnelutti. Atti dei Lincei, Transunti, vol. V, p. 283.

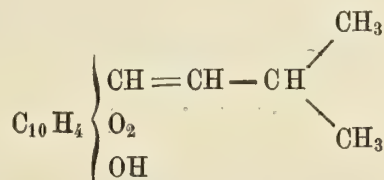
più razionale sia quella di ammettere che l'acido lapacico contenga una sola catena laterale e che perciò la sua costituzione debba rappresentarsi con la formola:

$$C_{10}H_4\begin{matrix}C_5H_9\\O_2\\OH\end{matrix}$$

In quanto poi alla costituzione del gruppo C_5H_9 essa può dedursi dalla natura del butilene ottenuto. Infatti il punto di ebollizione del bromuro $C_4H_8Br_2$ da me trovato a 149-151° non lascia dubbio ch'esso sia bromuro d'isobutilene, il quale come è noto bolle a 149°, mentre il bromuro di butilene bolle a 165-166° e quello di pseudobutilene a 159°. Essendo adunque:

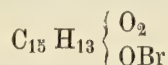
$$\begin{matrix}CH_3\\ \\CH_3\end{matrix}\!\!>C=CH_2$$

la costituzione del butilene che prende origine dall'acido lapacico, il gruppo C_5H_9 in esso contenuto deve essere

$$\begin{matrix}CH_3\\ \\CH_3\end{matrix}\!\!>CH-CH=CH-$$

e la rottura della catena avverrebbe, come ho supposto, dove ha luogo il doppio legame.

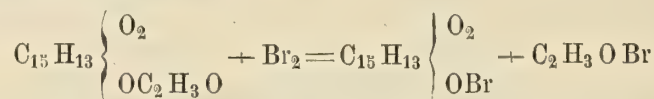
Ora che ho esposte le ragioni per le quali mi credo autorizzato a scrivere l'acido lapacico:

$$C_{10}H_4\left\{\begin{matrix}CH=CH-CH\!\!<\!\!\begin{matrix}CH_3\\CH_3\end{matrix}\\O_2\\OH\end{matrix}\right.$$

passerò a discutere la costituzione di alcuni dei suoi principali derivati.

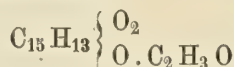
3. Ed in primo luogo mi occuperò del derivato bromurato. Certamente a nessuno farà meraviglia che l'acido lapacico pur contenendo una catena laterale con due lacune non dia col bromo un prodotto di addizione, giacchè similmente si comportano altre sostanze di costituzione analoga, come, ad esempio, l'essenza di anice. Mi occuperò quindi di stabilire il posto che nell'acido bromolapacico occupa il bromo, se cioè la sostituzione avvenga nel nucleo della naftalina, nella catena laterale o nell'idrogeno dell'ossidrile. A me sembra che quest'ultimo caso sia il vero e che la costituzione dell'acido bromolapacico sia data dalla formola:

$$C_{15}H_{13}\left\{\begin{matrix}O_2\\OBr\end{matrix}\right.$$

Gli argomenti che mi portano a questa conclusione sono parecchi. Da un lato il fatto che il derivato bromurato non ha più i caratteri di un acido e non si scioglie nei carbonati alcalini, nè negli alcali; dall'altro la sua formazione tanto netta per l'azione

del bromo sull'acido acetillapacico; formazione che si spiega con la maggiore semplicità ammettendo il bromoossile

$$C_{15}H_{13}\left\{\begin{matrix} O_2 \\ OC_2H_3O \end{matrix}\right. + Br_2 = C_{15}H_{13}\left\{\begin{matrix} O_2 \\ OBr \end{matrix}\right. + C_2H_3OBr$$

e che riesce difficile a poter spiegare diversamente. Inoltre io credo che il fatto che l'acido lapacico si scioglie senza alterazione nell'acido solforico, confermi il mio modo di vedere, perchè se il bromo fosse contenuto nel nucleo allora a me sembra che l'acido solforico avrebbe dovuto agire come sull'acido lapacico dando origine ad un lapacone bromurato. Finalmente il comportamento con l'acetato sodico e l'anidride acetica si spiega meglio, come vedremo in seguito, ammettendo nell'acido bromolapacico la esistenza del bromoossile. Del resto gli esempi nei quali il bromo si sostituisce nell'ossidrile fenico delle sostanze aromatiche non sono rari e basta citare la pentobromoorcina, il bromotribofenol recentemente studiato da Benedikt (¹) e la bromocanfora (²).

4. Del derivato monoacetilico è superfluo occuparsi, giacchè il suo modo di formazione e la sua decomposizione per l'azione della potassa non hanno bisogno d'interpretazione alcuna, esso è evidentemente:

$$C_{15}H_{13}\left\{\begin{matrix} O_2 \\ O.C_2H_3O \end{matrix}\right.$$

Merita però di attirare la nostra attenzione l'altro composto, fusibile a 131-132°, che si forma nell'azione prolungata dell'acetato sodico e dell'anidride acetica sull'acido lapacico. Guidato dal fatto osservato per la prima volta da Sarow (³) e recentemente confermato da Buschka (⁴) che cioè il chinone per l'azione dell'acetato sodico e dell'anidride acetica vien trasformato in diacetilidrochinone, la prima idea che mi nacque fu che potesse trattarsi di un derivato triacetilico prodotto per ulteriore trasformazione di quello monoacetilico in modo del tutto simile come dal chinone si forma il diacetilidrochinone; però un derivato triacetilico $C_{15}H_{13}(OC_2H_3O)_3$ richiede %:

Carbonio	68,10
Idrogeno	5,94

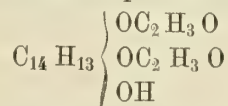
numeri che si allontanano considerevolmente da quelli forniti dall'esperienza. Avrebbe potuto anche trattarsi di un derivato biacetilico $C_{15}H_{13}(OH)(C_2H_3O_2)_2$ pel quale si calcola:

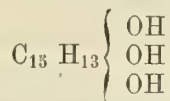
Carbonio	69,93
Idrogeno	5,52

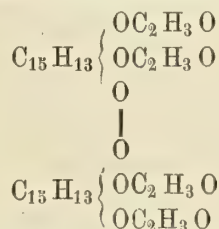
cioè numeri che abbastanza bene si accordano con quelli forniti dall'esperienza; ma contro questa supposizione parlano altri argomenti. Ed invero se da un lato non ripugna ad ammettersi che il gruppo O_2 chinonico si trasformi per l'azione dell'anidride acetica e dell'acetato sodico in $\begin{matrix} OC_2H_3O \\ OC_2H_3O \end{matrix}$ dall'altro lato non si trova una

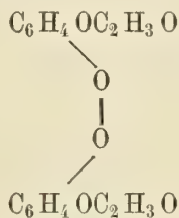
(¹) Annalen t. 199, p. 127.
(²) R. Schiff, Gazz. chim. t. X, p. 334.
(³) Berichte ecc. di Berlino, t. XII, p. 680, 1879.
(⁴) Berichte t. XIV, p. 1226, 1881.

ragione plausibile della formazione del derivato biacetilico in vece di quello triacetilico; ed anche passando sopra di ciò resta sempre la difficoltà che il composto

$$C_{14}H_{13}\begin{cases} OC_2H_3O \\ OC_2H_3O \\ OH \end{cases}$$

dovrebbe ancora conservare i caratteri fenici, e per la saponificazione dovrebbe trasformarsi in

$$C_{15}H_{13}\begin{cases} OH \\ OH \\ OH \end{cases}$$

dal quale dovrebbe potersi ritornare facilmente all'acido lapacico. Or, come ho esposto a suo tempo, nulla di tutto ciò ha luogo e dal derivato acetilico in esame mi è stato impossibile rigenerare l'acido lapacico. Io credo perciò probabilissimo ch'esso non sia un derivato triacetilico, nè tampoco uno biacetilico dell'acido lapacico, ma che abbia invece la costituzione rappresentata dalla formola:

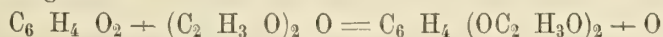
$$\begin{array}{l} C_{15}H_{13}\begin{cases} OC_2H_3O \\ OC_2H_3O \\ O \end{cases} \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad O \\ C_{15}H_{13}\begin{cases} OC_2H_3O \\ OC_2H_3O \end{cases} \end{array}$$

In altri termini l'azione dell'acetato sodico e dell'anidride acetica sarebbe in questo caso analoga a quella osservata da Sarow pel chinone, ma la riduzione, invece di essere completa, si limiterebbe alla formazione di un chinidrone, ed alla successiva acetilizzazione di esso, e della stessa guisa che il chinone, dietro quanto è noto, potrebbe fornire il composto:

$$\begin{array}{l} C_6H_4OC_2H_3O \\ \qquad \diagdown \\ \qquad\quad O \\ \qquad\quad | \\ \qquad\quad O \\ \qquad \diagup \\ C_6H_4OC_2H_3O \end{array}$$

similmente, non deve arrecar meraviglia nè deve sembrar strano che l'acido acetillapacico:

$$C_{15}H_{13}(OC_2H_3O)O_2$$

fornisca il composto da me indicato. L'analogia non potrebbe essere più completa.

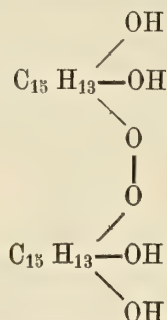
La differenza sta nel solo risultato, e mentre col chinone la riduzione è completa e si ottiene il diacetilidrochinone, nel caso dell'acido lapacico si limita alla formazione di un derivato del corrispondente chinidrone. Si osservi ancora per finire che in tutte le reazioni analoghe a quella osservata da Sarow nella trasformazione del chinone in diacetilidrochinone, deve esercitarsi un'azione ossidante, come si scorge dalla equazione seguente:

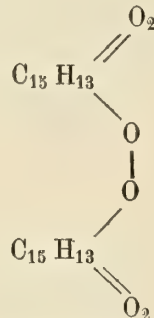
$$C_6H_4O_2 + (C_2H_3O)_2O = C_6H_4(OC_2H_3O)_2 + O$$

Or questa azione in un caso può esercitarsi distruggendo o profondamente alterando una porzione del prodotto, come sembra ne sia il caso pel chinone, mentre in altre

condizioni e con sostanze più stabili può l'ossigeno servire ad operare l'unione di due molecole del prodotto principale, come tutto fa supporre che avvenga per l'acido lapacico.

5. Ammesso che il derivato, che si produce nell'azione dell'acetato sodico e dell'anidride acetica sull'acido lapacico, abbia la costituzione da me supposta, emerge facilmente la natura della sostanza fusibile a 140-141°, che da esso si forma per l'azione della potassa o dell'ammoniaca in soluzione nell'alcool; basta tener presente che tal prodotto non è il derivato di una semplice saponificazione, ma che dietro questa ha luogo una ossidazione; ed infatti non ho mancato di notare a suo luogo che le soluzioni che derivano dall'azione delle sostanze alcaline sul derivato acetilico sono in principio gialle, e che si colorano in rosso in seguito pel contatto dell'aria.

L'azione degli alcali, eliminando l'acetile, darebbe origine al composto:

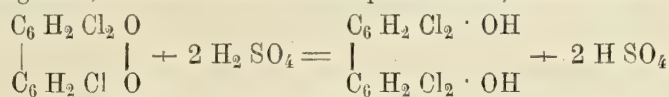
$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad OH \\ \quad\quad / \\ C_{15}H_{13}-OH \\ \quad\quad \backslash \\ \quad\quad\quad O \\ \quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad O \\ \quad\quad / \\ C_{15}H_{13}-OH \\ \quad\quad \backslash \\ \quad\quad\quad OH \end{array}$$

il quale in soluzione alcalina ed in presenza dell'ossigeno atmosferico si trasformerebbe nell'altro:

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad O_2 \\ \quad\quad // \\ C_{15}H_{13} \\ \quad\quad \backslash \\ \quad\quad\quad O \\ \quad\quad\quad | \\ \quad\quad\quad O \\ \quad\quad / \\ C_{15}H_{13} \\ \quad\quad \backslash\backslash \\ \quad\quad\quad O_2 \end{array}$$

La sostanza quindi fusibile a 141-142° sarebbe una specie di dichinone, e tutto il suo comportamento corrisponde, almeno pei dati che fin ora ho potuto raccogliere, a questo modo di considerarla. Anche la composizione elementare si accorda con tale supposizione.

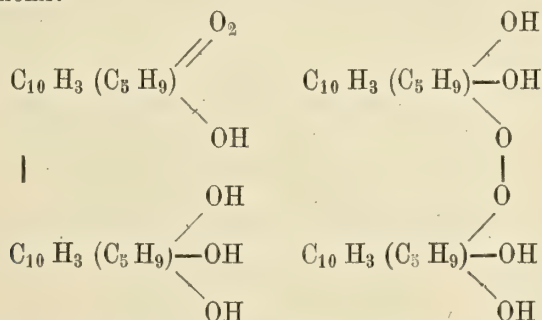
6. Debbo finalmente occuparmi della costituzione del lapacone. È questo forse il punto più arduo e più importante, e che pur tuttavia è di maggiore interesse che sia chiarito trattandosi di un composto che trova il suo corrispondente in ogni chinone, come ho potuto assicurarmi.

Due fatti hanno relazione, a mia memoria, e possono richiamarsi nel discutere la trasformazione che l'acido lapacico tanto nettamente subisce trasformandosi in lapacone, per l'azione degli acidi solforico e nitrico. Il primo di questi fatti è dovuto al compianto dott. Giuseppe Magatti, il quale ha osservato che scaldando con acido

solforico ordinario il tetracloro ed il tetrabromodifenilchinone, essi vengono ridotti nei corrispondenti idrochinoni ossia in tetracloro o in tetrabromodifenol ([1]). A prima vista però si scorge che qui trattasi di cosa affatto diversa; ha luogo una semplice riduzione, che acquista maggior interesse per la difficoltà d' interpretarla essendochè l'acido solforico non subisce alterazione apparente; non è improbabile, a mio modo di vedere che l'acido solforico subisca una trasformazione analoga a quella dell'acido manganico che passa in permanganico, e che si formi acido persolforico, come indica l'equazione:

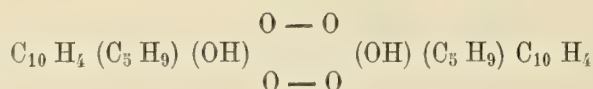
$$\begin{array}{l} C_6\,H_2\,Cl_2\,O \\ |\qquad\quad | \\ C_6\,H_2\,Cl\;\;O \end{array} + 2\,H_2\,SO_4 = \begin{array}{l} C_6\,H_2\,Cl_2 \cdot OH \\ | \\ C_6\,H_2\,Cl_2 \cdot OH \end{array} + 2\,H\,SO_4$$

In ogni modo la trasformazione dell'acido lapacico in lapacone non può essere di questo genere.

L'altra maniera di agire dell'acido solforico sui chinoni che ha maggiore analogia con quella da me osservata, fu constatata da Stenhouse e Groves ([2]) col βnalfochinone. Questo composto leggermente riscaldato con acido solforico diluito, si trasforma quantitativamente in una sostanza della medesima composizione elementare che quei chimici chiamano *dinaftildichinidrone* e rappresentano con la formola $C_{20}\,H_{12}\,O_4$; tale sostanza ossidata genera il *dinaftildichinone* $C_{20}\,H_{10}\,O_4$ e ridotta il *dinaftildichinol* $C_{20}\,H_{10}\,(OH)_4$, composti tutti che Stenhouse e Groves considerano come derivati del dinaftile, ammettendo che l'ultimo di essi contenga quattro ossidrili ed il primo due: però è bene osservare fin da ora che ciò non confermano con nessuna esperienza e che tutte le conoscenze su questi composti si riducono alle trasformazioni indicate per riduzione e per ossidazione. A me sembra, senza del resto accettare di peso le idee di Stenhouse e Groves, che la trasformazione dell'acido lapacico in lapacone sia perfettamente analoga a quella che il βnaftochinone subisce per l'azione dell'acido solforico, trasformazione che come accennarono Stenhouse e Groves sembra generale per tutti i chinoni; io ho provato che ciò non è generalmente vero, e che mentre il toluochinone dà un prodotto di condensazione, il timochinone si scioglie senza alterarsi nell'acido solforico. — Ritornando intanto all'argomento principale ed in attesa dei risultati di esperienze più complete che ho in corso, io credo che pur riconoscendo la più completa analogia fra il lapacone ed il dinaftildichinidrone non si possa al primo attribuire una costituzione corrispondente a quella supposta da Stenhouse e Groves pel loro composto; ed invero il lapacone dovrebbe allora corrispondere ad uno dei seguenti schemi:

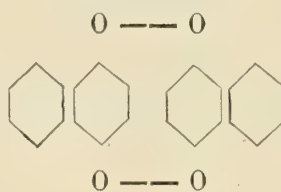
$$\begin{array}{l} C_{10}\,H_3\,(C_5\,H_9) \begin{array}{l} /\!/ O_2 \\ \backslash\, OH \end{array} \\ | \\ C_{10}\,H_3\,(C_5\,H_9) \begin{array}{l} /\, OH \\ -OH \\ \backslash\, OH \end{array} \end{array} \qquad \begin{array}{l} C_{10}\,H_3\,(C_5\,H_9) \begin{array}{l} /\, OH \\ -OH \\ \backslash\, O \end{array} \\ \qquad\qquad\qquad\quad | \\ C_{10}\,H_3\,(C_5\,H_9) \begin{array}{l} /\, O \\ -OH \\ \backslash\, OH \end{array} \end{array}$$

([1]) Inaugural Dissertation, p. 38. Berlin, 1880.
([2]) Journal of the Chemical Society, 1878; Annalen t. 196, p. 202.

Nel primo caso dovrebbe essere ancora dotato di proprietà nettamente acide, e probabilmente anche nel secondo; inoltre tanto nel primo che nel secondo caso, a giudicarne dalle analogie dovrebbe essere una sostanza ossidabilissima. Invece esso è insolubile negli alcali e si forma nientedimeno che in presenza dell' acido nitrico concentrato. È evidente adunque che queste formole di costituzione non gli convengano. Se a tutto ciò si aggiunge che per la distillazione sullo zinco il lapacone non fornisce dinaftile restano pure escluse tutte le formole di struttura nelle quali dovrebbero ammettersi due nuclei di naftalina direttamente congiunti pel carbonio.

Per tutte le considerazioni precedenti io credo molto probabile che il lapacone abbia la costituzione seguente:

$$C_{10}H_4(C_5H_9)(OH)\begin{matrix}O-O\\ \\ O-O\end{matrix}(OH)(C_5H_9)C_{10}H_4$$

ossia che i due nuclei della naftalina siano congiunti per mezzo dei quattro atomi di ossigeno che prima costituivano i due gruppi chinonici, come mostra la seguente figura schematica:

O —— O

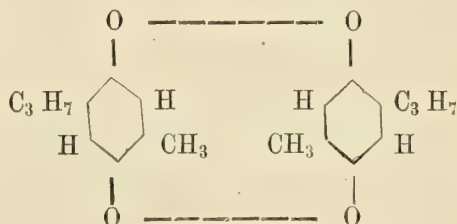
O —— O

Con questa ipotesi resta spiegato il fatto che il lapacone non fornisce dinaftile, che non gode più di proprietà acide; esso sarebbe un fenol il quale contenendo per una molecola tanto complessa due soli ossidrili ed in due nuclei diversi di naftalina deve avere delle proprietà feniche assai poco pronunziate.

Una costituzione simile a quella che ho ammesso per il lapacone deve avere il polimero del timochinon, fusibile a 201°, ottenuto da Liebermann [1] per l'azione della luce sul timochinone, giacchè non può supporsi ch' esso contenga uniti direttamente i due nuclei carbonici, poichè ridotto con acido jodidrico e fosforo rosso, o con acido cloridrico e zinco si trasforma in idrotimochinone. La formola

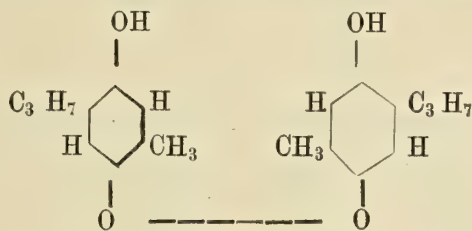
O —————— O

C_3H_7 H H C_3H_7

H CH_3 CH_3 H

O —————— O

[1] Berichte ecc. di Berlino, t. X, p. 2677.

spiega pure che come primo prodotto di riduzione si forma un composto $C_{20} H_{26} O_4$, il quale passa poi in idrotimochinone; tale composto sarebbe infatti:

```
           OH                 OH
           |                  |
C3 H7 /‾‾‾‾\ H          H /‾‾‾‾\ C3 H7
    H \____/ CH3      CH3 \____/ H
           |                  |
           O  ——————————————  O
```

Del resto io comprendo che tutte queste considerazioni non hanno che un valore molto limitato, ed ho voluto fermarmici un momento al solo scopo di mostrare l' importanza e la portata dell'argomento che mi propongo di studiare, partendo da chinoni ed ossichinoni di costituzione conosciuta, e tentando di vedere se dal dinaftile sia possibile di risalire al composto di Stenhouse e Groves; tutto però mi fa supporre che nemmeno esso contenga direttamente riuniti pel carbonio due nuclei di naftalina.

Esperienze fatte al R. Osservatorio del Campidoglio per la determinazione del valore della gravità.

Memoria del prof. LORENZO RESPIGHI

letta nella seduta del 5 giugno 1881.

Se nella misura della gravità non si avesse altro scopo che quello di ottenere una unità, un tipo di misura per valutare le altre forze della natura, forse i risultati già ottenuti dai varî esperimenti fatti si potrebbero ritenere sufficienti alla soluzione del problema, trovandosi già il valore di questa forza circoscritto in limiti di approssimazione più ristretti e concordanti di quelli sperabili nella misura delle altre forze.

Ma qualora la misura della gravità sia destinata alla soluzione di questioni o problemi speciali, nei quali il suo valore debba servire di controllo ad elementi o quantità aventi relazione colla gravità stessa, ma dedotti indipendentemente dalla medesima per vie diverse, e con processi di esattezza o rigore quasi geometrico, allora si presenta la necessità di misurare questa forza colla massima precisione e in modo sistematico, quale si addice alla natura delle questioni nelle quali essa viene introdotta come termine di confronto.

Il bisogno di questa precisione od esattezza nella misura della gravità si fece imperiosamente sentire ai geodeti, quando si proposero di verificare per mezzo delle variazioni della gravità la forma della terra, e di indicare la causa delle anomalìe od irregolarità locali, accusate nella superficie terrestre dalle operazioni geodetiche: e ben presto si riconobbe che i valori, già trovati in varî luoghi della terra, erano insufficienti allo scopo per difetto di esattezza, per iscarsità di numero e per irregolarità di distribuzione sui meridiani e sui paralleli terrestri.

L'Associazione geodetica internazionale per la misura dei gradi del meridiano centrale europeo, avendo deciso di basare le sue ricerche e i suoi studî anche su questo importante elemento, e cioè sulle variazioni della gravità da luogo a luogo, raccomandava vivamente alle Commissioni speciali dei varî paesi oltre ai lavori geodetici anche la misura della gravità nelle stazioni principali; indicando come preferibile in questa operazione l'uso del pendolo a *reversione*, il quale considerato tanto dal lato teorico che pratico sembrava assicurare l'esattezza e l'uniformità nei risultati meglio che gli altri apparati finora conosciuti ed usati.

Ben presto però veniva dimostrato dall'esperienza o dal fatto che la fiducia riposta nel pendolo a *reversione* non era del tutto giustificata; poichè nonostante la grande valentìa dei costruttori di questi stromenti, e non ostante la grande abilità

degli operatori, i risultati delle esperienze fatte in varie località erano ben lontani dal presentare l'uniformità e l'accordo che tali stromenti avevano fatto sperare.

Quantunque gli studî, fatti da persone molto competenti su queste anomalie od irregolarità nei risultati ottenuti da' varî pendoli a reversione, abbiano mostrato che esse in gran parte almeno sono prodotte da instabilità o da difetti di costruzione dei pendoli, che probabilmente potranno essere corretti, pure anche ammettendo la possibilità di questa correzione o rimedio, è incontestabile che la costruzione dello strumento presenterà sempre grandi difficoltà, e riescirà quindi di grande costo e col pericolo di facili alterazioni nel suo uso.

La Commissione italiana per la misura dei gradi, occupata nelle operazioni geodetiche ed astronomiche, non aveva potuto ancora prendere parte a questi studî e ricerche sulla determinazione della gravità; e soltanto nell'ultima sua riunione del giugno 1880 a Firenze affidava al prof. Lorenzoni, direttore del R. Osservatorio di Padova, l'incarico di accordarsi coi membri incaricati dalle altre Commissioni sul metodo e sugli strumenti, coi quali si dovevano intraprendere in Italia, tanto gli studî preparatorî, quanto le operazioni definitive sulla misura della gravità nelle nostre principali stazioni.

Quantunque si abbia tutta la certezza che il prof. Lorenzoni soddisferà egregiamente all'incarico affidatogli, facendo costruire il pendolo a reversione in modo da renderlo esente da tutti i difetti verificati nei pendoli finora costruiti, e stabilendo in base alle sue ricerche le norme più sicure per l'uso di questo stromento; pure non mi è parso del tutto inutile di fare nel frattanto alcuni studî ed esperimenti sopra un altro modo di determinare la gravità, nel quale confesso di avere molta fiducia, e che per la sua semplicità, facilità di uso e risparmio di spese ritengo possa in molti casi rendere utili servigî.

Nel 1852 ripetendo l'esperimento di Foucault sulla deviazione del piano di oscillazione del pendolo libero, nella chiesa di s. Petronio a Bologna, con un pendolo di circa 42 metri di lunghezza, volli approfittare del medesimo per dedurre la lunghezza del pendolo semplice che batteva il secondo di tempo medio in quella località; ciò che il Secchi aveva già fatto per Roma nella chiesa di s. Ignazio con un pendolo lungo 32 metri.

Quantunque il metodo adoperato per la misura della durata delle oscillazioni del pendolo, e specialmente il processo usato nella misura della lunghezza del medesimo fossero molto imperfetti, e quindi tali da non poterne sperare altro che risultati grossolanamente approssimativi, pure il conveniente accordo verificato nei risultati delle varie esperienze mi trasse nella convinzione, che dagli esperimenti fatti coi pendoli lunghi e pesanti si potevano sperare risultati abbastanza esatti per la misura della gravità, quando si fossero convenientemente migliorati i mezzi per la determinazione della durata delle oscillazioni, e per la misura della lunghezza del filo.

Ma se ad ottenere risultati esatti fossero necessarie nei pendoli lunghezze dell'ordine di quelle usate a Roma e Bologna, è evidente che oltre alla grande difficoltà nella misura della lunghezza del pendolo, si andrebbe contro l'inconveniente di non potere usare questo mezzo, altro che nella determinazione del valore assoluto della gravità in quei luoghi, dove accidentalmente si trovano edifizî di tale altezza

e struttura da potervi mettere in attività pendoli così giganteschi: mentre pei bisogni della scienza sono ordinariamente prescritte le località nelle quali interessa la determinazione di questo elemento, e dove non sono ordinariamente sperabili le indicate condizioni per la collocazione di lunghi pendoli.

Dalle prove fatte con pendoli lunghi e pesanti a Roma e Bologna, se viene assicurata la loro convenienza ed utilità nella misura della gravità, non è però dimostrato che ad ottenere buoni risultati siano assolutamente necessarie le enormi lunghezze ivi accidentalmente disponibili, e non resta esclusa la possibilità di raggiungere lo scopo e forse meglio anche con pendoli ridotti a più moderate lunghezze.

Non è possibile di stabilire *a priori* la lunghezza da darsi ad un pendolo composto per ottenere la maggiore esattezza nel rapporto della lunghezza del pendolo semplice, ad esso corrispondente, col quadrato della durata della sua oscillazione, dal quale rapporto risulta il valore della gravità; dipendendo ciò da un complesso di condizioni e dati, in parte noti e in parte incogniti, le cui influenze non possono forse assoggettarsi al calcolo.

Nell'applicazione del pendolo alla misura della gravità si suppone che la durata osservata delle oscillazioni si possa ridurre al valore che essa avrebbe, qualora il moto oscillatorio dipendesse da questa sola forza; per cui è necessario di sottrarre possibilmente il pendolo stesso a tutte le influenze che potrebbero alterare questa durata, od almeno lasciarlo soggetto soltanto a quelle delle quali possono calcolarsi gli effetti con sufficiente approssimazione.

A questo riguardo mi sembra che il pendolo a filo libero, ossia tale che per la sua lunghezza e costruzione presenti regolarmente il fenomeno di Foucault, sia il più soddisfacente, perchè in esso il moto di oscillazione è liberamente prodotto dalla gravità col solo contrasto della resistenza del filo, per cui le oscillazioni si mantengono naturalmente piane o leggermente coniche; mentre nei pendoli a filo di Borda e di Bessel, e in generale in tutti quei pendoli a filo, nei quali il piano di oscillazione è costretto a partecipare alla componente del moto rotatorio della terra attorno alla verticale, l'azione della gravità trovasi, specialmente alle alte latitudini, combinata con altre forze, che rendendo il moto oscillatorio più complesso potrebbero forse alterare la durata delle oscillazioni.

Ammettendo nel pendolo a filo come necessaria la condizione, che esso presenti regolarmente il fenomeno di Foucault, è evidente che viene in certo modo fissata la lunghezza minima da darsi al medesimo, non potendosi accorciare il pendolo oltre quel limite, al di là del quale il fenomeno di Foucault diventa incompleto od irregolare: ed è appunto a questa norma che io mi decisi di attenermi nelle esperienze da farsi col pendolo libero.

Il pendolo da me usato è formato da una palla o sfera di piombo ben lavorata, del peso di circa kilogrammi 9 e $\frac{1}{2}$, attraversata secondo un diametro da una spina di ferro portante ad una estremità un indice sottile, o punta conica pure di ferro, della lunghezza di sei centimetri, e dall' altra estremità una ghiera di ottone a vite e perforata, per introdurvi e fissarvi il filo di acciajo che deve sostenere la palla.

L'apparato di sospensione del pendolo consiste in una specie di morsa d'acciajo formata di tre settori cilindrici, che stretti insieme da una manovella a vite lasciano

un sottile pertugio o foro lungo l'asse del cilindro, nel quale il filo è uniformemente stretto e premuto in tutto il suo perimetro: dimodochè la sua sezione alla base del cilindro, che dovrebbe costituire il centro di movimento o la sommità del pendolo, offre in tutto il suo contorno eguale resistenza alla flessione del filo, la cui grossezza è di circa 0,7 di millimetro.

Volendo fare gli esperimenti nell' Osservatorio, approfittai della tromba di una scala convenientemente difesa contro le correnti di aria, nella quale però non poteva disporre altro che di una limitata altezza di circa otto metri. Fissata stabilmente ai muri della scala una robusta trave di abete, venne nella medesima solidamente invitato l'apparecchio di sospensione del pendolo.

Montato il pendolo, si fecero alcune prove per verificare se il piano di oscillazione presentava il fenomeno di Foucault, e si trovò di fatto che esso girava regolarmente di Oriente in Occidente colla velocità angolare ω sen φ, essendo ω la velocità angolare della rotazione della terra e φ la latitudine del luogo, perdurando in questa regolarità di movimento almeno per sei o sette ore; e lo stesso risultato si ebbe anche riducendo la lunghezza del pendolo a circa cinque metri.

Dopo questa verifica volendo usare il pendolo per la determinazione della gravità o della lunghezza del pendolo semplice che batte il secondo in Roma, si presentava però la difficoltà di numerare le oscillazioni compite in un dato tempo, non potendosi ricorrere al solito mezzo delle *coincidenze,* a cagione del moto del piano di oscillazione: ma a ciò aveva già pensato di provvedere, ricorrendo al metodo cronografico, convenientemente applicato a registrare gli istanti dei passaggi del pendolo sulla verticale in modo intermittente, e cioè soltanto di ora in ora, od anche di due in due ore; e ciò allo scopo di non alterare sensibilmente la durata delle oscillazioni col frequente passaggio della corrente pel pendolo, o coi frequenti contatti necessarî per la chiusura del circuito elettrico.

Questo circuito doveva chiudersi colla punta od indice di ferro, posto nella parte inferiore del pendolo nell'esatta direzione del filo, e comunicante con uno dei poli della pila, all'istante in cui essa punta passando per la verticale sarebbe venuta a leggero e momentaneo contatto con una debole molla, o con una goccia di mercurio posta in comunicazione coll'altro polo della pila.

Per raggiungere lo scopo era però necessario che, malgrado la brevità del contatto, il passaggio della corrente si facesse con molta regolarità e con sufficiente intensità per ottenere il segnale ben marcato sul cronografo; e ciò tanto nelle oscillazioni ampie come nelle più ristrette, ed anche nel caso che l'oscillazione non fosse esattamente piana; soddisfacendo poi alla condizione che la resistenza del contatto fosse abbastanza debole per non alterare sensibilmente il moto del pendolo. La soluzione pratica di questo problema presentava non lievi difficoltà, ma dopo molte prove e tentativi mi sembra di esservi pienamente riescito col seguente congegno.

In un piccolo canaletto rettangolare, della larghezza e profondità di circa 3 millimetri e della lunghezza di 6 centimetri, scavato in un regolo di legno, cogli orli leggermente e regolarmente arrotondati, veniva versato del mercurio in tale quantità da riempire il canaletto stesso fino ai suoi orli, in modo da ottenere la superficie convessa del mercurio di forma esattamente cilindrica e di una determinata

curvatura. Il regolo di legno era fissato sopra un piatto o disco di ottone sostenuto da tre viti calanti, per cui potevasi alzare od abbassare secondo il bisogno, ed anche livellarlo, in modo da portare la superficie del mercurio colla sua parte più elevata e centrale a leggiero contatto colla estremità dell'indice del pendolo; col quale contatto era chiuso il circuito elettrico, perchè il filo comunicante con uno dei poli della pila, fissato nel fondo del canaletto, trovavasi immerso nel mercurio. Con questo mezzo semplicissimo si aveva il vantaggio di poter ricavare l'istante del passaggio del pendolo sulla verticale anche quando l'oscillazione era sensibilmente conica, deducendolo dal medio dei tempi registrati sul cronografo pei due contatti di andata e ritorno in due successive oscillazioni.

Rimaneva però a superarsi un' altra difficoltà, ed era quella di ottenere sul cronografo egualmente marcati e distinti i segnali dei contatti, tanto nelle ampie come nelle oscillazioni ristrette, mentre collo stesso grado di contatto dell'indice del pendolo colla superficie del mercurio i segnali nel primo caso sarebbero riesciti necessariamente più deboli e corti che nel secondo. Essendosi da apposite esperienze dedotto che, in causa della grande massa del pendolo, la resistenza del mercurio influiva ben poco sulla durata delle oscillazioni, anche quando l' indice nel suo passaggio sulla verticale si immergeva alquanto nella massa del mercurio, si trovò che si poteva evitare l'indicato inconveniente portando la superficie del mercurio ad un livello un poco più elevato per registrare le oscillazioni più ampie, abbassandolo invece per le più ristrette; ciò che si poteva fare senza pericolo di alterare le condizioni fondamentali dell'esperimento, quando l'uso del cronografo si fosse limitato a registrare soltanto poche oscillazioni fra lunghi intervalli di tempo.

Ma l'esperienza mi suggeriva un modo più semplice per ovviare a quest'inconveniente, e cioè quello di disporre al principio di ogni esperienza l' asse del cilindro di mercurio non perpendicolare alla direzione iniziale del piano di oscillazione, ma inclinato invece di un angolo di circa 45°, di occidente in oriente dalla parte del Sud, per cui accadeva, che mentre nelle prime oscillazioni, le più ampie, l'indice del pendolo sfiorando obliquamente la superficie del mercurio, la durata del contatto veniva naturalmente allungata, e quindi resa più facile la registrazione; nel progresso dell' esperimento invece impicciolendosi le oscillazioni, siccome pel fenomeno di Foucault il loro piano si avvicinava alla perpendicolarità all'asse del cilindro di mercurio, così la linea di contatto diventava più breve, e quindi il segnale sul cronografo abbastanza corto, malgrado la diminuita velocità del pendolo. L'inclinazione a circa 45° del piano iniziale di oscillazione coll'asse del cilindretto di mercurio fu adottata per la ragione, che volendosi protrarre l'esperienza a circa 4 o 5 ore, verso la fine del medesimo il detto piano ed asse diventassero prossimamente perpendicolari, e quindi alla minima velocità del pendolo corrispondesse la minima estensione del contatto.

Certamente il metodo cronografico da me adottato, e in generale qualunque altro metodo a registrazione, non sarebbe ragionevolmente e con profitto applicabile ai pendoli destinati alla misura della gravità, qualora si dovesse, come alcuni pretendono, ridurre le oscillazioni del pendolo a piccolissimi archi; perchè in questo caso il segnale cronografico non potrebbe fissare l'istante del passaggio sulla verticale altro che in modo grossolanamente approssimativo.

A questo riguardo però mi sembra che, se non è conveniente e ragionevole l'uso delle oscillazioni molto ampie, perchè la riduzione della loro durata alla durata della oscillazione infinitamente piccola è sempre assai incerta, d'altra parte però anche l'uso delle oscillazioni molto ristrette possa presentare un grave inconveniente, quello cioè di alterare la durata della oscillazione col rendere più influenti le cause perturbatrici del fenomeno e le inevitabili imperfezioni del pendolo.

Infatti, se noi col restringere le oscillazioni ci accostiamo alla ideale condizione delle oscillazioni infinitamente piccole, sulle quali si basa il calcolo per la determinazione della gravità, d'altra parte però ci allontaniamo maggiormente dalla supposta condizione del filo di grossezza infinitesima, o trascurabile in confronto alla grandezza dell'arco descritto dal pendolo. Quando l'arco di oscillazione non è molto grande in confronto della grossezza del filo, mi sembra che in prossimità alla verticale, per una parte dell'arco, l'estensione della quale deve dipendere dalla grossezza o diametro del filo, l'azione della gravità sul moto del pendolo è paralizzata o distrutta, e che perciò il pendolo, descrivendo questo tratto dell'arco colla sola velocità preconcepita, debba consumarvi un tempo più o meno piccolo, che va ad aumentare la durata apparente delle oscillazioni.

Quantunque una piccola perdita di tempo debba per la stessa causa verificarsi anche nelle oscillazioni ampie, pure essa diventa trascurabile per la grande velocità colla quale viene percorso il piccolo tratto di arco nel quale è soppressa l'azione od accelerazione della gravità.

Per la stessa ragione mi sembrano da escludersi nei pendoli rigidi od a reversione le oscillazioni troppo ristrette, perchè la grossezza dei taglienti dei prismi o coltelli, la non esatta coincidenza dei medesimi sulla stessa linea e le possibili irregolarità nella loro forma potrebbero sensibilmente aumentare la durata delle oscillazioni; e forse, in alcuni casi almeno, potrebbero con questa causa spiegarsi alcune anomalie dei risultati ottenuti nella misura della gravità.

Per le esposte ragioni essendosi stabilito che l'ampiezza delle oscillazioni dovesse essere compresa fra i limiti approssimativi da $3°$ a $30'$, l'indicato metodo di registrazione riesciva soddisfacentissimo, potendosi dedurre dai segnali cronografici i passaggi del pendolo sulla verticale con approssimazione non minore del mezzo centesimo di secondo.

Come si è già accennato, la registrazione degli istanti di questi passaggi doveva essere intermittente, limitata cioè a prendere un piccol numero di oscillazioni al principio ed alla fine di ogni esperienza, o a lunghi intervalli di tempo durante la medesima; e ciò allo scopo di evitare il pericolo di una alterazione nella durata delle oscillazioni: perciò registrato un certo numero di oscillazioni si doveva interrompere il contatto dell'indice del pendolo col cilindretto di mercurio, sfiorando il menisco del mercurio stesso con una punta di ferro in modo, da sottrarvi qualche goccia, la quale poi sarebbesi aggiunta al momento che si voleva ristabilire il contatto; operazione semplicissima, eseguibile in brevissimo tempo, e senza perturbare menomamente il moto del pendolo.

Montato il pendolo e l'apparato registratore, si fecero molte serie di esperienze per verificare la regolarità della registrazione cronografica, e per valutare l'influenza esercitata sulla durata delle oscillazioni dal contatto dell'indice del pendolo colla

superficie del mercurio, e si trovò che in realtà la durata dell'oscillazione era leggermente aumentata, ma che tale aumento si rendeva appena sensibile prolungando il contatto e la registrazione per parecchie centinaja di oscillazioni; dimodochè limitandosi a poche oscillazioni tale influenza diventava assolutamente trascurabile.

Questo modo di registrazione procurava anche il vantaggio di verificare, se durante l'esperienza avvenivano allùngamenti od accorciamenti sensibili nel filo o nella lunghezza del pendolo, passando dalle grandi alle piccole oscillazioni; poichè queste variazioni sarebbero state accusate dalla maggiore o minore lunghezza dei segnali registrati sul cronografo. A questo scopo furono fatti varî esperimenti mantenendo il contatto e la registrazione dei segnali per varie ore, e si è trovato che i segnali stessi si conservavano ben distinti e sensibilmente della stessa lunghezza per tutto il corso dell'esperienza, ben inteso che tali esperienze venivano fatte quando il filo era stato assoggettato per un tempo abbastanza lungo all'azione del peso della palla.

Dopo queste verifiche vennero intraprese le esperienze definitive per la determinazione della durata delle oscillazioni che dovevano servire alla determinazione del pendolo semplice che batte il secondo.

Descrizione delle esperienze.

I. *Pendolo.* Nella prima serie di esperienze fu data al filo la lunghezza di metri 7,80 circa, e si verificò la sua capacità a sostenere con sicurezza la palla, facendo oscillare il pendolo in oscillazioni molto ampie; con che si otteneva di dare al filo stesso il massimo di allungamento o stiramento, e quindi una lunghezza presumibilmente costante, o variabile soltanto col variare della temperatura.

Messo poscia il pendolo in perfetto riposo sulla verticale, si portava sotto l'indice o punta di ferro il cilindretto di mercurio, facendolo per mezzo di piccoli movimenti coincidere esattamente la sua parte centrale e più elevata colla estremità dell'indice suddetto, in modo da stabilire fra loro un leggerissimo contatto. Ciò ottenuto, si allontanava il pendolo dalla verticale di un certo angolo e in un piano formante coll'asse del cilindro un angolo di circa 45°, avendo cura di non dare al filo alcuna torsione: quindi si portava sul pendolo un laccio o cappio di filo sottile di cotone, fissato co' suoi capi ad un pesante trepiede; in modo che la palla rimanesse avvolta o toccata dal filo di cotone secondo un arco di circolo massimo perpendicolare all'asse del pendolo, precisamente come si pratica nell'eseguire l'esperimento di Foucault. Finalmente ridotta la palla in quiete ed abbruciato il filo, il pendolo incominciava le sue oscillazioni, un certo numero delle quali veniva registrato sul cronografo: quindi si abbassava il livello del mercurio per interrompere il contatto e la registrazione; la quale poi veniva riattivata di tratto in tratto durante l'esperimento ed alla fine del medesimo, misurando in ognuna di queste circostanze l'ampiezza delle oscillazioni.

Il cronografo, del modello Hipp, era collocato nella camera meridiana in comunicazione con un eccellente cronometro di Frodsham a tempo siderale, il cui andamento diurno veniva determinato, sia coll'osservazione di passaggi di stelle registrati sul cronografo stesso, sia per mezzo di confronti presi durante il giorno col pendolo siderale di Dent che serve per le osservazioni al circolo meridiano.

La temperatura media del filo del pendolo veniva dedotta da due termometri

centigradi; uno dei quali posto in vicinanza alla palla, l'altro in vicinanza all'apparato di sospensione, i quali venivano letti ogni volta che si prendevano le oscillazioni al cronografo, quantunque ordinariamente la temperatura si mantenesse sensibilmente costante nella durata dell' esperimento.

Finalmente l'immobilità dell'apparato di sospensione durante il moto del pendolo veniva verificata per mezzo di due sensibili livelli a bolla d'aria appoggiati sulla trave a cui era fissato l'apparato stesso, dai quali livelli non era indicata alcuna oscillazione o trepidazione anche nelle più ampie oscillazioni. Con questo pendolo dal giorno 7 sino all' 11 di gennaio 1881 vennero fatte 7 esperienze, i cui dati e risultati sono riferiti nello Specchio *A*.

La lunghezza del pendolo venne riportata sopra una robustissima stadia di abete ben stagionato, e diligentemente lavorata, della lunghezza di 8,^{m} 20, segnando sulla medesima con grande accuratezza la distanza fra la sezione del filo alla sua sommità, e la sezione inferiore alla sommità del bottone o ghiera pel quale esso sosteneva la palla: e questa operazione si è ripetuta più volte, tenendo conto della temperatura. Si esporrà in seguito il modo col quale venne misurata questa distanza.

II. *Pendolo.* Volendo fare esperienze col pendolo di minore lunghezza, e non avendosi le commodità necessarie per sospendere la palla a maggiore altezza o più vicina all' apparato di sospensione, si dovette abbassare questo apparato fissandolo, come pel primo pendolo, ad una robusta trave murata sotto la prima a circa 2,^{m} 70 di distanza; di modo che rimanendo la palla presso a poco alla stessa altezza del primo pendolo, la lunghezza del filo veniva ridotta a 5,^{m}06 circa. Malgrado questo accorciamento il pendolo presentava regolarmente ed in qualunque azimut il fenomeno di Foucault.

Nel giorno 14 di gennaio vennero intraprese con questo pendolo le esperienze, seguendo rigorosamente le stesse norme adottate per l'altro pendolo; e nei giorni 14 e 15 si fecero cinque esperienze i cui dati e risultati sono inseriti nel citato Specchio *A*. La lunghezza del filo venne riportata, come pel pendolo I, sulla stadia e quindi misurata collo stesso metodo. Lo Specchio *A* contiene i dati e risultati delle esperienze.

III. *Pendolo.* Per verificare se l' apparato di sospensione poteva esercitare qualche sensibile influenza sulla durata delle oscillazioni, ne venne sostituito un altro parimente a morsa cilindrica, ma lavorato con maggiore precisione, e nel giorno 17 gennaio si rimontò il pendolo di lunghezza prossimamente eguale a quella del II, usando la stessa qualità di filo.

Le esperienze vennero intraprese il giorno 18 e continuate fino al 21 facendo in questo intervallo 6 esperimenti secondo le stesse norme e lo stesso metodo adottato nelle esperienze precedenti, e riportando poscia nello stesso modo la lunghezza del filo sulla stadia. I dati e risultati di queste esperienze sono riferiti nello Specchio *A*.

IV. *Pendolo.* Il giorno 23 fu sospeso il pendolo alla trave superiore col filo della lunghezza di circa 7,^{m} 80; e dal 24 al 31 gennaio furono fatti 10 esperimenti colle solite norme; e la lunghezza del filo venne riportata col solito metodo sulla stadia. Nell'indicato Specchio *A* sono contenuti i dati e risultati di queste esperienze.

V. *Pendolo.* Pel calcolo della lunghezza dei pendoli semplici, sincroni coi pendoli composti usati nelle esperienze, interessava di conoscere principalmente la posizione del centro di gravità della palla, di verificare se esso coincideva o no col centro di figura.

Questa verifica o ricerca poteva facilmente istituirsi nel nostro pendolo per la possibilità di invertire o capovolgere la palla sulla spina di ferro, che l'attraversa e per la quale è appesa al filo, senza pericolo di alterare la posizione del suo centro di figura rispetto alla estremità inferiore del filo, e quindi rispetto al punto di sospensione del pendolo: poichè facendo oscillare il pendolo colla palla nelle due posizioni, diretta ed invertita, le durate delle oscillazioni nei due modi di sperimentare, o colla loro identità od uguaglianza avrebbero mostrato la coincidenza del centro di gravità col centro di figura, od almeno, la loro esistenza sullo stesso piano orizzontale; oppure nel caso di una differenza fra le due durate, dalla grandezza di questa differenza si sarebbe potuto dedurre la distanza verticale di questi due punti, e quindi la correzione da applicarsi per questa causa alle lunghezze misurate o calcolate.

A questo scopo venne rimontato il pendolo col filo usato pel pendolo IV ridotto alla lunghezza di $7^m, 7$, circa, colla palla diretta come era stata usata in tutte le precedenti esperienze; e nei giorni 10 ed 11 febbraio vennero fatti tre esperimenti seguendo le solite norme per la registrazione dei tempi e per la misura della lunghezza del filo. I dati e risultati di questi esperimenti sono riportati nello Specchio *A* sotto l'indicazione Pendolo V_a.

Finalmente nella sera dell' 11 febbraio venne invertita la palla, mantenendo la stessa lunghezza del filo; e nei giorni 12, 13, e 14 si fecero 5 esperimenti coi dati e risultati riportati nello Specchio *A* sotto l'indicazione Pendolo V_b.

Io avrei desiderato di mantenere in tutti questi esperimenti una certa regolarità nelle ore, nella durata e nell'ampiezza delle oscillazioni, ma l'impossibilità d'avere libero in qualunque ora l'ambiente dove era collocato il pendolo, e le molte occupazioni dalle quali io era in quei giorni distratto, mi hanno costretto ad approfittare nel miglior modo possibile delle condizioni e dei tempi disponibili. Ma questa circostanza non mi sembra tale da togliere fiducia ai risultati ottenuti: che anzi il conveniente accordo dei risultati dei varî esperimenti, malgrado la diversità delle condizioni nelle quali vennero dedotti, mi sembra una prova evidente della bontà e sicurezza del modo di osservare o di esperimentare; e sono convinto che ciò si renderebbe anche più manifesto facendo esperienze in condizioni più favorevoli e normali, e con mezzi più perfezionati di quelli di cui io ho potuto disporre.

Nel seguente Specchio *A* sono contenuti i dati relativi a ciascuna esperienza, e cioè la data; la temperatura media del filo; la pressione atmosferica all'altezza della palla; la semi-ampiezza delle oscillazioni al principio ed alla fine d'ogni esperienza; il tempo siderale al principio ed alla fine dell'esperimento e la sua durata, e finalmente l'andamento diurno del cronometro. Oltre gli esperimenti registrati in questo specchio ne furono eseguiti molti altri, specialmente allo scopo di verificare l'influenza della resistenza nell'apparato cronografico, e per verificare se la nota formola di Borda, usata per la riduzione della durata delle oscillazioni finite di varie ampiezze alla oscillazione infinitesima, poteva essere con sicurezza adottata nel caso nostro; dai quali esperimenti è risultato che la resistenza dell' apparato cronografico non può alterare sensibilmente la durata delle oscillazioni, quando venga limitata ad un piccolo numero di contatti, quale poi l'abbiamo adottato: e che la formola di riduzione della durata all' oscillazione infinitesima è convenientemente soddisfatta nei limiti d'ampiezza da noi stabiliti.

SPECCHIO *A*.

Esperienze sulla gravità fatte col pendolo

DATA 1881	TEMPERATURA DEL PENDOLO Term. sup.	Term. inf.	Media	BAROMETRO	SEMIAPERTURA DELL'OSCILLAZ. al principio	alla fine	CRONOMETRO FRODSHAM A TEMPO SIDERALE Principio	Fine	Durata	Andamento diurno
Pendolo I.										
	°	°	°	mm	° '	° '	h m s	h m s	h m s	s
Genn. 7	13,30	13,47	13,38	759,9	1 49	0 26	21 53 59,30	2 33 59,55	4 40 0,25	—1,76
7	13,35	13,30	13,33	756,2	3 3	0 43	3 6 55,85	7 23 55,97	4 17 0,12	1,74
8	12,70	12,95	12,83	752,8	0 45	0 15	22 4 0,75	2 59 57,84	4 55 57,09	1,70
8	12,07	12,53	12,30	753,7	1 45	0 22	3 48 0,73	9 15 1,64	5 27 0,91	1,51
9	12,35	12,72	12,54	754,9	1 49	0 30	20 22 59,51	0 45 1,18	4 22 1,67	1,34
9	12,10	12,25	12,18	756,0	2 39	0 26	3 9 0,81	9 6 0,71	6 56 59,90	1,32
10	12,10	12,02	12,06	754,0	3 33	0 22	20 8 0,33	3 29 57,20	7 21 56,87	1,30
10	11,82	11,90	11,86	754,5	1 12	0 31	5 35 58,42	9 7 1,99	3 31 3,57	1,26
11	12,20	12,26	12,23	750,1	3 16	0 20	17 58 1,09	1 15 0,05	7 16 58,96	1,12
11	11,98	12,02	12,00	748,5	1 47	0 21	4 4 59,23	10 4 0,20	5 59 0,97	1,18
Pendolo II.										
Genn. 14	12,40	12,32	12,36	745,3	1 27	0 20	19 34 55,33	1 11 59,55	5 37 4,22	1,43
14	12,43	12,53	12,48	740,8	3 14	0 26	3 48 59,69	9 45 0,37	5 56 0,68	1,45
15	12,70	12,92	12,81	741,8	1 50	0 40	19 41 0,62	22 47 59,53	3 6 58,91	1,40
15	12,40	12,50	12,45	740,4	2 30	0 35	23 43 0,92	3 20 0,10	3 36 59,18	1,63
15	12,50	42,58	12,54	743,5	3 0	0 28	4 14 59,92	9 35 59,61	5 20 59,69	1,60
Pendolo III.										
Genn. 17	11,60	11,70	11,65	757,6	2 40	0 50	2 1 58,63	5 39 0,99	3 37 2,36	1,70
18	12,35	12,45	12,40	751,0	1 7	0 33	7 21 0,69	10 48 1,38	3 27 0,69	1,76
19	12,83	13,20	13,02	749,7	2 20	0 56	23 20 0,55	1 19 59,54	1 59 58,99	1,80
20	12,72	13,02	12,87	751,7	1 27	0 33	23 22 59,09	3 39 59,27	4 17 0,18	1,82
20	12,57	12,85	12,71	751,8	1 3	0 27	4 6 59,75	7 28 2,85	3 21 3,10	1,95
21	12,40	12,85	12,63	760,1	1 27	0 37	23 44 59,91	3 34 1,55	3 49 1,64	1,90
21	11,80	12,18	11,99	760,1	0 50	0 24	5 19 59,31	8 39 59,12	3 19 59,81	1,90
Pendolo IV.										
Genn. 26	9,83	9,91	9,87	755,6	1 36	0 26	5 28 0,98	10 38 2,63	5 10 1,65	2,11
27	9,82	9,68	9,75	750,8	2 54	0 30	22 38 0,00	3 54 59,57	5 16 59,57	2,10
27	9,68	9,67	9,68	751,9	2 40	0 26	4 18 59,86	9 51 1,81	5 32 1,95	2,10
28	10,46	10,64	10,55	746,7	1 30	0 22	22 18 56,31	2 37 1,33	4 18 5,02	1,91
28	10,26	10,54	10,40	750,1	2 58	0 26	4 21 1,69	10 50 59,03	6 29 57,34	1,92
29	11,20	11,67	11,44	750,8	0 53	0 22	4 40 0,68	9 29 1,53	4 49 0,85	2,00
30	11,12	11,40	11,26	746,0	1 10	0 17	4 45 0,88	10 47 2,06	6 2 1,18	1,90
31	11,32	11,52	11,42	749,6	1 10	0 16	5 28 57,89	11 47 0,94	6 18 3,05	1,81
Febb. 1	11,45	11,73	11,59	749,7	1 32	0 22	2 58 1,90	8 53 0,23	5 54 58,33	1,85
2	11,34	11,78	11,56	753,3	0 23	0 10	21 45 0,83	5 6 0,50	7 20 59,67	1,80
Pendolo V$_a$										
Febb. 10	12,16	12,60	12,38	751,9	1 25	0 25	0 6 0,84	5 11 59,78	5 5 58,94	1,70
10	12,00	12,50	12,25	750,7	1 10	0 17	5 24 0,93	11 19 58,78	5 55 57,85	1,75
11	11,88	12,10	11,99	743,2	0 24	0 11	21 38 0,19	1 28 0,00	3 49 59,81	1,96
Pendolo V$_b$										
Febb. 11	11,90	12,12	12,01	743,0	1 5	0 15	2 5 57,85	8 33 1,38	6 27 3,53	1,90
12	11,72	11,72	11,72	743,8	0 50	0 13	20 14 59,25	2 41 54,35	6 26 55,10	1,72
12	11,35	11,40	11,37	743,5	0 54	0 12	5 42 59,71	12 33 59,62	6 50 59,91	1,63
13	10,70	10,78	10,74	752,7	1 56	0 22	0 25 1,09	7 10 58,30	6 45 57,21	1,83
13	10,43	10,37	10,40	753,8	0 31	0 20	8 34 1,00	11 35 59,66	3 1 58,66	1,91
14	10,20	10,60	10,40	756,9	0 30	0 8	22 12 1,73	3 50 2,02	5 38 0,29	1,96
14	10,42	10,43	10,43	758,6	0 48	0 15	5 55 58,52	11 25 0,28	5 29 1,76	1,96

Durata media delle oscillazioni in ciascuna esperienza.

Il metodo seguito per la determinazione della durata d'una oscillazione infinitesima in ciascun esperimento è il seguente. Conoscendosi già molto approssimativamente la durata d'una oscillazione nelle varie ampiezze, si è primieramente dedotto il numero delle oscillazioni compiute dal pendolo in ciascun esperimento, riducendo prima la totale durata di questo in secondi di tempo siderale, e sottraendo poscia dal logaritmo di questo numero di secondi e relativa frazione, il logaritmo della durata approssimativa di una oscillazione espressa anch'essa in secondi di tempo siderale. Con questa differenza di logaritmi si aveva dalle tavole logaritmiche il numero delle oscillazioni eseguite dal pendolo, prendendo il numero intero il cui logaritmo maggiormente si avvicinava alla differenza trovata; sul quale numero non poteva cadere alcun dubbio, perchè la durata d'una sola oscillazione in più od in meno avrebbe dovuto produrre una differenza nel logaritmo troppo lontana dal valore approssimativo già noto. I numeri delle oscillazioni ottenuti in questo modo sono riportati nella 1ª colonna del seguente Specchio *B*.

Durata media d'una oscillazione. — Ottenuto il numero delle oscillazioni in ogni esperimento, sottraendo il logaritmo di questo numero dal logaritmo della durata totale dell'esperimento, la loro differenza indicava il logaritmo della durata media della oscillazione in secondi di tempo siderale, però non ancora corretta dall'andamento del cronometro. I logaritmi delle durate medie d'una oscillazione per ogni esperimento e per ogni pendolo sono riportati nella 2ª colonna dello Specchio *B*.

Correzione per l'andamento del cronometro. — La correzione richiesta dall'andamento diurno del cronometro avrebbe potuto direttamente applicarsi alla durata totale d'ogni esperimento, ma per maggiore uniformità, e per non complicare di troppo gli specchi numerici si è preferito d'applicare la correzione alla durata media delle oscillazioni, e nella 3ª colonna dello Specchio *B* sono date le correzioni da applicarsi nelle ultime cifre dei logaritmi di queste durate, contenuti nella 2ª colonna. Le correzioni sono tutte additive, perchè l'andamento del cronometro si è mantenuto negativo per tutto il corso delle esperienze. Riguardo all'andamento diurno del cronometro i valori dati si possono considerare come molto approssimativi, sia per la cura posta nel determinare con tutta la possibile frequenza l'errore del cronometro stesso, sia per la conveniente regolarità del suo moto.

Riduzione delle durate all' oscillazione infinitesima. — Colle semi-aperture delle oscillazioni al principio ed alla fine di ciascun esperimento, quali sono date dallo Specchio *A*, si è calcolata colla nota formola di Borda la correzione da applicarsi al numero delle oscillazioni compite durante ciascun esperimento, per ottenere il corrispondente numero delle oscillazioni infinitesime che si sarebbero compite nello stesso tempo. Finalmente da questa correzione si è ricavata la diminuzione o correzione da farsi al logaritmo della durata media delle oscillazioni finite per ottenere la durata delle oscillazioni infinitesime. Le correzioni così calcolate per ogni esperimento sono riportate nella colonna 4ª, e si riferiscono alle ultime cifre del logaritmo della durata. In quasi tutti gli esperimenti, oltre alla oscillazione iniziale e finale, sono state registrate al cronografo altre oscillazioni all'intervallo di circa un'ora, e si sono osservate le relative semi-aperture dell' oscillazione: dimodochè si è potuto calcolare la

correzione per la riduzione delle durate all'oscillazione infinitamente piccola, separatamente per le varie fasi dell' esperimento. Ma siccome il medio delle durate così ottenute non diversificava sensibilmente dalla durata dedotta per tutto l'esperimento, e cioè colla semi-apertura iniziale e finale, così per maggiore semplicità d' esposizione nello Specchio *B* ci siamo limitati a dare soltanto questi ultimi risultati.

Riduzione della durata delle oscillazioni alla temperatura del pendolo a 13°. — Per facilitare il calcolo della lunghezza del pendolo semplice pei varî esperimenti eseguiti con ognuno dei cinque pendoli, si è creduto conveniente di ridurre la durata media dell'oscillazione al valore corrispondente alla temperatura costante + 13°, la quale di poco si allontana dalla temperatura dominante nei varî esperimenti. Perciò colla temperatura media del filo, data per ogni esperimento dallo Specchio *A*, col coefficiente di dilatazione del filo d'acciajo 0,0000144 per 1° centesimale, e colla lunghezza nota del filo, si è calcolata la differenza di lunghezza per portarlo a 13°: deducendone poi la corrispondente variazione nella durata della oscillazione, e finalmente la correzione da applicare al logaritmo di questa, per ottenere il logaritmo della durata dell'oscillazione in corrispondenza alla temperatura di 13°. Le correzioni così ottenute pei varî esperimenti sono riportate nella colonna 5ª dello Specchio *B*.

Riduzione della durata delle oscillazioni al vuoto. — Le condizioni atmosferiche durante il corso degli esperimenti si sono mantenute, specialmente in riguardo alla temperatura ed alla pressione, abbastanza regolari, in modo che la riduzione al vuoto avrebbe potuto ritenersi come costante per tutti gli esperimenti, e basarsi il calcolo della correzione sopra la media densità dell'aria durante questi esperimenti.

Ma per maggiore esattezza la diminuzione della gravità o del peso del pendolo è stata calcolata separatamente per ogni esperimento, determinando la densità dell'aria colle rispettive altezze del barometro e del termometro, e prendendo per valore della densità della palla 11,25, quale erasi ottenuta dal rapporto del peso della medesima nel vuoto colla perdita di peso subìta nell'acqua, e ciò per mezzo di ripetuti esperimenti. Calcolata con questi dati la diminuzione prodotta dall'aria nel peso del pendolo e quindi nella gravità, si è finalmente dedotta la correzione da applicarsi al logaritmo della durata delle oscillazioni in corrispondenza al vero valore della gravità. Le correzioni da applicarsi ai logaritmi delle durate delle oscillazioni per ottenere la corrispondente durata nel vuoto sono contenute nella 6ª colonna dello Specchio *B*.

Durata delle oscillazioni infinitesime nei cinque pendoli. — Nella 7ª colonna dello Specchio *B* sono dati per ogni esperimento e per ogni pendolo i logaritmi delle durate delle oscillazioni con tutte le indicate correzioni o riduzioni, di modo che questi numeri rappresentano il logaritmo del valore di t in secondi siderali, dal quale dovrà dedursi la lunghezza del pendolo semplice che batte il secondo di tempo siderale nel luogo di osservazione, mentre nella 8ª colonna dello stesso Specchio *B* sono dati i valori definitivi della quantità t.

Prendendo il medio dei logaritmi di t per ogni pendolo, si ha:

I	Pendolo	$\log. t'$	=	0,4507753	IV	Pendolo	$\log. t''''$	=	0,4503259
II	»	$\log. t''$	=	0,3582233	V_a	»	$\log. t_a'''''$	=	0,4479868
III	»	$\log. t'''$	=	0,3574136	V_b	»	$\log. t_b'''''$	=	0,4479908

Il notevole accordo fra i singoli valori ottenuti per log. t nei varî esperimenti fatti con ciascun pendolo, e la piccolezza dei loro allontanamenti dal rispettivo medio,

mi sembrano tali da confermare la regolarità delle esperienze e la bontà del modo di esperimentare, almeno in riguardo alla determinazione di uno dei dati fondamentali per la misura della gravità, e cioè per la determinazione della durata delle oscillazioni del pendolo.

Specchio *B*.

Esperienze sulla gravità fatte col pendolo

DATA	Numero delle oscillazioni	Logaritmo della durata media delle oscillazioni in secondi sid.	Correzione del logaritmo della durata media				Logaritmo corretto della durata t	Durata t in tempo siderale
			per l'andamento del cronometro	per la riduz. all'oscillaz. infinitesima	per la riduzione alla temp. 13.°	riduzione del pendolo al vuoto		
				Pendolo I.				s
Genn. 7	5950	0,4507988	+ 88	— 90	— 11	— 228	0,4507747	2,823415
7	5461	0,4508156	87	250	— 10	227	756	2,823421
8	6289	0,4507902	89	19	+ 5	226	747	2,823415
8	6949	0,4507968	76	77	12	227	752	2,823418
9	5568	0,4507995	67	98	14	228	750	2,823417
9	7586	0,4508047	66	156	24	228	753	2,823419
10	9391	0,4508105	65	227	29	227	745	2,823414
10	4485	0,4507938	63	56	34	227	752	2,823418
11	9640	0,4508105	55	191	24	227	766	2,823427
11	7629	0,4507977	59	81	30	226	759	2,823423
				Pendolo II.				
Genn. 14	8864	0,3582421	72	56	+ 19	225	0,3582231	2,281514
14	9362	0,3582582	73	211	16	223	237	2,281517
15	4917	0,3582504	70	119	5	223	237	2,281517
15	5706	0,3582518	81	167	17	223	232	2,281514
16	8441	0.3582554	80	195	14	224	229	2,281513
				Pendolo III.				
Genn. 17	5718	0,3574455	85	213	+ 40	230	0,3574137	2,277266
18	5454	0,3574307	88	55	+ 19	229	130	2,277262
19	3161	0,3574471	90	201	— 1	227	132	2,277263
20	6771	0,3574353	91	88	+ 4	225	135	2,277265
20	5297	0,3574289	98	40	9	226	130	2,277262
21	6034	0,3574352	95	83	11	229	146	2,277270
21	5269	0,3574281	95	30	24	229	141	2,277268
				Pendolo IV.				
Genn. 26	6595	0,4503366	106	76	+ 97	228	0,4503265	2,820503
27	6743	0,4503475	106	191	101	227	264	2,820502
27	7063	0,4503426	106	157	103	226	252	2,820494
28	5490	0,4503395	96	80	77	226	262	2,820501
28	8295	0,4503501	96	185	81	227	266	2,820503
29	6148	0,4503365	100	30	49	227	257	2,820497
30	7701	0,4503363	95	29	54	225	258	2,820498
31	8042	0,4503370	91	30	50	227	254	2,820495
Febb. 1	7551	0,4503410	93	65	44	226	254	2,820495
2	9381	0,4503353	90	5	45	227	256	2,820497
				Pendolo V_a				
Febb. 10	6544	0,4480043	86	47	+ 21	227	0,4479876	2,805353
10	7613	0,4480017	88	37	23	226	865	2,805346
11	4919	0,4479963	99	6	31	225	862	2,805344
				Pendolo V_b				
11	8278	0,4480028	95	31	+ 32	224	0,4479900	2,805369
12	8275	0,4480026	86	20	41	225	908	2,805374
12	8790	0,4480027	86	21	54	225	917	2,805380
13	8682	0,4480077	92	89	70	227	923	2,805384
13	3892	0,4479966	96	15	81	228	900	2,805369
14	7229	0,4479960	99	7	81	230	903	2,805371
14	7037	0,4479982	99	21	79	231	908	2,805374

Lunghezza dei pendoli

La determinazione della lunghezza dei pendoli si è basata sulla misura della lunghezza del filo di ciascun pendolo, riportata con tutta la possibile accuratezza sulla grande stadia di abete posta verticalmente a contatto del pendolo nello stato di quiete.

Questa stadia era formata da due robusti travicelli di abete fra loro stabilmente congiunti con riseghe a coda di rondine, stretti fra loro con grosse viti in modo da formare un solo sistema rigido. La forma della stadia è quella di un parallelepipedo rettangolare di 0,^{m}12 di lato, a faccie ben levigate e regolari. Le due estremità del filo, e cioè il punto di sospensione, e il suo punto di inserzione nel bottone fissato alla palla o sfera di piombo, costituente la parte principale del pendolo, erano projettati orizzontalmente sulla stadia per mezzo di una doppia squadra molto esatta, e l'esattezza della operazione veniva verificata otticamente con un cannocchiale, posto a conveniente distanza dalla stadia e dal pendolo, per mezzo del reticolo disposto con uno dei suoi lati esattamente orizzontale.

Per maggiore sicurezza veniva projettato sulla stadia un terzo punto del pendolo, e cioè la traccia del piano orizzontale tangente alla parte inferiore della palla, di cui era nota la distanza alla estremità inferiore del filo, e che perciò poteva servire di controllo alla misura del filo stesso. Per ogni pendolo questa operazione è stata eseguita due volte, tenendo sempre conto della temperatura del filo e del pendolo.

La lunghezza del filo, ossia la distanza delle sue estremità segnate sulla stadia venne mano mano misurata per mezzo di un metro di ottone di *Lenoir*, diviso in centimetri e per un decimetro anche in millimetri; del quale per cura del prof. Pisati si era determinata l'equazione con un metro di acciajo dell'Ufficio centrale dei pesi e misure, già confrontato col metro prototipo francese. Da una serie di confronti eseguiti col metro dell'Osservatorio e quello dell'Ufficio centrale dei pesi e misure è risultato, che il metro da noi usato ridotto alla temperatura 0° è più corto di 0^{mm},080 del prototipo francese.

Siccome le lunghezze di tutti i pendoli furono misurate col metro alla temperatura prossima a 10°, così la vera lunghezza a 0° del metro da noi usato era eguale a quella del prototipo francese + 0,^{mm}098 ossia ad 1^{m},000098, in base al coefficiente della dilatazione lineare dell'ottone 0,0000179 per ogni grado centesimale. Però è da avvertire che i lati o spigoli del metro non essendo rigorosamente eguali, si presero sempre le misure col lato più corto, al quale appunto si riferisce l'indicata equazione col metro prototipo francese. Questa correzione non è stata applicata alle singole lunghezze misurate, perchè tutte le esperienze essendosi ridotte ad una temperatura costante e cioè a 13°, bastava applicare tale correzione ai valori che si sarebbero trovati per la lunghezza del pendolo che batte i secondi.

Forma e peso del pendolo composto. — Il corpo del pendolo è costituito da una sfera di piombo del diametro di 0,^{m} 116980 a 13° di temperatura, traversata da una spina cilindrica di ferro, alla quale è fissata per mezzo di un dischetto di ferro nella parte inferiore, e da un dischetto di ottone invitato superiormente alla suddetta spina: dal bottone di ottone solidamente invitato a questa spina nell'interno del quale è fermato stabilmente il filo che sostiene la palla: finalmente dall'indice di ferro invitato nel dischetto posto sotto la palla. Tutto il corpo oscillante è lavorato

con molta accuratezza, ed è completamente simmetrico rispetto alla verticale sulla quale si dispone il filo nello stato di quiete.

Per verità la forma del pendolo è molto complessa, e costruendolo appositamente avrebbe potuto notevolmente semplificarsi, ma per ragione di economia si preferì di usare il pendolo già posseduto dall'Osservatorio, e che serve da sismografo, il quale d'altronde non presentava altro inconveniente che quello di rendere più laboriosa la riduzione del pendolo composto al pendolo semplice, per la moltiplicità dei dati a ciò necessarî.

Pel calcolo del pendolo semplice si è decomposta la massa oscillante in cinque parti distinte, e cioè:

1.° Il filo di acciajo.
2.° Il bottone di ottone cui è fissato il filo.
3.° Il dischetto di ottone posto fra il bottone e la palla.
4.° La palla di piombo.
5.° Il dischetto inferiore congiunto coll'indice di ferro.

Di ciascuna di queste masse dovevasi accuratamente determinare il peso, la forma e la distanza dal centro di gravità al punto di sospensione.

I pesi di queste parti componenti il pendolo, determinati con grande diligenza e con una buonissima bilancia, sono:

	Peso in chilogrammi
Peso del bottone	0,04070
Peso del dischetto di ottone	0,01865
Peso della palla di piombo	9,43515
Peso del dischetto inferiore coll'indice .	0,01850

Il peso del filo nei cinque pendoli risultò:

		Peso in chilogrammi
nel I	Pendolo	0,03280
nel II	»	0,02128
nel III	»	0,02124
nel IV	»	0,03270
nel V_a	»	0,03238

Esclusa la grande palla di piombo, per le altre parti del pendolo si è potuto con conveniente approssimazione determinare tanto la posizione del centro di gravità, quanto quella del rispettivo centro di oscillazione rispetto al punto di sospensione, senza tema di sensibili incertezze in causa della piccolezza di quelle masse; ma riguardo alla palla, la quale per la grande preponderanza della sua massa doveva grandemente influire sulla posizione del centro di oscillazione del sistema, o sulla lunghezza del pendolo semplice sincrono al pendolo composto, si presentava la necessità di verificare con tutta la possibile esattezza, se il centro di gravità di questa sfera coincideva col centro di figura, o nel caso contrario determinare esattamente la distanza verticale di questi due punti.

Questa questione sarebbe stata per noi irresolubile, se la possibilità di invertire o capovolgere la sfera nel suo sostegno non ci avesse fornito un mezzo indiretto per fare colla richiesta sicurezza ed esattezza una tale verifica nel modo che sarà fra breve esposto.

Determinazione della lunghezza dei pendoli semplici sincroni ai pendoli composti.

Pel calcolo della lunghezza del pendolo semplice ad oscillazioni sincrone a quella del pendolo composto, essendo necessario di conoscere le distanze ρ', ρ'', ρ'''.... dei centri di gravità delle singole parti componenti il pendolo dal punto di sospensione; le rispettive distanze dei centri di oscillazione l', l'', l'''..., oltre ai valori delle loro masse o pesi p', p'', p'''..., si è formato il seguente Specchio C, il quale contiene i valori di queste quantità per le cinque parti o masse componenti ciascun pendolo, prese nel seguente ordine:

Filo . . . . ρ', l', p'
Bottone . . . . ρ'', l'', p''
Dischetto di ottone . . . . ρ''', l''', p'''
Sfera di piombo . . . . ρ'''', l'''', p''''
Dischetto di ferro coll'indice . . . . . . ρ''''', l''''', p'''''

Specchio C.

Esperienze sulla gravità fatte col pendolo.

PENDOLI	I	II	III	IV	V_a
	m	m	m	m	m
Filo	7,798996	5,063202	5,044039	7,782674	7,699372
ρ'	3,899498	2,531601	2,522020	3,891337	3,849186
ρ''	7,809206	5,073412	5,054249	7,722884	7,708582
ρ'''	7,822896	5,087102	5,067939	7,806574	7,722272
ρ''''	7,883824	5,148030	5,128867	7,867502	7,783200
ρ'''''	7,946396	5,210602	5,191439	7,930074	7,845772
l'	5,199331	3,375468	3,362693	5,188449	5,132448
l''	7,809211	5,073420	5,054257	7,792889	7,708587
l'''	7,822898	5,087105	5,067942	7,806576	7,722274
l''''	7,883998	5,148296	5,129134	7,867676	7,783376
l'''''	7,946400	5,210608	5,191445	7,930080	7,845776

Per le piccole masse p', p'', p''' e p''''', di forma geometrica semplice e di dimensione e posizione nota, si è potuto con facilità e conveniente approssimazione determinare le distanze ρ ed l dal punto di sospensione; ma per la massa principale della sfera di piombo p'''', il valore di ρ'''' e l'''' non si è potuto stabilire, se non dopo di avere determinata la distanza del centro di figura della palla al centro di gravità della massa.

Come si è già accennato, le esperienze fatte coi pendoli V_a e V_b, nei quali rimanendo invariata la lunghezza del filo si era soltanto invertita o capovolta la palla nel suo sostegno, erano appunto destinate a questo scopo, e cioè di verificare, se e quale distanza correva fra questi due punti. Infatti, determinando la durata dell'oscillazione infinitamente piccola col pendolo V_a e col pendolo V_b, se si fossero trovate identiche le

due durate, che chiameremo T e T', si sarebbe confermata la coincidenza dei due punti, od almeno la loro esistenza sullo stesso piano orizzontale.

Esaminando i valori T e T' dati dallo Specchio *B* per le oscillazioni dei pendoli V_a e V_b, si trova che prima del rovesciamento della palla l'oscillazione era più rapida, per cui il centro di gravità doveva trovarsi più alto nel pendolo V_a che nel pendolo V_b, ma di piccola quantità in causa della piccola differenza delle durate

$$T - T' = -0^s,0000267.$$

Se chiamiamo L_a la lunghezza del pendolo semplice corrispondente al pendolo composto V_a, la lunghezza del pendolo semplice corrispondente a V_b potremo rappresentarla con $L_a + \Delta L_a$ e in conseguenza dalla nota relazione fra la lunghezza dei pendoli semplici e la durata delle loro oscillazioni, avremo

$$\frac{L_a}{L_a + \Delta L_a} = \frac{T^2}{T'^2}$$

dalla quale si ricava la differenza di lunghezza dei due pendoli semplici

$$\Delta L_a = L_a \left(1 - \frac{T^2}{T'^2}\right) \frac{T'^2}{T^2} = L_a \left(\frac{T'^2}{T^2} - 1\right)$$

Sostituendo in questa equazione il valore di L_a calcolato colla nota formola

$$L = \frac{\rho' l' p' + \rho'' l'' p'' + \rho''' l''' p''' + \rho'''' l'''' p'''' + \rho''''' l''''' p'''''}{\rho' p' + \rho'' p'' + \rho''' p''' + \rho'''' p'''' + \rho''''' p'''''} \qquad (M)$$

e coi valori di ρ, l e p corrispondenti al pendolo V_a, nell'ipotesi che il centro di gravità coincida col centro di figura, e sostituendo i valori di T e T', dati dallo Specchio *B* per la durata delle oscillazioni dei pendoli V_a e V_b, si otterrà la differenza di lunghezza dei due pendoli semplici L_a ed L_b, ossia la distanza verticale dei due centri di oscillazione, la quale prossimamente rappresenterà la distanza dei centri di gravità nelle due posizioni della palla.

Volendo però ottenere il valore più esatto di questa distanza, ossia lo spostamento verticale del centro di gravità della palla in causa del rovesciamento di questa, il quale poi rappresenta il doppio della vera distanza del centro di gravità al centro di figura, si può ricorrere alla formola:

$$x = \frac{ab\left(\frac{T'^2}{T^2} - 1\right)}{p''''\left\{a - b\left(\rho'''' + l''''\right)\right\}},$$

nella quale x rappresenta lo spostamento ricercato del centro di gravità pel rovesciamento della palla, p'''' il peso di questa, ρ'''' la distanza del punto di sospensione al centro di gravità supposto in coincidenza col centro di figura, l'''' la relativa distanza del centro di oscillazione al punto di sospensione, e finalmente a e b le quantità

$$a = \rho' l' p' + \rho'' l'' p'' + \rho''' l''' p''' + \rho'''' l'''' p'''' + \rho''''' l''''' p'''''$$
$$b = \rho' p' + \rho'' p'' + \rho''' p''' + \rho'''' p'''' + \rho''''' p'''''$$

calcolate nella stessa ipotesi della coincidenza del centro di gravità col centro di figura della palla.

Tutti questi dati sono quelli assegnati al pendolo V_a nello Specchio *C*, ad eccezione di ρ'''' ed l'''', che vanno aumentati di $0^m,000072$.

Calcolando in questo modo il valore di x, si trova $x = 0^m,000144$, da cui si deduce che nel rovesciamento il centro di gravità della palla si abbassa di $0^m,000144$, e che perciò il centro di gravità prima del rovesciamento trovavasi al disopra del centro di figura o del centro della sfera di $0^m,000072$.

Questa correzione trovasi già introdotta nei valori di ρ'''' e l'''' dati dallo Specchio *C* pei pendoli I, II, III, IV e V_a, mentre pel pendolo V_b si dovrebbe applicare la correzione in senso opposto: di modo che si hanno nello stesso Specchio *B* tutti i dati necessarî pel calcolo delle lunghezze dei pendoli semplici corrispondenti ai pendoli composti.

Per mezzo della formola (M) calcolando le lunghezze dei primi cinque pendoli semplici, che chiameremo $L', L'', L''', L'''', L_a'''''$, si trova

I	Pendolo	Log. $L' = 0,8964771$	ed	$L' = 7^m,879109$
II	»	Log. $L'' = 0,7114725$		$L'' = 5,146032$
III	»	Log. $L''' = 0,7098518$		$L''' = 5,126864$
IV	»	Log. $L'''' = 0,8955786$		$L'''' = 7,862825$
V_a	»	Log. $L_a''''' = 0,8909011$		$L_a''''' = 7,778595$

Correzione richiesta dalla resistenza del filo. — Nel dedurre queste lunghezze dei pendoli semplici si è supposto che il centro di rotazione per ciascun pendolo coincidesse col punto di sospensione, ossia colla estremità superiore del filo; mentre vi era tutta ragione da ritenere che, in causa della resistenza del filo metallico da noi usato, o non esistesse un vero centro di rotazione malgrado la notevole massa o peso del pendolo, o che la sua posizione dovesse trovarsi sensibilmente più bassa del punto di sospensione; di modo che si poteva presentire che tutte le lunghezze ora determinate fossero più grandi di quelle dei veri pendoli cui si riferiscono le durate di oscillazione riportate nello Specchio *B*.

È appunto in questa previsione che si sono usati pendoli di diversa lunghezza, sia per verificare questo fatto, sia per procurarsi i dati per la determinazione delle correzioni richieste dalla resistenza del filo o dal modo di sospensione del pendolo. Infatti, se noi supponiamo che tanto nel pendolo lungo come nel pendolo corto si usi lo stesso filo e la stessa massa oscillante, e di più si mantengano approssimativamente in entrambi le aperture angolari, o le ampiezze delle oscillazioni negli stessi limiti di grandezza, si può ritenere che la resistenza del filo eserciti la stessa influenza tanto sul pendolo lungo come sul corto, e che perciò l'abbassamento del centro di rotazione, o reale od apparente, sia sensibilmente lo stesso in entrambi i pendoli; e in questa ipotesi non è difficile il ritrovare la grandezza di questo accorciamento, e quindi procurarsi i dati necessarî per la correzione della lunghezza dei pendoli.

Se le lunghezze dei pendoli superiormente riportate L', L'', L''', L'''', L_a''''' fossero realmente quelle dei pendoli semplici cui spettano le durate medie di oscillazione $T', T'', T''', T'''', T_a'''''$, risultanti dallo Specchio *B*, dovrebbero verificarsi le relazioni:

$$\frac{L'}{T'^2} = \frac{L''}{T''^2} = \frac{L'''}{T'''^2} = \frac{L''''}{T''''^2} = \frac{L_a'''''}{T_a'''''^2} = \text{costante}.$$

Ma sostituendo i valori di L ed i corrispondenti di T, si trovano questi rapporti sensibilmente diversi, passando dai pendoli lunghi ai corti, e cioè maggiori nei

pendoli corti; il che prova la necessità di applicare una correzione alla lunghezza dei pendoli, non essendovi ragione di variare i tempi o le durate delle oscillazioni.

Fra i nostri pendoli ne abbiamo due corti, II e III, e tre lunghi I, IV e V_a non considerando il pendolo V_b, perchè dipendente da V_a; ora combinando uno qualunque dei pendoli corti con uno dei lunghi, avremo sei combinazioni diverse, dalle quali potremo dedurre la correzione X da applicare alla lunghezza del filo per ottenere le lunghezze dei pendoli semplici proporzionali ai quadrati dei tempi delle loro rispettive oscillazioni.

Se la correzione X potesse ritenersi come assai piccola, prendendo per es. i due pendoli I e II, essa potrebbe ricavarsi dalla relazione semplicissima

$$\frac{L' + X}{L'' + X} = \frac{T'^2}{T''^2},$$

intendendo cioè applicata questa correzione direttamente ai pendoli semplici già calcolati. Ma siccome si può prevedere che la correzione X non debba essere tanto piccola, così è necessario determinarla con maggiore approssimazione, ritenendola applicata alla lunghezza del filo; per cui l'equazione di condizione, chiamando f, f' le lunghezze del filo, sarà

$$\frac{L' + \left(\frac{dL'}{df}\right) X}{L'' + \left(\frac{dL''}{df'}\right) X} = \frac{T'^2}{T''^2}$$

supponendo però X ancora abbastanza piccolo. Che anzi nel caso nostro avendosi nella formola (M) i termini dipendenti da ρ'''' e l'''', relativi alla sfera di piombo, di un ordine di grandezza maggiore di quella degli altri termini, così si può semplificare la ricerca del valore di X, prendendo il differenziale di L' e di L'' soltanto rispetto a ρ'''' e ad l'''', ritenendo data ad entrambi la stessa correzione X del filo.

Con questa condizione la nostra equazione si riduce a

$$\frac{L' + \frac{p''''X}{b'^2}\left\{b'\left(\rho_{,}'''' + l_{,}''''\right) - a'\right\}}{L'' + \frac{p''''X}{b''^2}\left\{b''\left(\rho_{,,}'''' + l_{,,}''''\right) - a''\right\}} = \frac{T'^2}{T''^2};$$

nella quale p'''' è il peso della palla di piombo, $\rho_{,}''''$ e $\rho_{,,}''''$ la distanza del centro di gravità della palla al punto di sospensione nel I e II pendolo; $l_{,}''''$ ed $l_{,,}''''$ le rispettive distanze dei centri di oscillazione della palla; L' ed L'' le lunghezze approssimative dei pendoli semplici; quantità tutte note e già superiormente riportate. Finalmente le quantità a' e b', a'' e b'' sono già state anch'esse calcolate, essendo

$$\frac{a'}{b'} = L' \quad \text{ed} \quad \frac{a''}{b''} = L''.$$

Risolvendo la superiore equazione rispetto alla X, si ottiene

$$X = \frac{b'b''\left(L' - \frac{T'^2}{T''^2}L''\right)}{p''''\left\{\frac{T'^2}{T''^2}b'\left(\rho_{,,}'''' + l_{,,}'''' - L''\right) - b''\left(\rho_{,}'''' + l_{,}'''' - L'\right)\right\}}$$

Sostituendo finalmente alle quantità simboliche, contenute in questa formola, i loro valori numerici spettanti ai due pendoli I e II, si otterrà il valore della correzione X espressa in frazione di metro.

Essendosi fatte le esperienze con cinque pendoli, tre lunghi e due corti, si possono avere sei diverse combinazioni di un pendolo lungo con un corto, e quindi altrettanti sistemi di dati per determinare il valore della X; e se questi valori riesciranno convenientemente concordanti, potremo conchiudere che l'ipotesi da noi fatta sull'influenza del filo nel moto del pendolo è vera, od almeno molto vicina al vero.

A completare i dati necessarî per calcolare il valore di X per le sei combinazioni di pendoli, si trascrivono i valori di a e b trovati nel calcolo delle lunghezze L per tutti i cinque pendoli:

		a	b
Pendolo	I	59,181385 m	7,511178
»	II	25,223888	4,901621
»	III	25,036416	4,883367
»	IV	58,936352	7,495589
»	V_a	57,679428	7,415144

Con questi dati e con quelli superiormente riportati si è calcolato il valore della correzione X per ognuna delle sei combinazioni di un pendolo lungo con un corto, e si sono ottenuti i seguenti risultati:

Pendoli	X (mm)
I col II	— 3,404
IV col II	3,408
V_a col II	3,439
I col III	3,394
IV col III	3,395
V_a col III	3,416
Medio	— 3,409 mm

Qualora si consideri che questa correzione va applicata sopra tre pendoli di circa 8^m e due di circa 5^m di lunghezza, mi sembra potersi ritenere come molto soddisfacente l'accordo fra i valori ottenuti per la X, e quindi come giustificata l'ipotesi sulla quale si è basata la sua determinazione.

In relazione a ciò per ottenere la vera lunghezza dei pendoli semplici, cui corrispondono le durate di oscillazione da noi ritrovate, e quali sono date dallo Specchio *B*, sarà necessario di diminuire in ciascun pendolo la lunghezza del filo di $3^{mm},409$, medio dei sei valori trovati per la correzione X. Questa correzione sicuramente è molto grande, ma ciò dipende dalla grossezza e resistenza del filo usato, nella scelta del quale si dovette cercare tale robustezza da rimuovere il pericolo di sensibili variazioni di lunghezza durante l'oscillazione.

Lunghezze definitive dei pendoli semplici sincroni ai pendoli composti.— Determinata la correzione X, da applicarsi alla lunghezza del filo del pendolo per eliminare l'influenza della resistenza del filo stesso, bisognava riprendere il calcolo della lunghezza dei pendoli semplici, servendosi dei nuovi valori di ρ ed l relativi a ciascuna delle cinque masse costituenti il pendolo composto, quali sono dati nel seguente Specchio *D*.

SPECCHIO *D*.

Esperienze sulla gravità fatte col pendolo.

PENDOLI	I	II	III	IV	V_a	V_b
Filo	m 7,795587	m 5,059793	m 5,040630	m 7,779265	m 7,694963	m 7,694963
ϱ'	3,897793	2,529896	2,520315	3,889632	3,847481	3,847481
ϱ''	7,805797	5,070003	5,050840	7,789475	7,705196	7,705196
ϱ'''	7,819487	5,083693	5,064530	7,803165	7,718863	7,718863
ϱ''''	7,880415	5,144621	5,125458	7,864093	7,779791	7,779935
ϱ'''''	7,942987	5,207193	5,188030	7,926665	7,842363	7,842363
l'	5,197058	3,373195	3,360421	5,186176	5,129975	5,129975
l''	7,805802	5,070011	5,050848	7,789480	7,705178	7,705178
l'''	7,819489	5,083696	5,064533	7,803167	7,718865	7,718865
l''''	7,880589	5,144887	5,125725	7,864267	7,779967	7,780111
l'''''	7,942991	5,207199	5,188036	7,926671	7,842367	7,842367

Calcolando colla formola (M) e con questi dati il valore L della lunghezza dei sei pendoli semplici corrispondenti ai pendoli composti da noi usati, si trova:

	L
Pendolo I	m 7,875693
» II	5,142617
» III	5,123469
» IV	7,859405
» V_a	7,775188
» V_b	7,775332

Lunghezza del pendolo semplice che batte il secondo di tempo medio.

Dividendo ognuna di queste lunghezze pel quadrato della durata della rispettiva oscillazione infinitamente piccola, data dallo Specchio *B*, si ottengono i valori per la lunghezza del pendolo semplice che batte il secondo di tempo siderale nel luogo dove furono eseguite le esperienze, e cioè nell'Osservatorio del Campidoglio a $55^m,3$ circa sul livello medio del Mediterraneo. Moltiplicando poi questi valori pel quadrato del rapporto del secondo di tempo medio col secondo di tempo siderale, si ottengono i seguenti valori di λ, lunghezza del pendolo che batte il secondo di tempo medio.

	λ
Dal pendolo I	m 0,9933749
» II	0,9933726
» III	0,9933718
» IV	0,9933743
» V_a	0,9933730
» V_b	0,9933732
Medio	m 0,9933733

Bisogna però avvertire che questi valori si riferiscono alla lunghezza del metro da noi usato nelle misure, e preso alla temperatura costante 10°: per cui al valore di λ dovrà applicarsi la necessaria correzione per la riduzione a 0°, e per l'equazione del nostro metro col metro prototipo degli Archivî di Francia.

L'accordo, presentato dai sei valori ottenuti per λ, è senza dubbio molto soddisfacente, ma non bisogna tacere che essi non sono del tutto fra loro indipendenti, perchè tutti basati sopra la correzione X, richiesta dalla resistenza del filo, dedotta dalla combinazione dei risultati avuti dai varî pendoli.

Ciò non ostante, tanto in questo accordo dei valori di λ, quanto e più nell'accordo verificatosi nei valori trovati per la correzione X, mi sembra aversi una bella conferma della bontà del metodo usato nelle esperienze, della bontà delle esperienze stesse e del loro modo di discussione.

Per ridurre il medio dei valori di λ alla vera lunghezza dal pendolo semplice che batte il secondo di tempo medio al livello del mare in Roma, sono ancora necessarie due correzioni, o riduzioni; una per l'equazione del metro, l'altra per ridurre questa lunghezza al livello del mare.

Riguardo alla lunghezza del metro usato nelle nostre misure si è già trovato che per ridurla alla temperatura 0°, ed alla lunghezza del metro prototipo di Francia, richiede la correzione

$$+\,0^{m},0000982$$

per cui la vera lunghezza del pendolo semplice pel secondo di tempo medio, valutata col metro prototipo, pel luogo di osservazione sarà

$$\begin{array}{r} 0^{m},9933733 \\ +\,0,\ 0000982 \\ \hline \lambda = 0^{m},9934715 \end{array} \text{ alla temperatura } 0^{\circ}.$$

Riguardo alla riduzione al livello del mare, prendendo per dato l'elevazione del pendolo sul livello del Mediterraneo di $55^{m},3$, si ottiene la correzione $0^{m},0000176$ e per conseguenza la lunghezza del pendolo a secondi di tempo medio al livello del mare risulta

$$\begin{array}{r} 0^{m},9934715 \\ +\,0\ ,0000176 \\ \hline \lambda = 0\ ,9934891 \end{array};$$

sicchè le nostre esperienze porterebbero la lunghezza del pendolo che batte il secondo di tempo medio in Roma, al livello del mare e col metro alla temperatura 0°, a

$$\lambda = 0^{m},9934891, \text{ e quindi la gravità } g = 9^{m},805343$$

Quantunque io ritenga che questo risultato sia molto vicino al vero, pure non intendo di presentarlo come la vera e definitiva lunghezza del pendolo che deve servire per la determinazione del valore della gravità in Roma; in quanto che può rimanere qualche dubbio sulla esattezza del mezzo impiegato per la misura della lunghezza del filo nei pendoli usati nelle esperienze, malgrado la grande cura posta in questa delicata operazione.

Lo scopo precipuo, che io mi proponeva eseguendo queste esperienze, era quello di verificare, se il pendolo a filo preso nella sua massima semplicità, e cioè colla sua estremità superiore stabilmente fissata nel piano di sospensione, con una conveniente

lunghezza del filo, e colla massa o sfera oscillante molto pesante, poteva utilmente servire alla misura della gravità, senza bisogno di ricorrere agli apparati di sospensione di Borda e Bessel, i quali sono certamente molto ingegnosi, ma nei quali è ben difficile di ottenere la pratica e rigorosa attuazione delle condizioni richieste nella loro struttura, e col pericolo di complicare il moto del pendolo con forze estranee alla gravità, e la cui influenza assai difficilmente può essere assoggettata a rigoroso calcolo.

I risultati delle mie esperienze mi sembrano non lasciare alcun dubbio sulla bontà di questo modo di osservazione o di esperienza, sia in riguardo alla determinazione della durata delle oscillazioni, usando il metodo cronografico, sia in riguardo alla determinazione della lunghezza dei pendoli semplici, sincroni ai pendoli composti, facendo le esperienze collo stesso pendolo, ma con diverse lunghezze del filo, per procurarsi i dati necessarî per valutare l'influenza della resistenza del filo stesso sulla posizione del vero centro od asse di rotazione.

La sola e grave difficoltà che si incontra in questo modo di sperimentare è quella di misurare colla dovuta esattezza la lunghezza del filo; ma a questo riguardo è da notarsi che mentre si potrebbe diminuire questa difficoltà riducendo, come faceva il Bessel, la misura di precisione alla sola differenza delle lunghezze dei pendoli, non si deve poi ritenere insuperabile la difficoltà di misurare colla dovuta precisione la lunghezza di pendoli di 6^m, od 8^m: ciò che io ritengo avrei potuto ottenere, se le condizioni della località nella quale venne eseguita l'operazione, e la scarsezza dei mezzi di misura per me disponibili non mi avessero impedito di ricorrere a processi più delicati e sicuri di quelli che ho usato.

Per valutare convenientemente il grado di approssimazione raggiunto dalle nostre esperienze sulla misura della lunghezza del pendolo semplice che batte il secondo di tempo medio a Roma, bisognerebbe conoscere nella formola

$$\lambda = a + b \operatorname{sen}^2 \varphi$$

il valore esatto delle costanti a e b fra i paralleli vicini a quello di Roma, non sembrando ammissibile la rappresentazione del valore λ per tutte le latitudini, e specialmente per le nostre, cogli stessi valori di a e b, e cioè colle ipotesi che le variazioni di λ dall'equatore ai poli siano veramente proporzionali al quadrato della latitudine φ.

Il Biot, basandosi sopra alcune determinazioni della gravità fatte col metodo di Borda in Italia avrebbe trovato delle sensibili anomalie e riconosciuta la necessità di usare nei nostri paralleli dei valori speciali per queste costanti, secondo le quali per la lunghezza del pendolo alla nostra latitudine risulterebbe

$$\lambda = 0^m,9933380$$

e la gravità

$$g = 9^m,803851$$

Secondo questi dati si avrebbero fra i risultati delle nostre esperienze e quelli ricavati dal calcolo le seguenti differenze:

$$\lambda \text{ osservato} - \lambda \text{ calcolato} = 0^m,0001511$$

$$g \text{ calcolato} - g \text{ osservato} = 0^m,001492$$

Volendo pure attribuire queste differenze all'incertezza delle nostre osservazioni, non sarebbe perciò smentita la bontà del metodo da noi sperimentato, poichè, malgrado le condizioni non del tutto favorevoli in cui furono fatte le esperienze, e il

mezzo non del tutto sicuro, col quale sono state misurate le lunghezze del filo nei varî pendoli, pure queste differenze non sono di ordine superiore a quello delle anomalie presentate da recenti esperienze fatte con tutta cura, e con apparati di precisione nei quali si aveva piena fiducia, per la loro apparente sicurezza, semplicità e finezza di costruzione, quali sono i pendoli a reversione costruiti da abilissimi artisti.

Ma non è improbabile che una parte almeno di queste differenze sia dovuta a qualche incertezza o piccolo errore proprio dalle costanti dedotte dal Biot da un numero troppo scarso di osservazioni, o da qualche incognito difetto degli apparati da esso adoperati.

Ad ogni modo mi sembra ragionevole il raccomandare che nella determinazione della gravità venga adottato anche il processo da noi usato, principalmente in vista della sua semplicità e grande economia; e per parte mia non mancherò di farne ulteriori prove, migliorando la costruzione del pendolo e il modo di misurare la lunghezza del filo.

La misura della gravità, con quel grado di approssimazione che ora si esige, è senza dubbio uno dei più ardui problemi di fisica sperimentale, e la sua completa ed esatta soluzione non può essere convenientemente assicurata altro che dall'accordo dei risultati ottenuti per diverse vie e processi, fra i quali ritengo possa ragionevolmente annoverarsi anche quello ora sperimentato all' Osservatorio del Campidoglio.

Studî sui composti della serie del pirrolo. Trasformazione del pirrolo in piridina.

Seconda Memoria di G. L. CIAMICIAN e M. DENNSTEDT

approvata per la stampa negli Atti dell' Accademia
nella seduta del 5 marzo 1882.

L' anno scorso abbiamo avuto l'onore di presentare a quest'Accademia una Memoria contenente la descrizione d'una nuova reazione per trasformare il pirrolo ed i suoi omologhi in alcaloidi con un atomo di più di carbonio. Noi abbiamo ottenuto facendo agire il cloroformio sul composto potassico del pirrolo una base che ha la formola d'una cloropiridina.

Non potemmo però determinare definitivamente la natura chimica del nuovo composto perchè non ci fu possibile di eliminare il cloro, e di avere in tal modo la piridina, e non essendo inoltre conosciuto nessun derivato clorurato di questo alcaloide non potemmo neppure stabilire l'identità del nostro composto con una delle cloropiridine.

Dopo esserci provveduti di nuove quantità di materia prima, abbiamo tentato di risolver la questione, facendo agire il bromoformio sul composto potassico del pirrolo, sperando di ottenere un bromocomposto e vedere se fosse identico alla bromopiridina ottenuta da Hofmann [1] per azione diretta del bromo sulla piridina.

L'esperienza diffatti confermò le nostre supposizioni ed ora siamo in grado di dimostrare l'identità del nostro composto colla monobromopiridina di Hofmann, e di stabilire il nesso esistente fra la serie del pirrolo e quella della piridina.

Preparazione della monobromopiridina dal composto potassico del pirrolo.

La preparazione della bromopiridina è molto simile a quella della cloropiridina, da noi già descritta l'anno scorso. Il bromoformio similmente al cloroformio, agisce violentemente sul composto potassico del pirrolo resinificandolo in gran parte; perciò è necessario di diluire con etere anidro. Le proporzioni da noi impiegate per la preparazione della base, sono le seguenti: 50 gr. di composto pirrolpotassico e 60 gr. di bromoformio (quantità calcolata) diluito con 500 gr. di etere anidro. Il miscuglio si riscalda da principio fino all'ebollizione, però è necessario di continuare a riscaldare per tre ore a b. m. per rendere completa la reazione.

Si distilla poi l'etere e si fa bollire il residuo semisolido e di color bruno scuro,

[1] Berl. Ber. XII, 988.

con un eccesso di acido cloridrico, in una capsula di porcellana per resinificare il pirrolo e per scacciare la maggior parte del bromoformio rimasto inalterato. Il contenuto della capsula viene posto in un pallone, soprasaturato con potassa o soda caustica e distillato in una corrente di vapor acqueo. Si ottiene in tal modo l'alcaloide in forma di un olio, che si scioglie in parte nell'acqua che passa assieme al medesimo, il quale però contiene ancora tracce di pirrolo e di bromoformio. È molto facile liberarlo da quest'ultimo, saturando il distillato con acido cloridrico ed agitando parecchie volte con etere; oppure scacciando il bromoformio del liquido acidificato con vapor acqueo. Per distruggere le ultime tracce di pirrolo bisogna invece riscaldare la base con un eccesso di acido cloridrico concentratissimo in un apparecchio a pressione, nel modo che abbiamo avuto già occasione di descrivere l'anno scorso.

La bromopiridina ottenuta nel modo descritto è un liquido incoloro, molto rifrangente, più denso dell'acqua nella quale si scioglie notevolmente. Ha una reazione fortemente alcalina ed un odore identico a quello della base ottenuta per azione del cloroformio sul composto pirrolpotassico, colla quale ha in tutto la più grande rassomiglianza.

La bromopiridina bolle a 169°,5 ad una pressione di 760,5 mm. La sua densità è a 0° eguale a 1,645 in rispetto all'acqua di 4°. È stabilissima e resiste all'azione degli acidi bollenti, stando però esposta per lungo tempo alla luce si colora leggermente in giallo.

Il rendimento della bromopiridina è poco soddisfacente, e corrisponde circa al 10 % della quantità che si dovrebbe ottenere secondo l'equazione:

$$2\ C_4H_4NK + CHBr_3 = C_4H_4NH + C_5H_4BrN + 2\ KBr$$

L'analisi diede i seguenti numeri:

I. 0,2834 gr. di materia diedero 0,3978 gr. di CO_2 e 0,0777 gr. di H_2O.
II. 0,2955 gr. di materia svolsero 22,7 c.c. di azoto a 17°,5 e 752 mm.
III. 0,1943 gr. di materia dettero 0,2294 gr. di AgBr.

In 100 parti:

	trovato			calcolata C_5H_4BrN.
	I.	II.	III.	
C	38,28	—	—	37,97
H	3,04	—	—	2,53
N	—	8,90	—	8,85
Br	—	—	50,24	50,65
	100,26			100,00

Il cloridrato si ottiene in forma di aghi incolori, aggruppati, svaporando nel vuoto sull'acido solforico la soluzione della base libera nell'acido cloridrico. Esso è deliquescente.

Il Cloroplatinato $[(C_5H_4BrN.HCl)_2 PtCl_4 + 2 H_2O]$ di bromopiridina, che è meno solubile di quello della cloropiridina, si ottiene in forma di un precipitato cristallino, d'un colore giallo ranciato, trattando la soluzione acquosa del cloridrato

con cloruro di platino. Ottenuto in tal modo esso è privo di acqua di cristallizzazione, ma si trasforma nel sale acquificato, lasciandolo per alcun tempo nell'acqua madre. Il liquido filtrato depone poi ancora per lento svaporamento dei cristalli ben formati d'un colore più carico, che furono determinati cristallograficamente.

Il cloroplatinato della bromopiridina, come quello della cloropiridina [1], cristallizza con due molecole d'acqua. La valutazione della medesima deve esser fatta con molta circospezione, perchè il sale perde facilmente una parte della sua acqua di cristallizzazione stando esposto all'aria.

I. 0,6155 gr. di materia perdettero nel vuoto sull'acido solforico 0,0290 gr. di OH_2.
II. 0,3235 gr. di materia diedero 0,0152 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato		calcolato per la formola
	I.	II.	$2(C_5H_4BrNHCl)PtCl_4+2H_2O$
H_2O	4,71	4,69	4,82

Le analisi del cloroplatinato deacquificato sull'acido solforico nel vuoto diedero i seguenti risultati:

I. 0,2420 gr. di sostanza diedero 0,0652 gr. di Pt.
II. 0,3887 gr. di sostanza diedero 0,2354 gr. di CO_2 e 0,0581 gr. di OH_2.
III. 0,2136 gr. di sostanza diedero 0,3637 gr. di Ag Cl e Ag Br, e 0,3518 gr. di questo miscuglio diminuirono di 0,0254 gr. riscaldati in una corrente di cloro.

In 100 parti:

	trovato			calcolato per la formola
	I.	II.	III.	$(C_5H_4BrNHCl)_2PtCl_4$
Pt	26,95	—	—	27,10
C	—	16,52	—	16,48
H	—	1,65	—	1,37
Cl	—	—	29,26	29,29
Br	—	—	21,97	22,09

[1] Nella nostra Memoria già citata abbiamo descritto il cloroplatinato di cloropiridina con una sola molecola d'acqua di cristallizzazione. Siccome era molto improbabile che due sostanze così simili, e che sono inoltre isomorfe, avessero differenti quantità di acqua di cristallizzazione, abbiamo rifatto le determinazioni di acqua nel cloroplatinato di cloropiridina, e ci siamo accertati che la nostra determinazione dell'anno scorso è erronea, ciò che del resto facilmente si spiega, tenendo conto della grande facilità colla quale questo corpo perde parzialmente la sua acqua di cristallizzazione stando esposto all'aria.

Le seguenti determinazioni fatte con la più grande cura diedero numeri corrispondenti a due molecole di acqua. I cristalli tolti dall'acqua madre vennero lavati e poscia seccati e polverizzati fra carta da filtro e quindi deacquificati nel vuoto sull'acido solforico.

I. 1,4923 gr. di sostanza perdettero 0,0796 gr. di OH_2
II. 1,0603 gr. di sostanza perdettero 0,0567 gr. di OH_2

In 100 parti:

	trovato		calcolato per la formola
	I.	II.	$(C_5H_4ClN.HCl)_2PtCl_4+2H_2O$
H_2O	5,33	5,34	5,38

La determinazione cristallografica del cloroplatinato di bromopiridina è stata fatta nel Museo di mineralogia del prof. G. Struever, dall'ing. sig. Giuseppe La Valle.

La sua relazione che ci venne da lui gentilmente comunicata è la seguente:

« Sistema cristallino: monoclino ».

« Costanti: $a:b:c = 1{,}20735:1:1{,}18815$

« $\eta = +X:+Z = 100° 6' 54''$

Forme osservate: (110), (101), (001), ($\bar{1}01$), ($\bar{3}02$), (011) fig. 4.

« Combinazioni osservate: (110) (101) (001) ($\bar{1}01$) ($\bar{3}02$) (011) [fig. 1]; (110) (011) ($\bar{1}01$) [fig. 3]; (110) (101) (001) ($\bar{1}01$) (011) [fig. 2].

angoli	misurati	calcolati
110:110	82° 28′ 30″	—
101:110	57° 40′ —	—
$\bar{1}$01:$\bar{1}$10	67° 54′ 30″	—
011:110	45° 54′ —	45° 9′ 42″
$\bar{1}$01:011	66° 11′ 30″	66° 55′ 47″
101:011	56° 55′ 30″	57° 2′ 17″
001:$\bar{3}$02	71° 8′ —	69° 40′ 30″
011:001	47° 53′ —	48° 18′ 20″
101:011	56° 55′ 30″	57° 2′ 15″
001:101	35° 25′ —	35° 7′ —
110:001	—	77° 32′ —

« Sfaldatura perfetta (110), in tracce ($\bar{1}$01).

« Proprietà ottiche: Sulle facce del prisma 110 un piano di massima estinzione fa un angolo quasi nullo con lo spigolo [110: 1$\bar{1}$0].

« Il colore è giallo miele.

« Da tali risultati si osserva che il cloroplatinato della bromopiridina è isomorfo con quello della cloropiridina [1].

« Difatti paragonando lo studio cristallografico di questi due sali non solo risulta

[1] Vedi Memoria citata.

identità delle proprietà ottiche, ma anche le costanti e le misure degli angoli differiscono di poco. Per il cloroplatinato di cloropiridina si ha:

$$a:b:c = 1,1966:1:1,1718 \quad e \quad \eta = +X:+Z = 109^\circ 48'$$

mentre per il cloroplatinato di bromopiridina risulta:

$$a:b:c = 1,20735:1:1,18815 \quad e \quad \eta = +X:+Z = 109^\circ 7'$$

« Una piccola differenza solo si è trovata nell'abito dei due sali, quello della bromopiridina presenta le facce (001) e ($\bar{3}$02) che mai si sono rinvenute in quello della cloropiridina. La prima inoltre da svariate combinazioni di forme, mentre la seconda ha una combinazione quasi costante (110) (101) ($\bar{1}$01) (011) ».

Il cloroplatinato di bromopiridina si scioglie nell'acqua bollente, ma lasciando raffreddare la soluzione si ottiene invece del sale primitivo un precipitato giallo, insolubile che va aumentando se si continua l'ebollizione per più ore. Questa sostanza corrisponde perfettamente a quella che si ottiene nello stesso modo dalla piridina e dalla cloropiridina, come lo dimostra la seguente determinazione di platino: 0,2300 gr. di sostanza diedero 0,0696 gr. di Pt.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per la formola $PtCl_2[C_5H_4BrN.Cl]_2$
Pt	30, 26	30, 09

Comparazione della monobromopiridina ottenuta dal pirrolo con quella proveniente dalla piridina.

Il composto che abbiamo descritto è identico alla monobromopiridina scoperta da Hofmann. Per stabilirne esattamente l'identità era però necessario di completare lo studio di questo corpo che Hofmann lasciò incompiuto per difetto di materia. Ciò venne fatto in questo istituto dal dott. L. Danesi dalla cui Memoria prendiamo quanto segue:

La monobromopiridina preparata dalla piridina purissima (bollente a 117°) presso a poco secondo le prescrizioni di Hofmann, è un liquido incoloro, della densità di 1,646 a 0° in rispetto a l'acqua di 4°, poco solubile nell'acqua alla quale comunica l'odore e la reazione alcalina, che bolle a 169° — 170° ad una pressione di 763 mm. [1] Esso ha un odore che ricorda molto quello della piridina; è stabilissimo, resistendo all'azione degli acidi bollenti, ma stando esposto per molto tempo alla luce prende un coloramento lievemente giallo.

Il cloroplatinato cristallizza con due molecole di acqua di cristallizzazione e si trasforma bollendolo con acqua per molte ore in un composto della formola $PtCl_2[C_5H_4BrN.Cl]_2$.

Il dott. R. Panebianco che ebbe la gentilezza di esaminarne il cloroplatinato, trovò che esso era anche cristallograficamente identico a quello della monobromopiridina proveniente dal pirrolo, come si vede nel seguente specchietto, nel quale sono riunite le proprietà più caratteristiche della monobromopiridina, ottenuta per le due vie onde viemaggiormente farne risaltare l'identità.

(1) Hofmann trovò che la monobromopiridina bolle intorno ai 170°.

	Monobromopiridina ottenuta dal pirrolo	Monobromopiridina ottenuta dalla piridina
Punto d'ebolizione. .	169°, 5	169°—170°
Densità d^4_0	1, 645	1, 646
Composizione del cloroplatinato	$2\,(C_5\,H_4\,Br\,NHCl)\,Pt\,Cl_4 + 2H_2\,O$	$2\,(C_5\,H_4\,Br\,NHCl)\,Pt\,Cl_4 + 2\,H_2O$
Forma cristallina del Cloroplatinato . .	Sistema: monoclino (¹) Angoli: $\bar{1}10:110 = 82°\,28'\,30''$ $\bar{1}01:\bar{1}10 = 67°\,54'\,30''$ $110:001 = 77°\,32'$ Sfaldatura: perfetta (110)	Sistema: monoclino (²) Angoli: $\bar{1}10:110 = 82°\,33'$ $\bar{1}01:\bar{1}10 = 67°\,55'$ $110:001 = 77°\,34'$ Sfaldatura: perfetta (110)
Proprietà ottiche del Cloroplatinato	Sulle facce del prisma 110 un piano di massima estinzione è quasi parallelo allo spigolo $[110]:[1\bar{1}0]$.	Sulle facce del prisma 110 un piano di massima estinzione è quasi parallelo allo spigolo $[110]:[1\bar{1}0[$

Azione del bromo sulla monobromopiridina.

Da quello che abbiamo esposto fin'ora risulta dimostrato ad evidenza che il composto pirrolpotassico viene trasformato dal bromoformio nella monobromopiridina di Hofmann. Come si rileva dalle ricerche di questo autore, per azione diretta del bromo sulla piridina a 200°, si ottiene oltre alla monobromopiridina una bibromopiridina fondente a 109°—110°. Era dunque interessante di vedere se la monobromopiridina trattata con bromo si trasformasse nella bibromopiridina descritta da Hofmann.

Le esperienze sono state fatte parallelamente da noi e dal dott. Danesi, sulla bromopiridina proveniente dal pirrolo e su quella ottenuta direttamente dalla piridina, e condussero naturalmente a risultati identici.

La monobromopiridina trattata con bromo a 230—250° si trasforma, come era da prevedersi, nella bibromopiridina di Hofmann fondente a 109—110°.

Noi abbiamo operato nel modo seguente: parti eguali (corrispondenti al rapporto di una molecola di bromo ad una molecola di monobromopiridina) di monobromopiridina e di bromo, la prima allo stato di cloridrato in soluzione acquosa, furono scaldati in tubi chiusi per sei ore a 230—250°. Il bromo non agisce affatto sul cloridrato di bromopiridina a temperatura ordinaria. Aprendo i tubi si nota la presenza di acido bromidrico, e il contenuto dei medesimi è un liquido incoloro, se si evita un eccesso di bromo. Aggiungendo acqua si ottiene un precipitato cristallino della bibromopiridina, che noi abbiamo purificata seguendo le prescrizioni di Hofmann, distillando il tutto in una corrente di vapor acqueo, e cristallizzando il bromo composto che passa coll'acqua, dall'alcool bollente.

Si ottenne in tal modo in forma di lunghe fogliette aghiformi, elastiche, incolore, di un odore debole e caratteristico, solubilissime nell'etere, quasi insolubili

(¹) Secondo le misure dell' ing. G. La Valle.

(²) Secondo le misure del dott. R. Panebianco.

nell'acqua fredda e poco solubili nell'alcool. Fondevano esattamente a 109° — 110°. Il composto ottenuto si mostrò dunque per dirlo in poche parole, in tutto identico alla bibromopiridina di Hofmann.

Costituzione della bromopiridina.

L'identità della base bromurata derivante dal pirrolo colla bromopiridina che si ottiene direttamente dalla piridina, serve pure a dimostrare che la base che noi abbiamo descritto l'anno scorso e che avevamo chiamata provvisoriamente « isocloropiridina », non è altro che la cloropiridina corrispondente alla bromopiridina bollente a 169°,5.

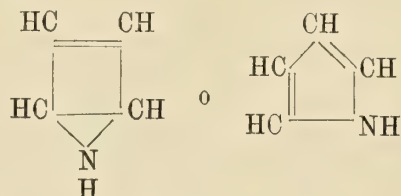
Ciò è provato, anche senza tener conto dell'analogia delle reazioni da cui hanno origine le due basi, dal perfetto isomorfismo dei due cloroplatinati.

Per questi due alcaloidi, e per la piridina stessa risultano, come abbiamo già accennato l'anno scorso, tenendo conto della reazione da noi scoverta, due formole differenti corrispondenti alle due formole che comunemente vengono date al pirrolo.

Esse sono come è noto:

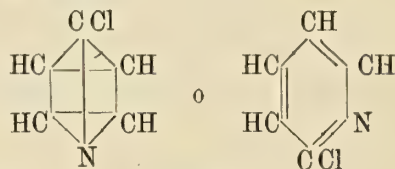
HC — CH
HC — CH
N
H

o

CH
HC CH
HC — NH

dalle quali deriverebbero le formole:

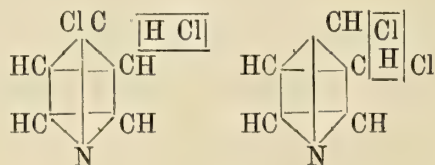
C Cl
HC CH
HC CH
N

o

CH
HC CH
HC N
C Cl

per la cloro- o bromopiridina e per la piridina.

Il primo problema che si presenta dopo ciò è a nostro avviso quello di stabilire la posizione dell'alogeno nel gruppo piridico: cioè di vedere se il cloro od il bromo sono legati a quell'atomo di carbonio, che deriva dal cloroformio e dal bromoformio. Riflettendo sull'azione di questi due corpi sul composto potassico del pirrolo si può immaginare che il cloro e il bromo, che si eliminano in forma di acido cloridrico ed acido bromidrico possono in due modi dar luogo alla formazione di questi due composti. In un caso prendendo l'idrogeno dal residuo del cloroformio o del bromoformio; nell'altro levandolo ad uno dei gruppi, « CH » contenuti nel pirrolo, in modo che l'alogeno vada ad unirsi ad uno degli atomi di carbonio del radicale del pirrolo.

Cl C |H Cl|
HC CH
HC CH
N

CH |Cl|
HC C |H| Cl
HC CH
N

Noi abbiamo potuto risolvere facilmente questo problema, facendo agire il *tetracloruro di carbonio* invece del cloroformio sul composto pirrolpotassico.

Il tetracloruro di carbonio (CCl_4) agisce molto meno violentemente del cloroformio, per cui non è necessario di diluirlo con etere. Noi abbiamo impiegato quantità corrispondenti al rapporto di una molecola di composto pirrolpotassico ad una molecola di tetracloruro di carbonio. A temperatura ordinaria le due sostanze non agiscono l'una sull'altra, ma basta scaldare lievemente a b. m., perchè incominci una viva reazione che si manifesta colla colorazione bruna che prende il composto pirrolpotassico e coll'ebollizione spontanea del liquido. Quando il bollore sta per cessare si scalda a b. m. mantenendo il liquido in ebollizione per qualche ora. Dopo terminata la reazione si estrae la base che si è formata nel solito modo.

Si ottiene la monocloropiridina, identica a quella avuta impiegando il cloroformio.

Il tetracloruro di carbonio agisce anche in questo caso come nella reazione degli isonitrili in modo identico al cloroformio.

Il rendimento però è nel nostro caso molto più cattivo che con quest'ultimo.

Da questa esperienza risulta dunque che il cloro nella cloropiridina è legato al quinto atomo di carbonio che entra nel gruppo del pirrolo, trasformandolo in cloropiridina.

Questo fatto serve a spiegare due altri analoghi. Facendo agire il cloralio o l'etere tricloroacetico sul composto potassico del pirrolo, si ottiene sempre la cloropiridina bollente a 148°.

Per ciò che riguarda la posizione del cloro nella cloropiridina relativamente all'azoto non si può per ora stabilire nulla di esatto.

Perciò ci riserbiamo di fare ulteriori studî sulla cloro e bromopiridina.

È pure nostra intenzione di estendere le nostre ricerche sugli alcaloidi che si ottengono dagli omologhi del pirrolo, e sugli acidi che da essi derivano.

Azione dell'idrogeno nascente sulla Monobromopiridina.

Il comportamento della bromopiridina verso l'idrogeno nascente è molto diverso da quello della cloropiridina. L'anno scorso abbiamo avuto occasione di descrivere i diversi mezzi da noi adoperati per eliminare cloro nella cloropiridina, senza aver potuto raggiungere lo scopo.

Lo zinco in soluzione acida che trasforma la cloropiridina in una idrocloropiridina, serve a togliere facilmente il bromo alla bromopiridina.

Noi abbiamo fatto le seguenti esperienze parallelamente sulla bromopiridina sintetica e su quella ottenuta dalla piridina.

La base sciolta in acido cloridrico diluito, venne posta in una serie di boccettine (4 gr. per boccia), ed aggiuntovi tre o quattro pezzetti di zinco puro per una, ed alcune goccie di cloruro di platino, per avviare lo sviluppo d'idrogeno, si abbandonò il tutto a se stesso per tre giorni, avendo però cura di aggiungere di quando in quando qualche poco d'acido cloridrico, se lo sviluppo d'idrogeno fosse venuto a mancare.

Per isolare il prodotto di riduzione si versò il contenuto delle boccette in un

grande pallone, e si aggiunse tanta potassa polverizzata da sciogliere il precipitato che si forma in principio.

Distillando il liquido alcalino in una corrente di vapor acqueo, la base passa subito tutta in principio, rimanendo però sciolta nell'acqua. Si ripete la distillazione del liquido ottenuto aggiungendo di nuovo una grande quantità di potassa, e finalmente si separa la base dall'acqua spostandola per mezzo della potassa solida.

L'olio ottenuto ha l'odore della piridina, e venne seccato bollendolo sulla potassa fusa di fresco.

Distillato, esso non mostra un punto di ebollizione costante, ma incomincia a distillare 110° ed il termometro sale fino a 120°; al disopra di 117° però non passano che poche goccie di liquido che contengono ancora del bromo.

Dopo ripetute distillazioni vennero raccolte due frazioni, l'una bollente a 111°—113° e l'altra a 113°—115°—116°.

Le analisi di questi liquidi diedero risultati che rendono probabile che s'abbia da fare con un miscuglio di *Piridina* e di *Diidropiridina*.

I. 0,1751 gr. di sostanza dettero 0,4786 gr. di CO_2 e 0,1215 gr. di OH_2.
II. 0,1630 gr. di sostanza dettero 0,4484 gr. di CO_2 e 0,0993 gr. di OH_2.
III. 0,2500 gr. di materia dettero 0,6899 gr. di CO_2 e 0,1645 gr. di OH_2.
IV. 0,2867 gr. di sostanza dettero 0,7892 gr. di CO_2 e 1802 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	frazione bollente a 111°-113°			frazione bollente a 113°-116°	
	I.	III.		II.	IV.
C	74, 54	74, 14	. . . . . .	75, 02	75, 07
H	7, 71	7, 16	. . . . . .	6, 77	6, 98

calcolato per « C_5H_7N »			calcolato per « C_5H_5N »	
C	74, 07	. . . .	C	75, 94
H	8, 64	. . . .	H	6, 33

Le analisi I. e II. sono state fatte col prodotto di riduzione della bromopiridina ottenuta dalla piridina, e le analisi III. e IV. col prodotto di riduzione di quella ottenuta dal pirrolo.

Come si vede i numeri trovati stanno fra quelli richiesti dalla piridina e quelli richiesti dalla diidropiridina. Il punto di ebollizione abbassato sta in buona relazione coi risultati analitici.

I liquidi analizzati e alcune goccie che passano, come fu già detto, sopra ai 117° e che contengono un poco di bromopiridina rimasta inalterata, sono i soli prodotti che si ottengono in questa reazione. Non si formano neppure tracce di ammoniaca.

Sarebbe cosa molto interessante di studiare il comportamento verso il cloroformio di altri imidocomposti, e massime di quelli che contengono lacune, in forma della combinazione potassica.

La più grande probabilità di riuscita potrebbe avere l'indolo, che dovrebbe dare una clorochinolina.

Note microlitologiche sopra i calcari.

Memoria del prof. DANTE PANTANELLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 marzo 1882.

(Con due tavole)

I calcari possono dividersi in tipi ben determinati, tanto se si considerano riguardo alla loro origine e alle modificazioni che possono aver subìto per quel lento metamorfismo del tempo che altera tutte le roccie, sia disponendo diversamente i loro elementi, sia introducendone dei nuovi, quanto secondo la natura dei resti fossili che essi contengono: un' altra divisione possibile sarebbe quella cronologica, essa è però la meno propria per raggruppare in poche suddivisioni le diverse roccie calcaree potendo le stesse forme presentarsi in periodi diversi.

Per dare un ordine al resoconto delle indagini da me condotte sopra una serie non piccola di calcari italiani, dividerò l'esame dei medesimi nel modo seguente, coll'avvertenza che per resti fossili intendo alludere ai soli resti organici microscopici:

I. Calcari cristallini; esemplari ventotto, sezioni sessantacinque.

II. Calcari cristallini con fossili; esemplari cinque, sezioni quattordici.

III. Calcari amorfi; esemplari sette, sezioni sette.

IV. Calcari amorfi con fossili indeterminati; esemplari venticinque, sezioni quaranta.

V. Calcari amorfi con fossili determinati; esemplari quarantatre, sezioni ottantotto.

Sono quindi in tutto 108 esemplari distribuiti in 214 preparazioni microscopiche. Le osservazioni sono state condotte con un microscopio di Fuess gran modello, il cui uso doveva alla cortesia del Ministro della Pubblica Istruzione.

Le roccie per le quali non indicherò particolarmente il collettore o, essendo preparazioni, il proprietario, sono state da me raccolte e preparate e sono conservate nella mia collezione particolare.

I. Calcari cristallini.

Pongo in questa categoria tutti quei calcari che essendo costituiti da elementi più o meno minutamente cristallini non presentano traccie di fossili; ma per questa divisione, come per quelle che seguono, meglio di ogni altra parola serviranno le descrizioni seguenti:

1. Calcare oolitico del Siluriano di Sardegna (quattro sezioni del museo di geologia della r. università di Pisa).

Aggregato di ooliti avvicinate regolarmente e in contatto le une alle altre; le ooliti sono tutte uniformemente rotonde e quasi eguali in grandezza; il loro diametro non oltrepassa un millimetro ed in alcune di esse si possono osservare fino a

ventitre strati concentrici; con la luce polarizzata presentano la croce nera secondo i piani principali dei nicol, senza offrire traccia di anelli colorati, sicchè è a ritenersi che i cristallini di calcite che li costituiscono abbiano tutti la stessa orientazione rispetto alle superfici sferiche dei diversi strati concentrici dell'oolite, precisamente come accade per le foraminifere nelle quali si osserva lo stesso fenomeno attesa la disposizione radiale dei cristallini di calcite del loro guscio. Il nucleo delle ooliti è ordinariamente indeterminabile, in parecchi casi è un frammento di calcite, in altri un frammento di quarzo; lo spazio tra le ooliti è ripieno di frammenti di quarzo non maggiori di $0^{mm},05$, irregolari, angolosi, jalini e per la grandezza dentro i limiti nei quali il quarzo può essere trascinato dalle acque senza subire arrotondamento per l'attrito.

2. Calceschisto a Orthoceras, Puntato Alpi Apuane (Lotti); due sezioni.

Calcare minutamente cristallino con frammenti micacei e corpuscoli oscuri forse ferruginosi o ocracei indeterminabili.

3. Calcare dolomitico della formazione porfirica di Sostegno, Crevacuore Val Sesia (C. F. Parona); una sezione.

È un impasto di frammenti irregolari di calcare cristallino parte opaco, parte trasparente; si potrebbe per analogia con altri calcari magnesiaci ritenere che i frammenti opachi rappresentino quella parte di calcare maggiormente ricca di magnesia.

4. Cipollini di Capanna del Sagro, Alpi Apuane (sezione del museo di geol. di Pisa).

Conservo il nome di cipollini ai calcari schistosi cristallini così comuni nelle antiche formazioni; si presenta questa sezione sotto il microscopio come un minutissimo impasto di cristallini di calcite; i cristalli sono così piccoli che è molto difficile riconoscervi altri minerali, e un forte ingrandimento è contrariato dalla difficoltà di ottenere con queste roccie sezioni molto sottili, essendovi un limite alla sottigliezza che si può raggiungere tagliandole, a causa dei materiali minuti ma facilmente disgregabili dai quali sono formati; è però evidente che altri minerali in minutissimi cristalli sono uniti a quelli di calcite, e certi riflessi cerulei discernibili con forti ingrandimenti in alcuni cristalliti, riflessi variabili d'intensità collo spostamento dell'analizzatore, fanno supporre la presenza di una varietà qualunque di mica o di damourite.

5. Cipollino a Orthoceras Mosceta, Alpi Apuane (Lotti); due sezioni.

Cristalli irregolari di calcite con cristalli di quarzo, di albite e qualche laminetta di mica; il feldispato albite si trova comunemente nei calcari antichi, è ordinariamente in cristalli visibili anche ad occhio nudo, perfettamente trasparente e ben riconoscibile per la sua geminazione caratteristica.

6. Calcare con selce, zona dei marmi presso Mosceta, Alpi Apuane (sezione del museo di geol. di Pisa).

Impasto di minuti cristalli di carbonato di calce con rari e minutissimi cristalli di quarzo.

7-12. Grezzoni; quattordici sezioni; due di queste sono del museo di Pisa.

Con la parola grezzone s'indica a Seravezza e in qualche parte del Massese i calcari ordinari, compatti, impuri, alquanto magnesiaci che formano la zona inferiore

della serie marmifera apuana; nella loro parte superiore contengono fossili del Trias superiore (De Stefani). Nel Carrarese e in altri luoghi si chiamano tarsi, parola che è pure stata introdotta da Cocchi e da De Stefani nel linguaggio scientifico. Le sezioni di questi grezzoni provengono dal monte Corchia, Strascicata e Inferno, Vinca e Granajola.

Il tipo generale di questi grezzoni è un impasto di cristalli irregolari di calcite, nel quale sono inclusi cristalli romboedrici opachi già stati giudicati dolomitici da De Stefani, essendo l'angolo del parallelogrammo, secondo il quale si presentano nella sezione, alcune volte compreso tra l'angolo della calcite e quello della dolomite; essi sono spesso isolati, a volte invece sono riuniti in plaghe distinte; i grezzoni racchiudono sempre cristalli d'albite. Non sempre i grezzoni si presentano nel modo descritto, molte volte sono ripieni di fossili ed avrò agio di parlarne nei capitoli seguenti.

13. Marmo statuario di Crestola, Carrara; tre sezioni.

Il marmo si presenta in banchi intercalati nella parte superiore della zona degli schisti micacei cristallini della parte più recente del Trias superiore; si distingue dai marmi ordinari per la grana e la struttura finissima facilmente lavorabile in tutti i versi. Sotto il microscopio presenta un impasto di cristalli (tav. II, fig. 1) di calcite trasparenti irregolari, le cui dimensioni oscillano tra due e cinque decimi di millimetro che nelle loro anfrattuosità comprendono ammassi di cristallini alcune volte piccolissimi senza che possa distinguervisi alcuna delle forme regolari della calcite; nei cristalli maggiori sono spesso evidenti le linee polisintetiche caratteristiche della calcite; è noto come nei marmi di Carrara ed anche nello statuario si trovino sovente cristalli nitidissimi di quarzo jalino; essi sono isolati in piccole cavità del marmo stesso, specie di geodi che non contengono che pochi cristalli di quarzo, a volte uno solo; nella prossimità di queste i cristalli di calcite sono più grossi e quindi più trasparenti; nelle tre sezioni praticate in tre diversi frammenti di questa roccia non ho trovato traccie di quarzo; si direbbe che questo minerale che trovasi nel marmo tanto puro e sì perfettamente cristallizzato si sia concentrato in pochi punti senza che sia rimasto diffuso nella massa stessa, se pure un tempo vi è stato.

14. Calcare infraliassico di Tòrrita, Garfagnana (De Stefani).

È un calcare grigio scuro cristallino cosparso di nuclei chiari che sotto al microscopio si risolvono in altrettante ooliti irregolarissime formate da un sottile involucro di calcite a cristallizzazione radiale, che racchiude dei cristalli minuti di calcite trasparenti; le ooliti sono assai distanti fra loro e immerse in un cemento opaco di calcare minutamente cristallizzato.

15-18. Marmo giallo della Montagnola Senese.

Il marmo giallo di Montarrenti, cava principale di questo marmo nella Montagnola Senese, così ricercato nelle arti decorative per i suoi vaghi colori e per la sua durezza è un brecciato a colori variabili giallo chiaro, giallo carico, carnicino e violetto; alcune volte si trovano saldezze unicolori gialle, il più sovente si trova in frammenti varicolori fortemente cementati da sostanze ocracee violette; racchiude avanzi di fossili indeterminabili, sono ordinariamente articoli di crinoidi, gasteropodi molto deformati e una tavola di questo marmo nel palazzo Pitti a Firenze offre la sezione di un ammonite; viene scavato oltre che a Montarrenti, a Semignano, Lucerena e Tegoja.

Le sezioni praticate nel marmo giallo e che si trovano nella mia collezione particolare sono diciotto.

Quelle condotte nel marmo giallo uniforme offrono un impasto di minuti cristalli di calcite; in due di queste sezioni si scorgono alcuni corpi in forma di 6, che si distinguono dalla roccia circostante per una maggiore piccolezza e trasparenza dei cristallini di calcite, i quali offrono una specie di orientazione lungo il margine della figura stessa; sono per me tuttora sezioni indecifrabili: in altre sezioni si trovano sparsi nella massa o accolti in vene cristalli trasparentissimi di calcite, e qualche minuto cristallo di quarzo.

Le sezioni condotte in prossimità delle vene ocracee o bianche dello stesso marmo offrono minerali diversi; così le vene bianche sono di calcite in cristalli relativamente grossi misti a cristalli di quarzo: nella massa poi del marmo minutamente cristallino, e più specialmente nelle venate, si scorgono nitidissimi cristalli di ottrelite; le vene scure risultano di una sostanza ocracea indeterminabile: in queste specie di madrimacchie si trovano dei cristalli di pirite e di calcopirite, che si altera in macchie verdastre di carbonato di rame sotto l'azione degli agenti atmosferici.

Spesso nel marmo giallo la sostanza ocracea che collega i diversi frammenti del brecciato, è raccolta in noduli anche di grandi dimensioni; una sezione condotta in questi noduli mi ha mostrato che, salvo la mancanza o la rarità della calcite, non differiscono nel loro impasto da quello delle vene violette o rosso cupe che attraversano in tutte le direzioni i brecciati di Montarrenti e Lucerena.

19-20. Marmo statuario di Semignano e Lucerena, Montagnola Senese; due sezioni.

Unitamente al marmo giallo e intercalato con esso, trovasi nelle stesse località, eccettuato Montarrenti, un marmo bianco candidissimo quanto il più fino statuario di Carrara; esso si presenta però al microscopio un po' diversamente, così mentre lo statuario di Carrara è costituito da un feltro di grossi cristalli quasi direi cementati da altri più piccoli, il marmo bianco della Montagnola Senese è formato da piccoli cristalli irregolari tutti presso a poco della stessa grandezza non maggiore di otto centesimi di millimetro; è questa probabilmente la ragione per la quale trovasi difficilmente delle saldezze di questo marmo prive di ciò che i lavoranti chiamano peli, la cui presenza rende impossibile la lavorazione.

21-22. Schisti calcari di Lucerena, Siena; quattro sezioni.

Si trovano questi calcari intercalati nella zona dei marmi bianchi e gialli di Lucerena; si presentano in banchi di una discreta saldezza e possono essere facilmente lavorati; sono verdognoli o neri, i verdi sono più specialmente pregiati nelle arti decorative; sotto al microscopio tanto i neri come i verdi offrono le stesse apparenze il che mi ha consigliato a riunirli in una stessa descrizione; sono formati da un impasto di minuti cristalli di calcite con minute lamine micacee disposte nel senso della stratificazione o meglio nella direzione della schistosità; questo fatto è comune a tutte le rocce micacee nè credo possa essere da solo invocato come una prova, come alcuni hanno voluto, della formazione della mica posteriormente alla sedimentazione della roccia; le lamine di mica debbono avere naturalmente tendenza

a disporsi secondo la loro maggior superficie, la laminazione posteriore degli strati che ha condotto alla loro schistosità, come alcune volte si è osservato nelle argille mioceniche divenute scagliose per il semplice effetto di grandi frane, ha dovuto ajutare a dare una nuova orientazione alle lamine di mica; sarebbe invece, io credo, prova migliore in mancanza di altre della formazione posteriore della mica, la sua orientazione variabile, per quanto possa anche, come ho detto, la schistosità stessa aver favorito la formazione e la disposizione pseudo-regolare delle lamine di mica.

23-24. Schisti calcari di Celsa e Pieve a Molli, Montagnola Senese; cinque sezioni.

Se i calcari precedenti formano banchi raramente molto schistosi e intercalati ai marmi, questi sempre superiori ai marmi e sottoposti ai calcari cavernosi, sono sottilmente schistosi; al microscopio non differiscono dai precedenti che per un maggior numero di laminette di mica e per una maggiore quantità d'impurità ocracee indeterminabili come lo sono le laminette micacee, rispetto alla possibile varietà di mica alla quale appartengono, per la loro grande piccolezza.

25. Calcari cavernosi di Monte Maggio e Rosia, Siena; sei sezioni.

Le diverse sezioni di questo calcare scuro, cavernoso, magnesiaco e nel quale è perduta ogni traccia di stratificazione, si presentano sempre nelle identiche condizioni; sono calcari impuri, opachi, minutamente cristallini, solcati da numerose vene ripiene di calcite trasparente; nella cavità di questa roccia è sovente raccolta una polvere grigia sottilissima che contiene fino al trenta per cento di carbonato di magnesia, osservata al microscopio risulta formata da cristallini irregolari con molti granuli neri; in queste cavità si trovano alcune volte isolati regolarissimi cristalli di quarzo nero, a superficie ordinariamente rugosa; la materia colorante probabilmente organica e identica forse a quella che colorisce in grigio cupo il calcare cavernoso, e senza norma alcuna diffusa nella massa del quarzo, tutt'al più è disposta secondo zone lineari irregolari.

26. Calcare di Pietra a Padule, cretaceo, Alpi Apuane (De Stefani); una sezione.

È un aggregato di frammenti calcari, uniti da un calcare minutamente cristallino; stando alle apparenze si giudicherebbe un calcare saccaroide nel quale la cristallizzazione del carbonato di calce non è ancora giunta ad una completa uniformità se, come io credo, la cristallizzazione intima dei marmi deve ritenersi come derivante dal tempo, dalle pressioni e da tutte le altre circostanze che determinano il cambiamento strutturale delle roccie.

27. Calcare intercalato al calcare con selce, cretaceo, Camajori (sezioni del r. mus. di geol. Pisa); due sezioni.

Impasto calcitico di frammenti calcarei che sembrano minutamente cristallini; vi sono frequenti delle sezioni di romboedri leggermente ocracee; vi si scorgono altresì non rari dei frammenti di cristalli di quarzo.

28. Calcare screziato sotto i diaspri del calcare con selce, cretaceo; monte Prano, Alpi Apuane (sezione del r. mus. di geol. Pisa).

È in tutto simile al precedente.

II. Calcari cristallini con fossili.

29-30. Nel precedente capitolo ho descritto le sezioni di alcuni grezzoni nei quali si ritrovano traccie di fossili; non tutti però si presentano nello stesso modo. Una sezione del grezzone sotto ai marmi di Vinca, Alpi Apuane (sezione del museo di geol. di Pisa) ed un' altra dei grezzoni sotto ai marmi di Granajola, Alpi Apuane (sezione mus. di Pisa) sono formati da un calcare cristallino cosparso di sezioni annulari di calcite opaca con nucleo trasparente, le maggiori delle quali raggiungono mezzo millimetro di diametro; io inclino a ritenerle sezioni di *Gyroporella*.

31-32. I grezzoni inferiori di Vinca e di Gramolazzo (otto sezioni del mus. di geol. Pisa) si presentano assai più ricchi di avanzi fossili; sono essi costituiti da un impasto di corpiccioli allungati (tav. I, fig. 1, 2, 3, 5), spesso acuminati alle loro estremità, dritti, curvi e qualche volta con traccie di concamerazioni; anche qui mi trovo indeciso ad assegnare non solo il genere ma anche la sede di questi problematici resti organici; probabilmente alcune potrebbero essere *Gyroporelle* mentre quelle munite di concamerazioni successive potrebbero essere *Nodosinelle;* il calcare è minutamente cristallino, e i cristalli irregolari da cui è formato sembra che a volte penetrino nello spazio occupato dai fossili, circoscritti da una linea più opaca senza alcuna nettezza nei contorni.

33. Calcare infraliassico di Tòrrita, Garfagnana; quattro sezioni, due delle quali appartengono al museo di geol. dell'univ. di Pisa.

Calcare cristallino assai opaco, sparso di nuclei rotondi del diametro massimo di mezzo millimetro; limitati da una linea grossolana oscura sono ripieni di calcite cristallizzata; generalmente sono arrotondati, alcuni però si presentano acuminati alle due estremità, i cristalli di calcite del loro interno sono sempre molto regolari; se non sono ooliti, come farebbe supporre la mancanza di strati concentrici, potrebbero essere sezioni di *Dactyloporidae;* oltre a queste si trovano alcune rare sezioni, già segnalate dal Meneghini, che per la loro struttura a spirale e senza traccie di concamerazioni, debbono riferirsi a sezioni trasversali di Spirilline (tav. I, fig. 4) (*Trochamminae* pars).

III. Calcari amorfi privi di fossili.

34. Calcare di monte Bozzapila, Alpi Apuane (De Stefani); una sezione.

I calcari amorfi cioè nei quali l'impasto è uniformemente omogeneo e di piccolissimi elementi calcarei senza che vi si possa riconoscere traccia di cristallizzazione, fatta astrazione dalle vene che li solcano e che sono sempre ripiene di calcite, o che risultano di frammenti di calcare cementati dalla calcite, sono raramente privi di fossili; in molti casi saranno indeterminabili ma è ben raro di trovarne tali che non contengano traccie di organismi, sicchè io inclino a credere che la mancanza di fossili che ho riscontrato nelle seguenti sezioni, attesti meglio la loro rarità che la loro mancanza assoluta. La sezione del presente calcare risulta da un impasto di frammenti di calcare amorfo cementati dalla calcite.

35-38. Una sezione del calcare screziato sottostante al macigno del torrente Palmignola sotto Castel Poggio, Alpi Apuane (sezione del museo di geol. di Pisa)

offre qualche frammento di quarzo; una sezione di calcare proveniente da Vezzano, monte Pisano, due del calcare screziato di Barbistio, Chianti e una sezione del calcare con selce di Gombitelli (museo di geol. di Pisa) sono egualmente costituite da un impasto omogeneo, amorfo, opaco, inquinato largamente da una sostanza ocracea, senza traccie di vene di calcite.

39. In una sezione di calcare delle cave del Cittadella presso Viareggio, con i soliti frammenti calcari collegati dalla calcite, vi sono molte sezioni di romboedri leggermente ocracei e completamente separate e distinte fra loro.

40. Finalmente una larga sezione di un calcare grigio chiaro di Ama, Chianti, è formato da un minutissimo impasto di elementi calcarei nei quali non si può distinguere traccia di cristallizzazione; è l'unico calcare recente, eocenico, che abbia riscontrato di struttura omogenea non cristallina e senza traccie di fossili, essendo assai differente da quelli segnati ai numeri 35-38, non offrendo come quelli traccie di materiali estranei al carbonato di calce.

IV. Calcari amorfi con fossili indeterminati.

41. Calcari della zona a Daonelle, Trias, Mareson, Valle di Zoldo, Belluno (Taramelli); due sezioni.

Calcare scuro, quasi nero e schistoso; in sezione è giallo grigio molto scuro; è ripieno di frammenti organici; l'elemento calcare è probabilmente cristallino ed è associato a microliti scuri diversi indeterminabili.

42. Calcare a madrepore Lodino, Friuli (Taramelli); tre sezioni.

Sotto il microscopio si scorgono una quantità di corpicciuoli opachi, irregolari, allungati, che appartengono certamente a resti organici; sono cementati dalla calcite ed alcune sezioni rotonde potrebbero essere foraminifere del gruppo delle *Globigerinidae*, altre pure rotonde assai grandi sono sezioni di *Dactyloporidae*, delle quali forse si scorgono le sezioni trasversali rappresentate da sezioni rettangolari ripiene di calcite.

43. Calcare dolomitico con Diplopore, Monte Fenera Val Sesia (C. F. Parona); due sezioni.

Massa di minutissimi frammenti di calcare amorfo ove si trovano sparsi anelli di calcite trasparenti con nucleo opaco, simili a quelli di alcuni grezzoni delle Alpi Apuane e che con molta probabilità rappresentano sezioni di *Gyroporelle* (*Diplopore*).

44. Calcari rossi giurassici di Tenerano, Alpi Apuane (De Stefani); una sezione.

È un impasto di materiali amorfi, con frequenti frammenti di fossili; i frammenti debbono riferirsi a foraminifere.

45. Calcare a bivalvi del Lias inferiore Saltrio, Varisotto (C. F. Parona); tre sezioni.

Impasto di calcare amorfo con frammenti di foraminifere e piccole orbuline; loggie isolate di foraminifere; vi sono inoltre traccie di un minerale giallognolo indeterminato.

46. Calcare rosso ammonitifero di Gerfalco; tre sezioni.

Impasto minutissimo di calcare amorfo colorato in rosso senza che possa separarsi al microscopio la materia colorante; non vi è nessuna traccia di materiali

cristallizzati, i frammenti di foraminifere sono frequentissimi e con essi avvi qualche frammento di guscio di molluschi; in questo calcare sono ottimamente conservati i modelli delle ammoniti e per la sua compattezza, permettendo un facile pulimento, è largamente impiegato nelle arti decorative sotto il nome di Rosso di Gerfalco o di Maremma.

47. Calcare ad Aptycus di Spoleto; una sezione.

È un calcare compatto bianco a frattura concoidea; sotto il microscopio appare costituito da calcare omogeneo amorfo con piccole orbuline.

48-55. Calcare di Pietra a Padule, Alpi Apuane, Neocomiano (De Stefani) una sezione; calcare di Campignano, Alpi Apuane (De Stefani) una sezione; Calcare di monte Paludina, Alpi Apuane (De Stefani); due sezioni; Calcare di Vecchiano, Alpi Apuane (De Stefani), una sezione; Calcare di Gombitelli (mus. geol. di Pisa) una sezione; Calcare del monte Matanna, Alpi Apuane (De Stefani) una sezione; Calcare cretaceo di Camajore, Alpi Apuane (sezione del mus. geol. di Pisa); Calcare majolica del sasso di Gavirate (C. F. Parona) due sezioni.

Queste diciannove preparazioni si presentano con gli stessi caratteri ed appartenendo tutti alla stessa epoca geologica, ho creduto riunirli in una unica descrizione; il calcare compatto a frattura concoide scagliosa si presenta sotto il microscopio come un impasto opaco amorfo nel quale sono frequenti delle piccole orbuline; sono notevoli questi calcari per l'assenza di fossili diversi da quelli riferibili al genere sopracitato: solo in una sezione del calcare majolica di Gavirate ho riscontrato parte di una sezione circolare (tav. II, fig. 2) nella quale si scorgono dei nucleoli disposti secondo un reticolato esagonale il che potrebbe riferirsi ad una radiolaria del gruppo delle *Etmosphaeridae.*

56. Una radiolaria del gruppo delle *Cyrtidae* e probabilmente una Polystichia l'ho pure riscontrata in un calcare rosso del Lias superiore di Castel Berzi, Rapolano; il calcare è rosso opaco in massa e si mantiene fortemente colorato anche in sezioni sottili; è di struttura amorfa con abbondanti frantumi trasparenti di foraminifere.

57. Calcare argilloso eocenico di Pontignano, Siena; cinque sezioni.

È un calcare impuro, amorfo, giallognolo, con molti resti di piccole foraminifere globigerine, orbuline e testularie ripiene ordinariamente da un materiale ocraceo scuro che è pure abbondantemente diffuso nella massa del calcare.

58. Calcare eocenico di Ama, Siena; tre sezioni.

Il calcare è bluastro a frattura scagliosa e nel Chianti è detto volgarmente galestro, intendendosi con questa parola nel Senese e in molte altre parti della Toscana, indicare tutte le rocce che per l'azione degli agenti amosferici si rompono e si disfanno in scaglie sottili qualunque sia il loro colore, mentre tra i cultori della geologia è stata impiegata più comunemente la parola galestro per indicare le rocce argillose rosso scure così comuni nell'eocene superiore e nel Lias superiore della Toscana. Sotto il microscopio si presenta formato da un impasto omogeneo di calcare amorfo con frequenti sezioni di piccole orbuline, logge isolate di globigerine ed altri frammenti di foraminifere.

59. Calcare a bivalvi di Gramaglione, Apennino bolognese (sezione del museo di mineralogia della r. Università di Bologna).

Calcare amorfo con rari frammenti di quarzo, spicule silicee di spongiari, logge isolate di globigerine, piccole orbuline e frammenti di orbitoidi; le spicule di spugne sono di silice minutamente cristallizzata ed offrono al microscopio polarizzante i noti fenomeni di pleocroismo.

60. Calcare compatto marnoso, Rio della Cella, Capanne, Apennino bolognese (sezione del mus. di min. di Bologna).

È un calcare amorfo nel quale sono sparsi piccoli romboedri di calcite; vi si trovano frammenti di globigerine, un frammento di testularia e un frammento di dentalina?

61. Calcare nero di Codozzi sul Rio Maggiore, Apennino bolognese (sezione del mus. di min. di Bologna).

Impasto di calcare amorfo a minutissimi elementi con frammenti indeterminabili di foraminifere.

62. Calcare (Bisciaro) di monte Salvara, Apennino bolognese (sezione del museo di min. di Bologna).

È costituito da minuti elementi amorfi di calcare con rari frammenti micacei e quarzosi, oltre ad alcuni frammenti gialli di un minerale trimetrico; contiene molti frammenti di globigerine e piccole orbuline.

63. Calcare (Bisciaro) di Propolo, Belvedere Apennino bolognese (sezione al museo di min. di Bologna).

Calcare impuro; amorfo con molti granuli scuri e qualche piccola orbulina.

64. Calcare (Bisciaro) di Pian di Casale, Apennino bolognese (sezione del museo min. di Bologna).

È un impasto di minuti elementi amorfi di calcare, inquinati da granuli rossi e neri; contiene inoltre molte spicule calcaree, varie piccole orbuline e molti frammenti indeterminabili di foraminifere: dall'esame microscopico di questi calcari e dal loro aspetto litologico credo che non si possono separare i bisciari dai calcari marnosi detti anche galestri della Toscana, con i quali hanno a comune anche il periodo geologico e il carattere di scomporsi in minute scaglie sotto l'azione prolungata degli agenti amosferici, il che non accade per i calcari compatti in Toscana chiamati alberesi e che sono intercalati ai medesimi.

65. Calcare a bivalvi Casola, Apennino bolognese (sezione del museo min. di Bologna).

Calcare amorfo attraversato da spesse vene di calcite fibrosa e molte logge isolate di globigerine.

V. Calcari amorfi con fossili determinati

66. Calcare di monte Germula Friuli, Carbonifero (Taramelli).

Sono stato in dubbio se questo calcare dovesse aggrupparsi tra i calcari cristallini o tra quelli amorfi; è effettivamente un impasto di elementi calcari semi-cristallini, impuro, dove le impurità appaiono piuttosto sotto la forma di microliti che sotto quella di granuli irregolari come in altri calcari più recenti; il calcare, come ho detto, è semi-cristallino cioè in quello stato nel quale appena con i più forti ingrandimenti comincia a mostrare qualche superficie di cristallizzazione; è ricchissimo di

fossili e la massima parte sono foraminifere; tra queste avvene una gigantesca che sembra appartenere al genere *Fusulinella*; avendone però sezionato due soli individui fortemente deformati, non mi azzardo a spingere più oltre della determinazione generica le mie investigazioni, mancandomi inoltre buoni materiali di confronto; in sezione trasversale cioè secondo l'asse maggiore appare concamerata per modo che i setti trasversali ordinariamente irregolari, sono interrotti in prossimità della parte prossimale dell'interno della spira; il suo diametro in uno degli esemplari sezionati raggiunge 5.mm

Una specie molto abbondante in questi calcari è una spirillina molto affine se non identica alla *S. plana* Möl (tav. I, fig. 6, 7); ne differisce per il numero dei giri che sono otto invece di sei, ed è un po' più schiacciata della specie a cui l'ho riferita; un pretto genere carbonifero è rappresentato con molta abbondanza in questo calcare dalla *Tetrataxis conica* Ehrem. sp. (tav. II, fig. 9, 10, 11); trovansi pure dei frammenti di *Nodosinella* sp. e molte logge isolate di globigerine appartenenti ad una forma singolare costituita da due sole logge analoga alla *G. biloba* d'Orb. per quanto da questa molto differente; nelle otto sezioni esaminate ho trovato due sole di queste foraminifere integre; è costituita come ho detto da due logge sferiche, (tav. I, fig. 8, 9, 10) una maggiore dell'altra, la massima avendo un diametro non maggiore di 0mm,21, la minore di 0mm,09; le due sfericciole penetrano in parte l'una nell'altra in modo che nella sezione una sola conserva la forma circolare e l'altra appare interrotta secondo un arco di circolo; non sembra che vi sia nessuna relazione tra la grandezza della loggia e la penetrazione reciproca, e nei due esemplari integri, una volta la più piccola penetra nella grande, nell'altra accade l'inverso.

Questa particolarità dà alle logge isolate un'apparenza che non saprei assimilare che a quella di un cappello, per quanto il paragone possa sembrare volgare, specialmente quando essendo la più piccola quella conservata o sezionata obliquamente, la più grande penetra nella medesima, sicchè in sezione si scorge un menisco dove l'arco di curvatura minore si continua confusamente al di là della sezione della loggia simulando le falde, seguito il volgare paragone, di questo cappelluccio.

Sezioni simili a queste furono trovate da Schrubsole e da me pure in un calcare carbonifero di Chester, gentilmente favoritomi dal sig. Waters.

Sarebbe questa, se non erro, la più antica globigerina conosciuta e, ritenendola come specie nuova, la indicherò col nome *G. Taramellii.*

Unitamente a questi fossili si trovano anche molti altri frammenti da riferirsi con molta probabilità a *Dactyloporidae*, non vi ho però trovato nulla di questa famiglia che potesse essere determinabile anche genericamente.

67-68. Calcare a Bellerophon, Auronzo Friuli (Taramelli); cinque sezioni.

Ho avuto in due occasioni dal sig. Taramelli, una delle quali per mezzo del sig. Meneghini, varî campioni di questo calcare scuro rossastro quasi nero compatto a frattura irregolare opaca, sicchè le mie sezioni appartengono a tre esemplari diversi dello stesso strato; le sezioni provenienti da quello favoritomi dal prof. Meneghini sono ricchissime di avanzi fossili sempre frantumati, tra i quali si possono riconoscere rottami di *Fusulinella*, e più specialmente di *Gyroporella*; in un secondo esemplare

le sezioni di giroporella sono evidenti ed accennano ad una specie molto affine alla *G. vesiculifera* Gümb; il terzo esemplare di cui non può mettersi in dubbio la certa provenienza, recando il medesimo impronte bellissime di Bellerophon come non hanno i primi, sotto il microscopio non ha presentato nessuna traccia di fossili; è formato esclusivamente da un minuto impasto di elementi calcari con molti granuli a forma cristallina o irregolari, scuri ed opachi che danno alla massa il loro colore; le medesime apparenze si riscontrano negli altri esemplari con fossili, negli spazî tra i resti fossili stessi. Mi sono fermato sopra questo fatto per ricordare quanto sia incerto il giudizio quando sopra un frammento si sia praticata una sola sezione; il numero e spesso la quantità dei fossili di una roccia, lo stato d'aggregamento dei minerali cambia facilmente in brevi distanze e sovente la roccia più apparentemente uniforme offre diverse apparenze in parti tra loro vicinissime; sarà sempre bene praticare sezioni le più larghe possibili, ma assai più utile sarà praticarne diverse, e quando il tempo stringa, non sarà male sacrificare l'ampiezza delle sezioni al loro numero, purchè scelte in esemplari differenti o almeno in parti differenti dello stesso esemplare.

69. Calcare a bivalvi, Lias inferiore, Saltrio Varisotto (C. F. Parona); una sezione.

E un aggregato di frammenti di foraminifere e rottami di molluschi, cementati dalla calcite; tra i fossili sono riconoscibili delle sezioni di Haplopore.

70. Calcare a crinoidi del Lias medio di Arso (C. F. Parona); due sezioni.

È un calcare rosso vivo con spessi articoli, steli ed interi calici di crinoidi; i crinoidi sono ripieni di calcite cristallizzata bianca; le sezioni, una delle quali condotta attraverso la regione glenoidale di un pentacrino, mostrano che la massa colorata in rosso è amorfa; però quando la sezione penetra nella parte superficiale dei crinoidi rimanendo sempre colorata offre una serie di linee fitte, leggermente ondulate (tav. II, fig. 7, 8), che con forti ingrandimenti si risolvono in una serie di punti isolati, colorati in rosso più scuro del rimanente del campo, che accennano alla persistenza di una struttura organica primitiva: nelle sezioni di crinoidi dove contemporaneamente il piano secante penetra nell'interno, le linee ondulate spariscono a misura che la sezione si scolora, rimanendo invece alcune volte un minuto reticolo. Unitamente alle sezioni microscopiche di crinoidi si riscontrano varî frammenti di foraminifere.

71. Calcare majolica dell'istmo di Brandiano Lago di Varese (C. F. Parona); una sezione.

Aggregato fittissimo di piccole orbuline e di piccole globigerine; quest'ultime sono molto affini alle globigerine dell'Eocene e ne differiscono in sezione solo per la loro estrema piccolezza; vi sono altresì delle sezioni di Truncatulinae.

72-73. Calcare di Montalmo rosso, Sicilia cretaceo (Cafici); sei sezioni.

Due di queste sezioni provenienti da un primo esemplare non contengono che piccole orbuline immerse in un calcare amorfo; le altre quattro contengono invece oltre ai soliti frammenti, alcune foraminifere ben conservate, cioè *Ataxophragnium ovulum* Reuss e *Discorbina marginata* Reuss., è in questo calcare che si trovano quei grossi noduli silicei già notati in un pregevole lavoro del sig. Cafici (Bull. comit. geol. 1880) e che esaminati da Zittel furono riferiti a spongiari della famiglia delle *Litistidae*.

74. Calcare di Savignano, Apennino bolognose (sezione del museo min. di Bologna).

È un calcare rossastro costituito da un aggregato di radiolarie e di piccole orbuline; le specie riconosciutevi sono le seguenti: *Urocyrtis Amaliae* Pant, *Lithocampe Bombiccii* Pant, *Adelocyrtis cometa* Pant, *Polystichia Ehrenbergi* Pant, *P. Haeckeli* Pant, *Euchitonia* (*Stylactis*) *clathrata* Pant, *Dictiocha Manzonii* Pant, *D. Bianconii* Pant, *Etmosphaera* sp. È l'unico calcare conosciuto, così riccamente ripieno di radiolarie e così egregiamente conservate; il nucleo delle radiolarie è ripieno di calcite.

75. Calcare compatto di Ca-de-Lotti, Apennino bolognese (sezione del museo di min. di Bologna).

Calcare a minuti elementi con molte logge isolate di globigerinae; *Globigerina bulloides* D'Orb., *Ataxophragmium* sp.

76-79. Calcare screziato di Monte Grossi, Chianti; tre sezioni.

Impasto di globigerine e orbuline; è sottostante al nummulitico. Simile a questo è un calcare screziato di Coltibuono, e un altro di una località sulla strada tra Gajole e Coltibuono ed intercalato nella parte inferiore del macigno: sono queste località del Chianti Senese prossime tra loro, e l'unica differenza che passa tra il primo e i due ultimi, dei quali ho fatto due sezioni per ciascuno, è che mentre il primo non offre che avanzi di globigerinidae, negli altri si scorgono anche frammenti ed intere sezioni di altre foraminifere cioè rotalia, testularia, piccole nummuliti, e frammenti d'orbitoidi; la *Globigerina regularis* D'Orb. e l'*Orbulina universa* D'Orb. sono le sole foraminifere predominanti e quelle meglio conservate.

80. Calcare di Monte di Quiesa, Alpi Apuane (De Stefani); una sezione.

Impasto di frammenti calcari con molta calcite, frammenti di orbitoidi e di *Lithothamnion* affine al *L. tuberosum* Gümb.

81. Calcare nummulitico sotto le arenarie del monte Ghilardone, presso Fibbiallia (sezione del museo geol. di Pisa).

Impasto di frammenti calcari e di foraminifere collegate dalla calcite; contiene *Assilina exponens* Sow. *Nummulites variolaria* D'Orb. *N. striata* D'Orb. *Fusulina* sp.

82. Calcare di Collelungo, Umbria (Bellucci); quattro sezioni.

È un calcare scuro che, come quasi tutti i calcari nummulitici, all'aspetto esterno simula un'arenaria; è costituito da un impasto di foraminifere e di *Lithothamnion* stupendamente conservati (tav. II, fig. 3); inoltre avendo subìto delle infiltrazioni ferruginose o manganesifere da qualche strato vicino ricco di questi materiali, sono penetrate in tutti i pori delle foraminifere circondandole con un involucro scuro che le delinea minutamente; ho detto infiltrazioni da uno strato vicino e non senza ragione, poichè nel grosso frammento rimessomi dall'ottimo mio amico prof. Bellucci vi è veramente unito questo strato fortemente ocraceo, e il calcare dal lato opposto a questo strato si presenta come tutti gli ordinarî calcari nummulitici; è notevole come i *Lithothamnion* così frequenti in questo calcare non sono inquinati dalla materia colorante, e si presentano come piccole macchie biancastre nella sezione della roccia. Le foraminifere sono globigerine, *Nummulites striata* D' Orb., *Orbitoides*

nummuliticum e un' altra specie che non ho potuto determinare per mancanza di confronti; l'alga sopracitata appartiene alla specie [1] *Lithothamnion etruscum* Pant. (tav. II, fig. 5).

83. Calcare nummulitico di monte di Licia, Sarzana (sezione del mus. geol. di Pisa).

Aggregato di fossili con calcite cristallizzata; i fossili riconosciuti sono: *Nummulites striata* D'Orb. *N. Meneghini* D'Arch., *Orbitoides nummuliticum* Gümb., *Lithothamnion Meneghinii* Pant. [2].

84. Calcare nummulitico di Ceserana Val di Serchio (De Stefani); una sezione.

È la solita struttura di questi calcari, non contiene altri fossili determinabili che l'*Orbitoides nummuliticum* Gümb e il *Lithothamnion etruscum* Pant.

85. Calcare nummulitico di Maestà di Foce, Alpi apuane (De Stefani); quattro sezioni.

È un calcare rosso scuro quasi nero ricco di foraminifere cioè nummuliti e orbitoidi, una sezione finamente ondulata mi ha fatto supporre l'esistenza di crinoidi; sono pure evidenti frantumi di *Dactyloporidae*.

86-90. Calcari nummulitici del Chianti, Siena; diciotto sezioni.

Provengono questi calcari da diverse località di questa regione cioè, Coltibuono Monte Grossi, Castagnoli, S. Gusmè e Scopeto.

Partendo dalla valle dell'Arno e venendo verso Siena, i calcari eocenici si sviluppano secondo due grandi pieghe il cui asse è parallelo a quello del Casentino, rappresentante una nuova grande piega a sua volta parallela alla direzione dell'Apennino; le due pieghe comprese tra la valle dell'Arno di Montevarchi e Siena formano ciò che chiamasi il Chianti; la prima piega comprende la serie di colline che da S. Gusmè per monte Secco e Coltibuono si estende lungo la valle dell'Arno, la seconda appare presso i limiti dell'Eocene a Scopeto, seguitando per la Castellina lungo la sinistra della Greve.

Il calcare nummulitico del Chianti come tutti i calcari nummulitici della Toscana che ho avuto agio di studiare, si presenta sotto l'aspetto di una formazione litorale, che poi si riproduce simile nei calcari pliocenici ad *Amphistegina*, raccoltasi in prossimità di roccie calcaree; essi infatti sono costituiti da frammenti di calcare, foraminifere e lithothamnion collegati dalla calcite cristallizzata e raramente includono frammenti di quarzo; quando poi questi vi sono, è sempre dentro quei limiti di grandezza per la quale possono essere anche lungamente trascinati sospesi nelle acque; i frammenti calcarei uniti al nummulitico raggiungono qualche volta anche cinque millimetri di diametro, altre volte mancano affatto; le nummuliti sono sempre piccole e spessissimo rotte, nè mai ho trovato qualche cosa che si assomigli a certi nummulitici dell'Apennino centrale e di altre località italiane, dove le nummuliti grandi e bene sviluppate si trovano integre, facilmente separabili tra loro o in una roccia di debole resistenza: in Toscana il calcare nummulitico chiamato volgarmente cicerchino (con questo nome s'indica a volte anche le arenarie a grossi elementi quarzosi) rappresenta sempre la roccia calcarea più compatta dell' Eocene, anche

[1] Proc. Verb. Soc. Toscana. Volume III, pag. 53.
[2] Ibid.

maggiormente del calcare screziato, detto in Chianti pietra porcina e che rappresenta tanto per i fossili che contiene come pure per la struttura, un passaggio tra il nummulitico e l'alberese.

È pure notevole in questi calcari, che non sono in fondo che aggregati di fossili, una relativa povertà di specie; le più diffuse sono *Nummulites striata* D'Orb. *Orbitoides nummuliticum*, *Crbitoides* sp. (differisce dal precedente per un maggior diametro verticale e per le celle più grandi), *Globigerinae*, *Alveolinae*, *Rotaliae*, *Lithothamnion etruscum* Pant. *L. Meneghinii* Pant. (tav. II, fig. 4) e *L.* aff. *palmatum* Gümb.

91. Calcare nummulitico di Castell'Azara, Monte Amiata: una sezione.

È simile per la struttura ai precedenti; le nummuliti vi sono più rare, abbondano invece i frammenti di altre foraminifere, *Textulariae*, *Alveolinae;* trovasi pure una sezione assai chiara di *Spirillina.*

92. Calcare nummulitico di Gerfalco, (Lotti); una sezione.

È quasi interamente formato dall'*Orbitoides nummuliticum* Gümb; contiene inoltre molti frammenti calcari e rottami di *Nummulites striata* D'Orb.

93. Calcare a bivalvi Migliavacca, Apennino bolognese (sezione del museo di min. Bologna).

È un calcare a Globigerinae ricco di *Orbulina universa* D'Orb. *G. biloba* D'Orb. *G. regularis* D'Orb. e qualche *Nonionina;* vi si scorgono inoltre delle sezioni di gusci di pteropodi, probabilmente *Hyalaee* e *Creseis.*

94. Calcare granulare biancastro di Serra della Querzola, Grecchia, Apennino bolognese (sezione del mus. di min. di Bologna).

È un calcare formato da un impasto di foraminifere senza interruzione; contiene granuli di una sostanza giallo verdastra probabilmente glauconica; le specie che vi ho riconosciuto sono: *Globigerina regularis* D'Orb., *Textularia Mayeriana* D'Orb. *Lingulina rotundata* D'Orb., *Rotalina* aff. *Kalembergensis* D'Orb. *Alveolina* sp. *Pulvinulina* sp. e frammenti d'*Orbitoides.*

95. Calcare compatto, Bercede, Baigno, Apennino bolognese (sezione del museo min. di Bologna).

Calcare amorfo in frammenti con vene di calcite, qualche raro cristallo di quarzo e molte foraminifere in frammenti; appartengono ai generi globigerina, testularia bolivina, orbitoidi e uvigerina; una sezione di nonionina sembra affine alla *N. depressula* Walk.

96. Calcare nero argilloso di Tana della Caprina, Apennino bolognese (sezione del museo di Bologna).

È un calcare amorfo con minuti cristalli di quarzo e di mica; contiene molte sezioni di *Globigerina bulloides* D'Orb. e altri frammenti indeterminabili di foraminifere.

97. Calcare nerastro argilloso di Magarone Apennino bolognese (sezione del museo di Bologna).

È simile per l'impasto al precedente, e contiene oltre alla *Globigerina bulloides* D'Orb. la *Nonionina bulloides* D'Orb. e vari resti di Ataxophragmium.

98. Calcare di Monte delle Formiche, Apennino bolognese (sezione del museo min. di Bologna).

Sono frammenti calcari, collegati unitamente ai molti resti di foraminifere da calcite; quest' ultime appartengono ai generi globigerina, bolivina e ataxofragmium.

99. Calcare grigio cupo a bivalvi, Bargi, Apennino bolognese (museo di min. di Bologna).

Calcare amorfo con frammenti di conchiglia di Pteropodi e spicule silicee di spongiari; le foraminifere sono globigerinide cioè *Orbulina universa* D'Orb., *Globigerina bulloides* D'Orb., *G. biloba* D'Orb. oltre a molte logge isolate di globigerina.

100. Calcare a bivalvi di Gesso, Apennino bolognese (due sezioni del museo di min. di Bologna).

Calcare amorfo ricco di foraminifere ben conservate; le specie riconosciute sono le seguenti: *Orbulina universa* D'Orb., *Globigerina regularis* D'Orb., *Rotalia Akneriana* D'Orb., *Spiroloculina* cfr. *dilatata* Reuss, *Bolivina* cfr. *antiqua* D'Orb., *Textularia* sp. *Nodosaria* sp. *Polymorphina* sp. e molte loggie isolate di globigerine.

101. Calcare nero lamellare di Porretta (cinque sezioni del museo di min. di Bologna e tre nella mia collezione particolare).

Sono esclusivamente resti organici collegati dalla calcite: i resti organici debbono riferirsi ad alghe e più specialmente a *Dactyloporidae*; sono predominanti le seguenti specie: *Nonionina perforata* D'Orb., *Orbulina universa* D'Orb., *Lagaena laevigata* Reuss, *Planorbulina* sp. oltre a molti frammenti di globigerinide; le alghe del gruppo delle *Dactyloporidae* sono più difficilmente determinabili e solo, per quanto sieno abbondantissime, vi ho potuto riconoscere i generi *Haploporella* e *Thyrsoporella,* il primo rappresentato dalle due specie *H. annulus* Park. et Gar. *H. marginoporella* Michel e il secondo dalla *T. cribrosa* Gümb: altra sezione con cavità centrale e un doppio anello sembra che possano riferirsi al genere *Asteria;* vi sono però moltissimi resti organici per me tuttora indecifrabili, tra questi alcuni per la loro forma e per la loro struttura finamente ondulata potrebbero anche riferirsi a sezioni di facce articolari di crinoidi.

102. Calcare grossolano di S. Leo e Jano, Apennino bolognese (sezione del mus. Bologna).

Frammenti calcari collegati unitamente alle foraminifere da calcite; le foraminifere ed altri resti organici sono in frantumi; vi si può però riconoscere i generi *Amphistegina* e *Plecanium* tra le foraminifere e il genere *Lithocampe* tra le radiolarie di cui vi sono tre individui.

103-104. Calcare di Porretta, Apennino bolognese; tre sezioni.

È il calcare a globigerine del quale già ebbe a parlare il sig. Capellini; è un impasto scuro di foraminifere con glauconia e piccoli frammenti di calcare e di quarzo; contiene le seguenti specie, *Orbulina universa* D'Orb., *Globigerina regularis* D'Orb., *Plecanium* sp. *Amphistegina* sp.

105-106. Calcare miocenico fetido di s. Quirico d'Orcia — Calcare pliocenico dell' isola di Pianosa.

Di questi due calcari fossiliferi non ho potuto fare alcuna sezione per la poca coerenza dei materiali, e più specialmente per la diversa resistenza dei medesimi; però da alcune preparazioni della polvere dei calcari stessi ho potuto assicurarmi che sono costituiti da calcare amorfo, in ambedue unito da una specie di compressione

naturale; il calcare di S. Quirico è ricco di materia organica e sciolto nell'acido cloridrico lascia un residuo voluminoso che si carbonizza sopra una lamina di platino incandescente, decolorandosi completamente col prolungarsi del riscaldamento; l'odore bituminoso di questo calcare è così persistente che i frammenti staccati dalle mura di S. Quirico, costruite con questo materiale nel quattordicesimo secolo, per poco che si grattino sviluppano il noto odore caratteristico dei calcari fetidi.

107. Calcare ad Amphistegina di Parlascio; una sezione.

Una sezione praticata nel calcare ad Amphistegina di Parlascio, lo ha mostrato costituito integralmente dalla *Amphistegina Hauerina;* le foraminifere sono collegate dalla calcite cristallizzata, la roccia non è però continua e molti vacui, anche discretamente grandi, si trovano tra le foraminifere che non sono stati riempiti dalla calcite; la sezione in discorso contiene oltre alle *Amphisteginae* uno o due frammenti di altre foraminifere testularie e rotaline, conosco però altre sezioni di questo calcare che si avvicinano al seguente della montagna di Cetona.

108. Calcare ad Amphistegina di Pietra Porciana, Sarteano; due sezioni.

È un aggregato di foraminifere, briozoi e lithothamnion collegati incompletamente dalla calcite; le specie riconosciute sono *Amphistegina Hauerina* D'Orb., *Polistomella crispa* Lam., *Textularia aciculata* D'Orb., *Lithothamnion minutum* (tav. II, fig. 6) *L. hermineum* Pant. [1] *Lepralia* sp. *Dorocidaris* sp.: vi mancano affatto le globigerine.

Prima di lasciare questi calcari ad amfistegina ed insieme la rassegna dei calcari da me esaminati, mi giova avvertire nuovamente che il calcare ad amfistegina rappresenta in Toscana uno dei piani superiori del pliocene; esso si trova principalmente in due località distinte, presso Casciana e Parlascio e lungo la montagna di Cetona da Montepulciano a S. Casciano de' Bagni; a Pietra Porciana si trova all'altezza di 700 met. sul livello del mare; altre volte questo calcare è stato ritenuto miocenico, poi fu assegnato alla parte inferiore del pliocene, ma essendo effettivamente sovrapposto alla stessa formazione delle sabbie gialle e delle marne turchine plioceniche con le quali ha in comune gli stessi fossili, deve essere collocato tra i piani più recenti del pliocene stesso; tutto al più si potrebbe considerare come un facies speciale della parte superiore del pliocene, come io stesso ho fatto notare in altro mio lavoro.

CONCLUSIONE

Lasciando in disparte qualunque considerazione sulla origine dei calcari, le mie osservazioni non potendo servire che a confermare verità già note da tempo e ormai fuori di qualunque discussione possibile, mi limiterò a costatare le successive differenze e i continui passaggi che si osservano nei calcari, quando si abbia occasione di esaminare una serie abbastanza estesa nel tempo e nello spazio.

La compattezza dei calcari va aumentando dai più recenti ai più antichi, e mentre i calcari ad Amphistegina e i calcari pliocenici di Pianosa sono o incoerenti o

(1) Proc. Verb. Soc. Toscana Vol. III, pag. 54.

ripieni di cavità, queste spariscono nei calcari nummulitici riempiendosi di calcite, oppure i materiali del calcare aderiscono maggiormente fra loro come negli alberesi eocenici o meglio nei calcari bianchi del Lias: la sola eccezione più apparente che reale si trova nei calcari cavernosi, nei quali le cavità vanno probabilmente aumentando col tempo; è però da notarsi che questa diminuzione di densità nella massa del calcare è di un altro ordine rispetto a quella che si riscontra in alcuni calcari recenti; in questi la minore densità dipende dai vuoti rimasti tra i frammenti che cementati hanno dato origine alla solida roccia, le prime sono prodotte da probabili e successive esportazioni di materiali più degli altri facilmente solubili.

Il calcare candido polverulento di Pianosa, del quale ho avuto a disposizione diversi esemplari squadrati con sufficiente esattezza, ha in massa un peso specifico compreso tra 1,8 e 2,1; come si vede questo è ben lungi dalla densità 2,84 del marmo, sicchè il primo potrebbe anche essere ridotto di un quarto del suo volume senza subire altre alterazioni che nella sua densità.

È nota la discussione dottissima avvenuta in questi ultimi tempi tra Pfaff, Heim ed altri sulla plasticità dei calcari. Ammessa da Heim, impugnata da Pfaff, almeno nei limiti dentro i quali credeva il primo potere essere estesa, dalla discussione stessa emerge che non si possono ritenere affatto rigide queste roccie e che dentro limiti ristretti possono piegarsi anche senza rompersi, mentre è indubitato che per le grandi flessioni o sotto fortissime pressioni, finiscono o per formarvisi delle grandi spaccature o molto piccole e frequenti fenditure, di cui si scorgono le vestigia in quasi tutte le sezioni di calcari, e che sono col tempo ostruite dalla calcite. La compressibilità dei calcari è un altro elemento di cui devesi tener conto in certi fatti stratigrafici unitamente alla loro rigidità.

Avviene sovente di trovare tra due banchi di calcare di una certa saldezza e che conservano reciprocamente un andamento regolare, masse schistose ripetutamente ondulate e pieghettate; io credo che questo fenomeno dipenda sopratutto da una differenza di compressibilità tra i calcari e le argille, offrendo il medesimo tutte le analogie possibili con la nota esperienza di James Hall: così i calcari avrebbero resistito alle diverse pressioni diminuendo di volume e trasmettendo le forze alle quali erano sottoposti alle argille, avrebbero obbligato queste meno compressibili dei primi ad assumere l'aspetto schistoso e a ripiegarsi tra loro.

Lo stato di conservazione dei fossili, specialmente microscopici, varia come era prevedibile con l'età degli strati, fino a che questi o spariscono affatto nei calcari prettamente cristallini, o si rendono le loro traccie confuse e indeterminate: i calcari carboniferi di monte Germula, i calcari a Bellerophon di Auronzo, conservano tuttora i loro fossili in discreto stato, non sono però in nulla paragonabili alla squisita conservazione delle foraminifere dei calcari amorfi Permiani e Carboniferi di Russia, che tuttora possono facilmente isolarsi dalla roccia presso a poco come quelle dei nostri terreni pliocenici, che sono state così stupendamente illustrate da Möller ultimamente: i calcari ora citati non sono giunti a quello stato prettamente cristallino dei grezzoni delle Alpi Apuane e di certi calcari dolomitici delle Alpi: per quanto nei calcari antichi del Friuli comincino a scorgersi cristallini di minerali che certamente non si sono depositati col calcare stesso, siamo ancora lungi dai nitidissimi

cristalli d'albite dei grezzoni, e i pochi fossili microscopici di questi ultimi calcari sono così profondamente alterati da riuscire in molti casi anche indeterminabili genericamente.

Lo stesso si potrebbe ripetere per i marmi della Montagnola Senese, dove la quasi completa scomparsa dei fossili va di pari passo con la comparsa dell'ottrelite e di altri minerali di seconda formazione.

Riassumendo si può dire che le roccie calcaree, quando non sieno d'origine idrotermale, originariamente incoerenti e porose divengono col tempo più compatte o con la cementazione dei loro elementi per la calcite cristallizzata che si deposita nelle anfrattuosità dei medesimi, o per la cresciuta adesione degli elementi loro a causa della compressione; progressivamente l'azione di questa, la circolazione molecolare delle acque attestata dalle così dette acque di cava, gli squilibri molecolari prodotti dalla temperatura, le ineguali pressioni alle quali possono essere sottoposte, e sopratutto la variabile intensità delle cause stesse, trasformano col tempo le roccie da elementi amorfi in roccie cristalline, cambiando completamente non solo la loro struttura primitiva, ma anche quella dei resti organici solidi che furono racchiusi nella loro massa nel tempo in cui si depositavano.

Terminerò queste note ringraziando vivamente i sigg. Meneghini, Bombicci, Taramelli, De Stefani, Lotti, Parona, Cafici e Bellucci che mi resero possibile di estendere il mio esame oltre quei calcari che da me stesso aveva potuto riunire, inviandomi le roccie da loro raccolte o permettendomi di esaminare comodamente e nel mio studiolo le sezioni già preparate.

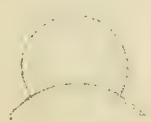
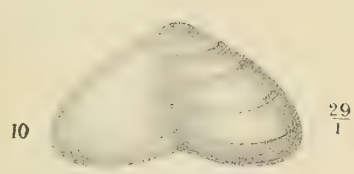
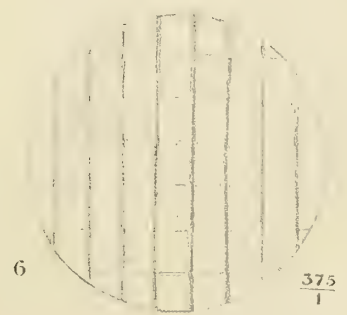
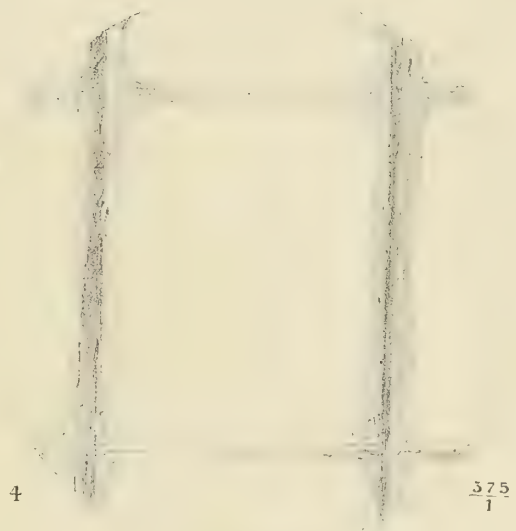
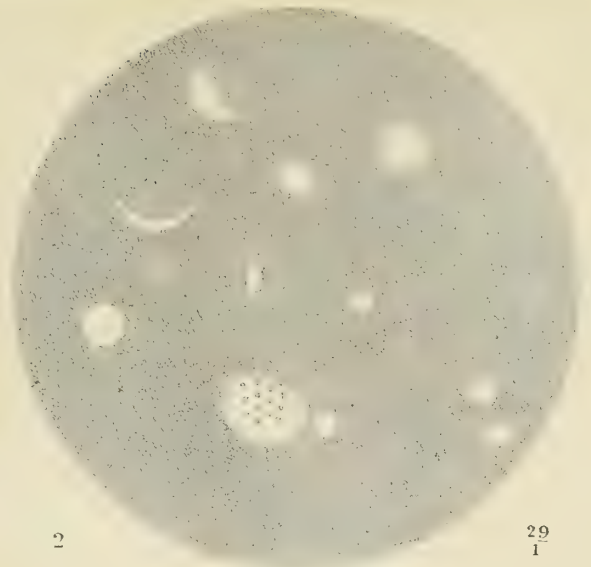
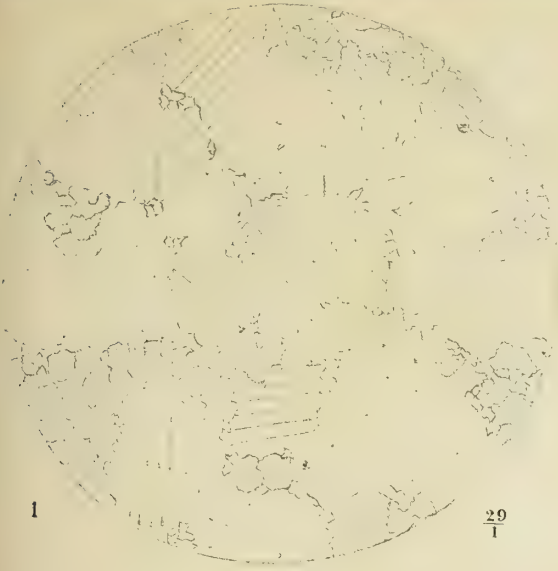
INDICE DELLE TAVOLE.

Tavola I.

Tavola II.

1
29/1
2
29/1
6
29/1
3
29/1
4
29/1
7
29/1
5
29/1
8
9
29/1
10

D. PANTANELLI DIS.

LIT. BRUNO E SALOMONE R.

Ricerca del fenomeno di Hall nei liquidi.

Memoria del prof. ANTONIO ROITI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia

nella seduta del 2 aprile 1882.

(Con una tavola)

§ 1. È noto come Hall (¹) sia riuscito pel primo, dopo parecchi tentativi di altri (²), a constatare che in un campo magnetico costante si possono manifestare delle azioni equivalenti ad una forza elettromotrice permanente. Una foglia d'oro incollata sul vetro era disposta fra le faccie polari, e perpendicolarmente all'asse, della elettrocalamita di Faraday. Mentre vi passava pel lungo, da C verso D, fig. 1, la corrente di alcune Daniell, si ricercavano due punti A, B di egual potenziale, ponendovi gli scandagli d'un galvanometro sensibilissimo, il quale doveva rimanere a zero; ma che invece deviava permanentemente da un lato o dall'altro, quando la calamita veniva eccitata.

Per fissare il verso della deviazione, si supponga che il viso del lettore, il quale sta guardando la fig. 1, sia quel polo della calamita che si rivolgerebbe al nord, talchè le correnti Ampèriane determinanti il campo magnetico girino nel verso delle freccie curve: ed allora il galvanometro accusa una corrente che esce in B dalla lastrina, come se B fosse il polo positivo di una pila ed A fosse il polo negativo.

Invertendo la polarità del magnete, s'inverte la deviazione del galvanometro.

Ora si rammenti che, per la legge di Ampère, se il conduttore C D fosse mobile, trovandosi così ad angolo retto colle linee di forza del campo magnetico, si trasporterebbe parallelamente a se stesso nel piano del disegno: e precisamente anderebbe verso l'alto nel caso rappresentato dalla fig. 1. E si scorge che la corrente di Hall esce dal lato opposto verso cui la foglia d'oro sarebbe spinta dall'azione ponderomotrice Ampèriana.

§ 2. Il fenomeno è stato osservato non solamente nell'oro, ma in parecchi altri metalli, purchè ridotti in istrati sottilissimi: e questa condizione indispensabile è la sola causa per cui non furono coronati da buon successo i tentativi dei fisici, che precedettero Hall in siffatte ricerche.

I varî metalli, a parità di corrente che li attraversa e di campo magnetico in cui si trovano, presentano il fenomeno in vario grado non solo; ma alcuni anzi, in capo ai quali il ferro, lo presentano invertito. Ecco come Hall li ha ordinati nella sua comunicazione all'Associazione Britannica nell'adunanza di York (³):

(¹) Philosophical Magazine, V. Ser. Vol. IX, p. 307 e Vol. X, p. 301.
(²) G. Wiedemann, Galvanismus, II p. 289.
(³) *Nature*, Vol. 25, p. 45.

Ferro	+ 78	Ottone	— 1,3
Cobalto	+ 25	Platino	— 2,4
Zinco	+ 15	Oro	— 6,8
Piombo	?	Argento	— 8,6
Stagno	+ 0,2	Rame	— 10
		Aluminio	— 50
		Magnesio	— 50
		Nichel	— 120

Va notato come il nichel, che per le proprietà magnetiche vien subito dopo il ferro, si trovi invece a capo dei metalli che, come l'oro, presentano il fenomeno di Hall a rovescio del ferro. Di faccia a tal fatto cadono molte considerazioni teoriche (¹) ed alcuni tentativi (²) di dedurre dal fenomeno di Hall la velocità assoluta, colla quale la elettricità si muove in un conduttore.

Comunque si sia, mi sembra che non manchino delle ragioni per sospettare che questo fenomeno, che Sir W. Thomson non esita a proclamare la più grande scoperta fatta dopo Faraday nelle proprietà elettriche de'metalli, sia collegato colla grande scoperta di Faraday della rotazione elettromagnetica della luce. E la speranza di mettere in chiaro un tal nesso mi ha condotto alle minute ricerche che sto per narrare in succinto.

§ 3. Prima di tutto ho voluto ripetere l'esperienza in condizioni analoghe a quelle di Hall, per rendermela famigliare.

L'elettrocalamita da me adoperata era quella di Faraday, quale la forniva Ruhmkorff. Era collocata così lontana dal galvanometro da non produrvi mai, colla sua azione diretta, una deviazione d'una particella della scala.

Il galvanometro a specchio, co' suoi rocchetti di grandissima resistenza, era dell'Edelmann di Monaco, veniva reso astatico col magnete compensatore di Du Bois-Reymond, e si trovava lontano dal cannocchiale 2,^{m}60 circa.

La prima lamina metallica da me cimentata era uno strato d'argento depositato sul vetro per via chimica, aveva la forma di quadrato (51^{mm} di lato), ed alle metà dei lati era stretta fra serrafili d'ottone a morsetta.

I due serrafili C, D (fig. 2) servivano da elettrodi, perchè comunicavano, mediante un commutatore, con una pila di Daniell. Gli altri due A, B facevano da scandagli; ed anche nel circuito del galvanometro v'era naturalmente un interruttore, anzi un commutatore.

Se A e B si fossero trovati sopra una stessa linea equipotenziale, il galvanometro sarebbe rimasto fermo al chiudere della Daniell. Invece deviava, accusando una corrente derivata. A differenza di Hall, io non ispostava gli scandagli per rintracciare due punti di deviazione nulla; ma teneva conto del verso per cui andava la corrente derivata, e mi serviva del magnete compensatore per ricondurre lo specchietto davanti allo zero della scala. Poi eccitava l'elettrocalamita con 16 Bunsen

(¹) E. Mascart et J. Joubert, *Leçons sur l'électricité*. T. I, p. 703.

(²) Boltzmann, *Anz. d. K. Akad. d. Wissensch.* in Wien, 15 gennaio 1880,. *Phil. Mag.* aprile 1880. p. 307 (vedi anche Hall, *Phil. Mag.* agosto 1880, p. 136). A. v. Ettingshausen, *Akad. d. Wissensch.* in Wien, marzo 1880, p. 442.

di media grandezza e, trascurando l' impulso dovuto alla corrente indotta, notava la nuova posizione definitiva che assumeva lo specchietto. Le figure 2-5 rappresentano i risultati delle osservazioni. Le freccie arcuate stanno ad indicare le correnti Ampèriane che determinano il campo magnetico: nella 2 e nella 4 è dunque un polo nord che si suppone davanti al disegno, cosicchè le freccie arcuate accennano alle correnti del polo sud che si finge dietro al foglio. Le freccie sugli scandagli A, B indicano il verso che aveva la corrente derivata prima di eccitare la calamita: e le freccie più piccole, che vi stanno accanto, la direzione della corrente di Hall dovuta alla magnetizzazione.

Dunque col polo nord davanti (fig. 2 e 4) la corrente derivata veniva indebolita; e col polo sud davanti (fig. 3 e 5) veniva rinforzata.

Si verificava l'opposto dopo che ebbi trasportato lo scandaglio superiore A verso l'elettrodo D: come appare dalle figure $2a$-$5a$, analoghe alle quattro precedenti.

§ 4. In quei casi (3, 5, $2a$, $4a$), nei quali la corrente derivata acquista un rinforzo dal fenomeno di Hall, è certo che viene accresciuta la differenza di potenziale fra i due scandagli A, B: e negli altri vien diminuita. L'accrescimento, in generale, può ascriversi o ad aumento di resistenza nello strato metallico in direzione C D, oppure ad una nuova forza elettromotrice. Ma un semplice aumento di resistenza del conduttore (considerato come isotropo) non può invocarsi, perchè è impossibile che sia prodotto in due casi che si trovano in condizioni opposte (come 3 e $2a$, oppure 5 e $4a$). Dunque parrebbe che si dovesse menar buona l' interpretazione di Hall, che veramente in un campo magnetico la elettricità risenta un' azione, cui possa cedere senza trascinar seco la materia che le serve di veicolo.

Tuttavia mi pare che parli contro questa opinione il fatto da me constatato colla seguente esperienza.

Due filini d'argento *a o c* e *b o d* (fig. 6) del diametro non maggiore di $0^{mm},03$ e della lunghezza di 4^{c} circa, e saldati a fili di rame alquanto più grossi, erano stati accavallati l' uno sull'altro in modo da formare una croce. Nei punti A, B i fili di rame erano fissati sopra un telaio di legno e comunicavano col galvanometro. Nei punti C, D erano tenuti in tensione da due fili di seta sottilissimi, avvolti sopra due piolini di vetro e portanti due pesi P, Q. Da C a C' e da D a D' i fili di rame erano a spirale, prima di passare nei serrafili della pila, affinchè potessero obbedire liberamente ai pesi tensori.

Il telaio era perpendicolare alle linee di forza del campo magnetico, e l' incrociamento *O* dei fili si trovava sull'asse della elettrocalamita.

Il galvanometro era così sensibile che, con due sole Daniell, e piccole, accusava ampiamente la corrente derivata: e tutta la scala usciva dal campo per effetto della corrente indotta di chiusura, quantunque non avessi trascurato di torcere insieme i due reofori.

Quando la tensione dei filini d'argento era debole, si osservava un rinforzo od un indebolimento della corrente derivata ad ogni variazione nel campo magnetico, che tendesse, per azione elettrodinamica, ad abbassare oppure a sollevare il conduttore C D. Ciò dipendeva al certo da modificazioni nel contatto fra i due fili; perchè il galvanometro cessava completamente di dare qualsiasi segno permanente

all'atto della magnetizzazione, quando i fili erano tirati da pesi maggiori, sebbene le Daniell fossero portate a sei.

E si noti che la differenza di potenziale ai due scandagli dovrebbe essere, secondo Hall, proporzionale alla loro distanza ed alla densità della corrente principale: e però indipendente dalla distanza medesima, cioè dalla larghezza della lamina.

§ 5. Ma, anzichè ricorrere ad un'azione diretta del magnete sulla elettricità, si può concepire che un conduttore, percorso dalla corrente mentre è in un campo magnetico, diventi anisotropo, acquisti cioè una resistenza specifica diversa nelle diverse direzioni: e tale possibilità fu preveduta molti anni addietro da Sir W. Thomson, e riferita poi da Maxwell nel suo celebre trattato ([1]).

Se si considera il fenomeno sotto questo aspetto, bisogna dire che le linee equipotenziali, che noi per semplicità supporremo rette perpendicolari a C D, s'inclinino sotto l'azione magnetica: e precisamente quelle due che passano per gli scandagli A, B girino attorno a questi punti com' è accennato per esempio nelle figure 3 e 5*a*: ed in ogni caso girino nell'argento in verso opposto a quello delle correnti Ampèriane, che determinano il campo magnetico.

§ 6. Il platino, sottoposto all'esperienza da Hall (§ 2), è stato un solo campione in lamina ch' egli stima della grossezza di 0^{mm}, 0274, dando effetti più deboli che l' argento e l'oro. Io ho voluto provare una lastra di vetro platinata, saldandovi collo stagno quattro laminette di rame alla metà dei lati ove stringevano le morsette d'ottone a serrafilo. E da principio, adoperando quattro Daniell ed il metodo descritto al § 3, non mi è riuscito di veder nulla, se non che la deviazione impulsiva dovuta alla corrente d' induzione.

La dissimetria degli scandagli era tale che con una pila più forte non m' era possibile ricondurre la scala nel campo del canocchiale mercè il magnete di Du Bois-Reymond, a meno di scemare molto la sensibilità del galvanometro.

Pensai allora di operare la compensazione in altro modo. Aggiunsi al galvanometro una seconda coppia di rocchetti per mandarvi una derivazione della corrente principale, che doveva passare fra gli elettrodi C, D della lastrina.

La fig. 7 indica come avevo disposto le cose.

C, D elettrodi;

A, B scandagli che vanno al commutatore Q ed ai rocchetti H del galvanometro;

P pila col suo commutatore P′;

M, N punti di diramazione della corrente compensatrice, la quale, passando per l' interruttore I, va alla seconda coppia G G di rocchetti;

R reostata, che forma l'altro ramo derivato, e serve a regolare l' intensità della corrente compensatrice.

Con questa disposizione e con 6 sole Daniell ho potuto stabilire chiaramente che il vetro platinato si comporta, a meno dell' intensità, precisamente come il vetro argentato (§ 3).

§ 7. Accertatomi così della buona sistemazione degli apparecchi, mi sono accinto alla prova sui liquidi. L' ho stimata impossibile nelle lamine liquide tese liberamente:

([1]) Maxwell, *Electricity and Magnetism*. Vol. I, p. 349.

e mi sono studiato di ottenere degli strati liquidi sottilissimi fra due lastrine da specchio. Erano rettangolari col lato verticale di 55^{mm}, col lato orizzontale di 60^{mm}: erano tenute discoste fra loro da pezzettini di carta velina imbevuta di mastice (cera, colofonia e trementina) con un intervallo, nei varî casi, compreso fra i $0^{mm},05$ ed i $0^{mm},04$. I lati verticali erano impegnati e masticiati entro due boccioli d'ebanite, nel cui asse mettevo i fili metallici che servivano da elettrodi. Il lato orizzontale inferiore era chiuso con mastice, cosicchè i boccioli costituivano due vasi comunicanti per mezzo del vano lasciato libero fra le lastrine. Introducendo il liquido in uno di essi, dopo qualche ora penetrava fino nell'altro formando uno strato continuo, senza bolle di aria.

Quanto agli scandagli del galvanometro, ho avuto ricorso successivamente a diversi artifizi. Da prima lo scandaglio inferiore B era un pernio di zinco amalgamato passante da parte a parte attraverso a due fori praticati nelle lastre, ed avente un capo piano da una parte, e dall'altra un pane di vite col suo dado. Il filo di rame del galvanometro era saldato al capo di questo pernio.

Lo scandaglio superiore A era un filo di zinco coperto di ceralacca fin verso l'estremità amalgamata, tuffava verticalmente in una specie di doccia applicata al lato superiore e comunicante col sottoposto strato liquido, ma senza comunicazioni laterali dirette col liquido de' boccioli. Questo filo di zinco poteva venire spostato parallelamente a se stesso, e lungo la doccia, mediante una vite a scrupolo.

Essendo gli scandagli, come anche gli elettrodi nei boccioli, di zinco amalgamato, il liquido era una soluzione di solfato di zinco per eliminare il più possibile l'influenza perturbatrice della polarizzazione galvanica.

Ad onta di ciò, con siffatta disposizione, otteneva al galvanometro degli indizi manifesti che gli scandagli si polarizzavano: e quando eccitavo comunque la calamita, dopo aver atteso lo stato permanente della polarità, osservava costantemente una deviazione nel senso d'un aumento della debolissima corrente derivata: la qual cosa era evidentemente da imputare ad una diminuzione nella polarità, provocata dall'agitarsi del liquido per l'azione elettrodinamica.

§ 8. Bisognava dunque sottrarre gli scandagli metallici a tale agitazione.

Un cannellino di vetro (fig. 8), chiuso ad un capo B, veniva smerigliato entro i fori delle due lastrine sovrapposte, poi veniva piegato in E ad angolo retto verso il basso, in F verso sinistra e finalmente in G verso l'alto, di modo che quest'ultimo ramo G H, nel quale si doveva in seguito introdurre lo scandaglio metallico B', riuscisse parallelo e addossato ad un bocciolo. Il capo smeragliato B si forava in corrispondenza al vano compreso fra le due lastrine.

Lo scandaglio superiore A' (fig. 9) era fissato ermeticamente entro un cannello J A, che si riempiva del liquido e si tuffava a mo' di pipetta nella doccia. In tal guisa, lasciando chiusa la pila pel tempo bastevole a raggiungere la permanenza della polarità galvanica fra gli scandagli, questa non produceva più nessun inconveniente nemmeno nel caso di fili di platino nell'acido solforico diluito o in una soluzione concentrata di cloruro ferrico, che furono i liquidi saggiati oltre le soluzioni di solfato di zinco.

Eccitando l'elettrocalamita in un modo o nell'altro, il galvanometro deviava

nell' uno o nell'altro verso; ma non come quando si trattava di lamine metalliche. I risultati di queste osservazioni sono rappresentati nelle figure 10-13, che si riferiscono tutte al caso che davanti al disegno si trovi un polo nord. Nel caso contrario le deviazioni erano opposte, come già ho detto: così che le figure corrispondenti, che noi contrassegneremo per ordine 10*a*, 11*a*, 12*a*, 13*a*, e che non sono tracciate sulla tavola, si otterrebbero rovesciando le freccie arcuate ed in pari tempo tutte le freccie più piccole segnate accanto agli scandagli ed indicanti l'effetto della elettrocalamita.

A primo aspetto, guardando le due figure 10, 11, pare strano che la corrente debba piegare una volta a sinistra e l'altra a destra. Ma, esaminandole tutte, si riconosce che le variazioni nella differenza di potenziale ai due scandagli, rivelantisi col rinforzo e coll' indebolimento della corrente derivata, possono benissimo ascriversi a variazioni della resistenza del conduttore liquido compreso fra gli scandagli medesimi; poichè c' è rinforzo nei quattro casi 10, 12, 11*a*, 13*a*, in cui la corrente principale e la polarità del magnete hanno fra loro le stesse relazioni d' orientazione: c' è indebolimento negli altri quattro casi, in cui tali relazioni sono mutate.

E, senz'andar tanto per le lunghe, rileviamo subito che il rinforzo della corrente derivata avviene ogni qualvolta l'azione elettrodinamica tende a spingere in basso il conduttore della corrente principale: e l' indebolimento quando tende a spingerlo verso l'alto.

Ciò stabilito, era naturale il dubbio che nel primo caso il liquido della doccia si deprimesse, scemando così la sezione del conduttore, e che nel secondo caso si sollevasse aumentandola: e questo bastava appunto a dar ragione del contegno del galvanometro.

§ 9. Per chiarire il dubbio, confermato d'altronde dall'osservazione diretta della superficie libera entro la doccia, era mestieri rendere invariabile anche il lato superiore della lamina liquida.

Presi altre due lastrine di vetro, le forai anche superiormente, impegnai anche in questi fori un cannellino bucato lateralmente, smerigliato e piegato a squadra verso l'alto: circondai le annestature dei due cannelli con carta velina imbevuta di mastice ed adagiato con ogni cura fra le due lastrine, lasciando però due punti liberi in maniera che i cannelli avessero comunicazione col vano rettangolare compreso fra le lastre: e ne risultò l'apparecchio definitivo rappresentato nella figura 14. Il quale m'era facile riempire senza che il liquido fosse interrotto da bollicine d'aria, e ciò aspirando con una tromba dal cannello superiore messo a comunicare con un palloncino, ove andava a raccogliersi il liquido aspirato.

§ 10. Con una soluzione di solfato di zinco di peso specifico 1,200, fra elettrodi e scandagli di zinco amalgamato, ho ottenuto da principio dei risultati incerti, poi via via più decisi e finalmente marcatissimi nello stesso senso di quelli che sono espressi dalle fig. 10-13 del § 8. Risultati uguali ho ottenuto altresì con una soluzione di cloruro ferrico, col peso specifico 1,340, fra elettrodi di platino.

§ 11. Invece con una soluzione di solfato di zinco nelle identiche condizioni di dianzi, ma avente il peso specifico 1,340, le deviazioni del galvanometro, sempre piccolissime alle prime prove, andarono facendosi più grandi alle successive; ma in senso perfettamente opposto a quello riferito nel § 8.

§ 12. In fine con una soluzione di solfato di zinco satura, ed avente anzi in seno, entro i boccioli d' ebanite, dei cristalli indisciolti del medesimo sale, non mi fu possibile constatare nessuna differenza nella posizione d' equilibrio del galvanometro, fosse l'elettrocolamita eccitata o fosse smagnetizzata.

§ 13. Riassumendo i tre ultimi §§, diremo che, quando la concentrazione è minore di quella che corrisponde alla massima conducibilità elettrica (peso specifico 1,286), le azioni elettrodinamiche, ponderomotrici verso l'alto, aumentano la conducibilità del conduttore frapposto agli scandagli, e però indeboliscono la corrente derivata che va al galvanometro: quando all' incontro la concentrazione è superiore a quel massimo di conducibilità, le azioni ponderomotrici dirette in su, scemano la conducibilità del liquido, e così viene rinforzata la corrente derivata. Le azioni ponderomotrici rivolte in giù producono, nei due casi, effetti opposti ai precedenti.

§ 14. Due spiegazioni diverse si presentano alla mente. O le linee di flusso della corrente sono costituite da tante catene di molecole saline le quali, cedendo alle azioni Ampèriane, diventano più fitte e così costituiscono un conduttore più o meno buono a seconda che la soluzione è più diluita e più concentrata di quella che presenta la resistenza minima. Oppure, considerando l'elettrolita come un mezzo continuo, si può ritenere che le variazioni della conducibilità sieno un effetto secondario; ed ecco come. La soluzione sarà difficilmente omogenea; ma in grazia della gravità è probabile che riesca più ricca (se non si aspetta il tempo lunghissimo della diffusione completa) negli strati più bassi. Ciò posto, un'azione elettrodinamica, che tenda a trasportare in alto le linee di flusso, favorirà l'omogeneità della soluzione e con ciò ne scemerà o ne aumenterà la resistenza secondo che essa sia più o meno diluita di quanto è richiesto affinchè presenti la resistenza minima.

§ 15. Io inclinava per questa seconda spiegazione, in appoggio della quale sta il fatto che le deviazioni del galvanometro vanno via via aumentando nelle successive esperienze: ed infatti il prolungato passaggio della corrente attraverso al liquido vi produce in prossimità degli elettrodi quelle differenze di concentrazione, che si conoscono col nome di trasporto degli ioni, e che poi, in obbedienza alla gravità, tendono a distribuirsi in istrati orizzontali. Ma non ho nemmeno trascurato di appoggiarla più direttamente. L'apparecchio, appena riempito d' una soluzione diluita ed omogenea, non dava quasi nessuna deviazione al galvanometro sotto l' influenza della elettrocalamita; ma se, dopo aver interrotta la corrente, aggiungevo nei boccioli qualche poco di soluzione al massimo di conducibilità e lasciavo il tutto tranquillo per qualche ora; dopo, anche alla prima chiusura della pila, le deviazioni si manifestavano di grandezza insolita e nel senso accennato al § 10.

Fatta passare in seguito pel medesimo apparecchio, senza smontarlo, della soluzione di peso specifico 1,340 in grandissima quantità, di modo che il liquido riuscisse omogeneo, e non desse, appena saggiato, che piccolissimi indizi dell' influenza dell'elettrocalamita, li dava invece grandissimi, e nel senso del § 11, alcun tempo dopo che, a pila aperta, erano stati lasciati cadere in fondo ai boccioli dei cristallini di solfato di zinco.

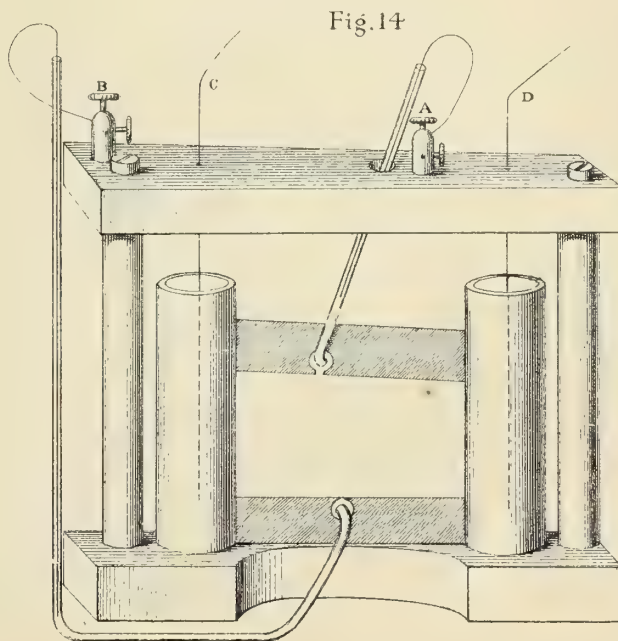
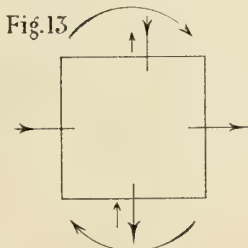
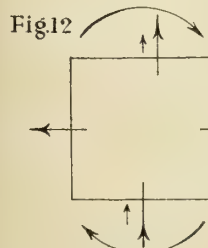
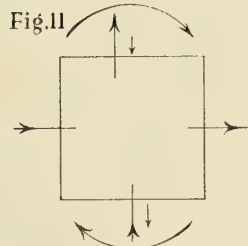
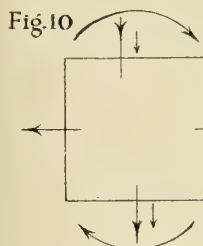
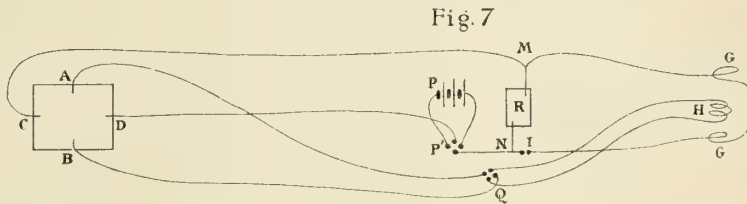
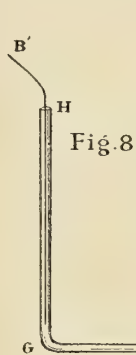
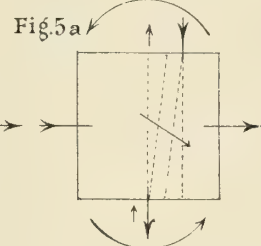
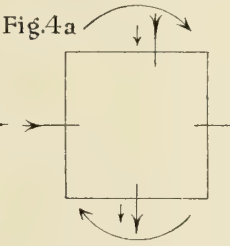
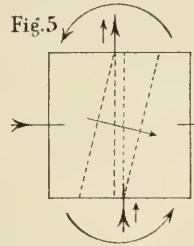
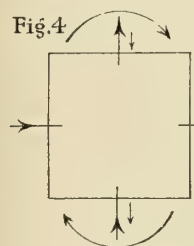
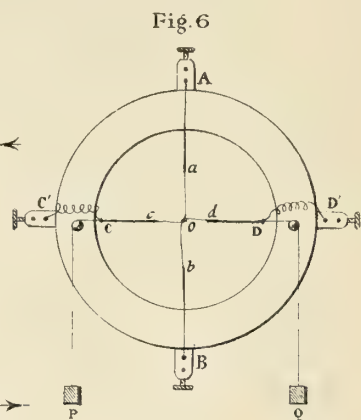
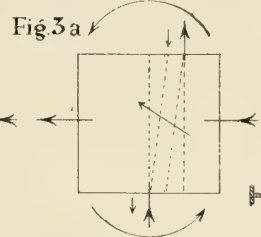
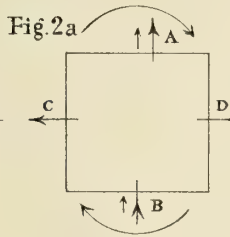
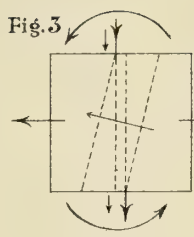
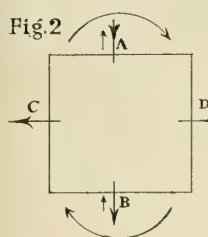
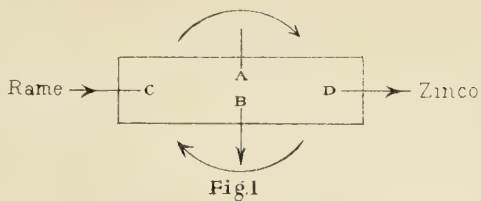
Finalmente avendo frapposto alle lastre di vetro, per tutta la loro grandezza, un sottile (0^{mm}, 037) foglio di carta asciugante, ed avendo aspirato a lungo il liquido

pel cannello superiore, non mi fu mai dato, per quanto prolungasi il passaggio della corrente, di osservare la minima variazione nella intensità della corrente derivata (all' infuori di quelle dovute all' induzione), comunque eccitassi ed invertissi la elettrocalamita.

§ 16. Il medesimo risultato negativo incontrai con uno strato di mercurio che, con molta pena, m'era riuscito di ottenere ben continuo della grossezza di 0^{mm}, 045. E negativo fu altresì il resultato con uno specchio amalgamato.

§ 17. Queste ricerche non mi hanno dunque condotto allo scopo agognato di stabilire cioè, per via di esperienza, se il fenomeno di Hall vada di pari passo colla rotazione elettromagnetica della luce. Ma parmi che esse contribuiscano a rendere poco verosimile un' azione elettromotrice diretta del campo magnetico: e che per conseguenza ci sospingano ad ammettere, con Thomson, che una sottile lamina solida, percorsa dalla elettricità, cessi d'essere isotropa quando si trova in un campo magnetico.

È probabile che accada il medesimo de' fluidi? E come conciliare colla negativa il potere rotatorio magnetico di questi corpi?

LIT. BRUNO, SALOMONE ROMA

Sulla espressione di una forma binaria di grado n con una somma di potenze n^e.

Memoria del prof. R. DE PAOLIS

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 marzo 1882.

Varî Geometri si sono occupati del problema che risolvo in questa Memoria, è quindi naturale che molti risultati siano noti. È però nuovo il metodo che applico, e ne devo l'idea alla lettura delle bellissime *Ricerche di Geometria analitica* fatte da Beltrami.

1. Una forma binaria di grado n si può sempre esprimere, ed in un modo solo, colla somma delle n^e potenze di $n+1$ forme lineari.

Sia infatti

$$f=\alpha_x^n$$

la data forma binaria di grado n; ponendo

$$\alpha_x^n=\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k(x_1 a_k+x_2)^n$$

abbiamo le $n+1$ condizioni

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k a_k^{n-i}=\alpha_1^{n-i}\alpha_2^i\,, \qquad i=(0,1,\dots,n)\,,$$

che determinano linearmente le $n+1$ incognite A_k.

2. Supponiamo trovate le A_k, e posta la f sotto la forma

$$f=\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k(x_1 a_k+x_2)^n\,. \tag{1}$$

Stante una nota identità [1] abbiamo

$$\sum_{k=1}^{k=2(n+1)-r} \frac{\chi(\lambda_k)(x_1\lambda_k+x_2)^n}{F'(\lambda_k)}=0\,, \tag{2}$$

[1] L'identità di cui parliamo è la seguente: $\sum_{k=1}^{k=n}\frac{f(\lambda_k)}{F'(\lambda_k)}=0$, dove $f(\lambda)$ è una funzione, razionale intera, al più di grado $n-2$ in λ, e dove le λ_k sono le radici, tutte disuguali, dell'equazione $F(\lambda)=0$, razionale intera, di grado n in λ. Si deduce da una formola relativa allo spezzamento delle frazioni razionali, ed è stata applicata già con molto successo da Beltrami (*Ricerche di Geometria analitica* Acc. di Bologna. Anno 1879. *Sull'equazione pentaedrale delle superficie di terzo ordine.* Istituto lombardo. Anno 1879).

dove

$$\chi(\lambda) = p_0 \lambda^{n-r} + p_1 \lambda^{n-r-1} + \ldots + p_{n-r-1} \lambda + p_{n-r} \tag{3}$$

è una funzione arbitraria, razionale intera di grado $n-r$ in λ, e dove le λ_k sono le radici, tutte disuguali, dell'equazione

$$F(\lambda) = 0,$$

pure arbitraria, ma razionale intera di grado $2(n+1)-r$ in λ.

Se poniamo

$$F(\lambda) = \varphi(\lambda)\psi(\lambda),$$

dove

$$\varphi(\lambda) = a(\lambda - a_1)(\lambda - a_2) \ldots (\lambda - a_{n+1}),$$

$$\psi(\lambda) = b(\lambda - b_1)(\lambda - b_2) \ldots (\lambda - b_{n+1-r}),$$

la (2) ci dà immediatamente

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{\chi(a_k)(x_1 a_k + x_2)^n}{\varphi'(a_k)\psi(a_k)} + \sum_{k=1}^{k=n+1-r} \frac{\chi(b_k)(x_1 b_k + x_2)^n}{\varphi(b_k)\psi'(b_k)} = 0. \tag{4}$$

Determinata $\psi(\lambda)$ in modo che soddisfi le condizioni

$$\psi(a_k) = \frac{\chi(a_k)}{A_k \varphi'(a_k)}, \tag{5}$$

quando ciò sia possibile, abbiamo per le (1), (4)

$$f = -\sum_{k=1}^{k=n+1-r} \frac{\chi(b_k)(x_1 b_k + x_2)^n}{\varphi(b_k)\psi'(b_k)}, \tag{6}$$

dunque la f si può scrivere colla somma di $n+1-r$ potenze n^e quando possono essere soddisfatte le condizioni (5).

3. Sempre per la nota identità abbiamo

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{a_k^{r-(i+1)}\psi(a_k)}{\varphi'(a_k)} = 0, \quad i = (1, 2, \ldots, r-1),$$

perciò le condizioni necessarie e sufficienti affinchè la $\psi(\lambda)$ soddisfi le relazioni (5) sono

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{\chi(a_k)}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2} = 0, \quad \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{a_k \chi(a_k)}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2} = 0, \ldots, \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{a_k^{r-2}\chi(a_k)}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2} = 0, \tag{7}$$

e supponendole soddisfatte

$$\psi(\lambda) = \varphi(\lambda) \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{\chi(a_k)}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2} \frac{1}{\lambda - a_k}.$$

4. Ponendo nella (7) il valore di $\chi(a_k)$ dato dalla (3) si ottiene il sistema di $r-1$ condizioni

$$p_0 \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{a_k^{n-(i+1)}}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2} + p_1 \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{a_k^{n-(i+2)}}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2} + \ldots + p_{n-r} \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{a_k^{r-(i+1)}}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2} = 0, \quad i = (1, 2, \ldots, r-1), \tag{8}$$

che contengono omogeneamente, e linearmente, $n-r+1$ parametri arbitrarî p.

5. Trattandosi di scrivere la data binaria f colla somma di $n+1-r$ potenze n^e dobbiamo distinguere tre casi:

1° se $2r < n+1$ le (8) determinano $r-1$ parametri p, dunque $\psi(\lambda)$ ne contiene omogeneamente, e linearmente, ancora $n+1-2r$, ed il problema ha ∞^{n+1-2r} soluzioni;

2° se $r=\frac{n+1}{2}$ deve essere n dispari, cioè $n=2\nu-1$, allora le (8) determinano tutti i parametri arbitrarî, ed il problema si può risolvere, ma in un modo solo;

3° se $2r>n+1$ si possono determinare i parametri in modo che siano soddisfatte $n-r$ relazioni (8), e ne rimangano $2r-(n+1)$ che devono essere soddisfatte dai coefficienti di f onde sia possibile risolvere il problema.

Qualunque dei tre casi si verifichi ogni soluzione del problema dipende dalla ricerca delle radici dell'equazione

$$\psi(\lambda)=\varphi(\lambda)\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{\chi(a_k)}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2}\frac{1}{\lambda-a_k}=0,$$

che è di grado $n+1-r$ in λ. Ora nel 1° caso questa equazione viene a contenere linearmente $n+1-2r$ parametri arbitrarî che si possono determinare prendendo ad arbitrio $n+1-2r$ radici, quindi rimane un equazione di grado r per determinare le rimanenti.

6. Col metodo esposto dall'espressione (1) della f passiamo all'espressione (6) quando sono soddisfatte le (8); si ottengono così *tutte* le possibili espressioni di f colla somma di $n+1-r$ potenze n^e?

Prendiamo

$$f=\sum_{k=1}^{k=n+1-r}B_k(x_1b_k+x_2)^n; \tag{9}$$

dalla (4) troviamo

$$f+\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{\chi(a_k)(x_1a_k+x_2)^n}{\varphi'(a_k)\psi(a_k)}=0,$$

se

$$\varphi(b_k)=\frac{\chi(b_k)}{B_k\psi'(b_k)}; \tag{10}$$

ma la $\varphi(\lambda)$ essendo di grado $n+1$ può sempre soddisfare le $n+1-r$ condizioni (10), dunque il problema è sempre possibile, e

$$\varphi(\lambda)=\psi(\lambda)\left[\theta(\lambda)+\sum_{k=1}^{k=n+1-r}\frac{\chi(b_k)}{B_k\{\psi'(b_k)\}^2}\frac{1}{\lambda-b_k}\right], \tag{11}$$

dove

$$\theta(\lambda)=q_0\lambda^r+q_1\lambda^{r-1}+\ldots+q_{r-1}\lambda+q_r,$$

essendo arbitrarie le q.

Nella (11) entrano omogeneamente, e linearmente, $n+2$ parametri arbitrarî, le $n+1-r$ p, e le $r+1$ q, quindi dalla (9) si passa ad ∞^{n+1} forme (1), e quindi una forma (1) ci dà tutte le possibili forme (9).

7. I risultati precedenti si possono raccogliere enunciando i seguenti teoremi:

Una forma binaria di grado n si può sempre esprimere in ∞^{n+1-2r} modi, essendo $2r<n+1$, colla somma di $n+1-r$ potenze n^e, risolvendo un equazione di grado r.

Una forma binaria di grado dispari $n=2\nu-1$ si può sempre esprimere, ed in un modo solo, colla somma di ν potenze n^e, risolvendo un equazione di grado ν.

Onde una forma binaria di grado n si possa esprimere colla somma di $n+1-r$ potenze n^e, essendo $2r>n+1$, è necessario e sufficiente che i suoi coefficienti soddisfino $2r-(n+1)$ relazioni, e dobbiamo risolvere un equazione di grado $n+1-r$.

8. Ogni binaria f si può rappresentare con un gruppo di n punti di una retta. Se

$$f=\sum_{k=1}^{k=n+1-r} B_k(x_1 b_k+x_2)^n$$

diremo che gli $n+1-r$ punti

$$x_1 b_k+x_2=0$$

costituiscono un gruppo che esprime f colla somma di $n+1-r$ potenze n^e.

9. Ponendo $r=1$ dalla (1) si passa alla

$$f=\sum_{k=1}^{k=n} B_k(x_1 b_k+x_2)^n,$$

purchè le b_k soddisfino l'equazione

$$\psi(\lambda)=\varphi(\lambda)\sum_{k=1}^{k=n+1}\frac{\chi(a_k)}{A_k\{\varphi'(a_k)\}^2}\frac{1}{\lambda-a_k}=0,$$

nella quale entrano omogeneamente, e linearmente, n parametri arbitrari p. Segue che tutti i gruppi di punti che esprimono f colla somma di n potenze n^e costituiscono un involuzione [1] $(n-1)$—*pla*. Tra le radici della (12) se ne possono prendere $n-1$ ad arbitrio, la rimanente è determinata linearmente da esse, dunque deve esistere una relazione di primo grado in ciascuna delle n radici. Onde ottenerla prendiamo le identità

$$\psi(a_k)=\frac{\chi(a_k)}{A_k\varphi'(a_k)}.$$

Eliminando le p si ha

$$\begin{vmatrix} A_1\psi(a_1)\varphi'(a_1), & a_1^{n-1}, a_1^{n-2},\ldots a_1, & 1\\ A_2\psi(a_2)\varphi'(a_2), & a_2^{n-1}, a_2^{n-2},\ldots a_2, & 1\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{n+1}\psi(a_{n+1})\varphi'(a_{n+1}), & a_{n+1}^{n-1}, a_{n+1}^{n-2},\ldots a_{n+1}, & 1\end{vmatrix}=0,$$

[1] Battaglini (*Sulle forme binarie di grado qualunque*. Acc. di Napoli. Anno 1867) dice che se

$$U_1, U_2, \ldots, U_i, \ldots, U_r,$$

sono r forme binarie, dello stesso grado, tutte le forme

$$U=k_1U_1+k_2U_2+\ldots+k_iU_i+\ldots+k_rU_r,$$

essendo arbitrari i parametri k, costituiscono un involuzione $(r-1)$—*pla*.

sviluppando rispetto agli elementi della prima colonna, e dividendo per il prodotto delle differenze di tutte le a_k prese due a due, troviamo

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k \psi(a_k) = 0,$$

ossia

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{k=n+1} A_k (a_k - b_1)(a_k - b_2) \ldots (a_k - b_{n+1-r}) = 0.$$

Gli n punti di coordinate

$$y_1^{(1)} y_2^{(1)},\ y_1^{(2)} y_2^{(2)}, \ldots \ldots , y_1^{(n)} y_2^{(n)},$$

sono coniugati [1] rispetto agli n punti di $f=0$ se

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} A_k (y_1^{(1)} a_k + y_2^{(1)})(y_1^{(2)} a_k + y_2^{(2)}) \ldots (y_1^{(n)} a_k + y_2^{(n)}) = 0,$$

trattandosi dei punti

$$x_1 b_k + x_2 = 0,$$

di coordinate -1, b_k, deduciamo che la (13) è la condizione necessaria e sufficiente affinchè questi n punti siano coniugati rispetto agli n punti di f.

I gruppi di n punti che esprimono una binaria di grado n colla somma di n potenze n^e costituiscono un involuzione $(n-1)$-*pla*, per cui presi $n-1$ punti di un gruppo il rimanente è determinato ed unico, e sono tutti i gruppi coniugati al gruppo di n punti che rappresentano la binaria data [2].

10. Riteniamo $2r < n+1$, ed

$$f = \sum_{k=1}^{k=n+1-r} B_k (x_1 b_k + x_2)^n.$$

Il gruppo polare $r-1$ di un punto $y_1 y_2$ rispetto ad f è

$$\Delta_y^{r-1} f = \sum_{k=1}^{k=n+1-r} B_k (y_1 b_k + y_2)^{r-1} (x_1 b_h + x_2)^{n+1-r},$$

quindi è coniugato rispetto a tutti i gruppi di punti che esprimono f colla somma di $n+1-r$ potenze n^e. Ora questi gruppi costituiscono un involuzione $(n+1-2r)$-*pla*, perchè la $\psi(\lambda)$ viene a contenere omogeneamente, e linearmente, $n+1-r$ parametri arbitrarî, dunque i gruppi polari $r-1$ appartengono ad un involuzione $(r-1)$-*pla associata* [3] alla prima.

[1] Battaglini (l. c. p. 10) chiama coniugati due gruppi di n punti $\alpha_x^n = 0$, $\beta_x^n = 0$, quando è nullo il loro armonizzante, cioè quando $(\alpha\beta)^n = 0$, ed allora ciascun punto di un gruppo è il polo misto degli altri $n-1$ rispetto all'altro gruppo.

[2] Questo teorema è dovuto a Rosanes (*Ueber ein Princip der Zuordnung algebraischer Formen.* Crelle Bd. 76 p. 315).

[3] Battaglini (l. c. p. 18) chiama associate due involuzioni quando tutte le forme di ciascuna sono coniugate a tutte quelle dell'altra. Questa proprietà, ed altre sullo stesso argomento, sono riportate da Rosanes, e Reye, che non avevano letto le importanti pubblicazioni di Battaglini.

Data una forma binaria di grado n, se $2r<n+1$, tutti i suoi gruppi polari di $n+1-r$ punti appartengono ad un involuzione $(r-1)$-*pla* [1], ed i soli gruppi di punti dell'involuzione associata $(n+1-2r)$-*pla*, esprimono la data binaria colla somma di $n+1-r$ potenze n^e.

11. Se

$$F(\lambda)=\varphi(\lambda)\psi(\lambda),$$

$$\varphi(\lambda)=b(\lambda-b_1)(\lambda-b_2)\dots(\lambda-b_{r+1}),\qquad \psi(\lambda)=c(\lambda-c_1)(\lambda-c_2)\dots(\lambda-c_{n+1-r}),$$

abbiamo identicamente

$$\sum_{k=1}^{k=n+2}\frac{(x_1\lambda_k+x_2)^n}{F'(\lambda_k)}=0,$$

ossia

$$\sum_{k=1}^{k=r+1}\frac{(x_1b_k+x_2)^n}{\varphi'(b_k)\psi(b_k)}+\sum_{k=1}^{k=n+1-r}\frac{(x_1c_k+x_2)^n}{\varphi(c_k)\psi'(c_k)}=0.$$

Supponendo $2r\geqq n+1$ si ha $2s<n+1$ se $s=n-r$, ma allora $r+1=n+1-s$, perciò possiamo sempre porre

$$f=\sum_{k=1}^{k=r+1}B_k(x_1b_k+x_2)^n,$$

quindi se è possibile determinare $\psi(\lambda)$ in modo che siano soddisfatte le condizioni

$$\psi(b_k)=\frac{1}{B_k\varphi'(b_k)},\tag{14}$$

abbiamo

$$f+\sum_{k=1}^{k=n+1-r}\frac{(x_1c_k+x_2)^n}{\varphi(c_k)\psi'(c_k)}=0,$$

ovvero

$$f=\sum_{k=1}^{k=n+1-r}C_k(x_1c_k+x_2)^n.\tag{15}$$

Le (14) sono sempre soddisfatte da

$$\psi(\lambda)=\varphi(\lambda)\sum_{k=1}^{k=r+1}\frac{1}{B_k\{\varphi'(b_k)\}^2}\frac{1}{\lambda-b_k},$$

e $\psi(\lambda)$ è la funzione cercata di grado $n+1-r$ se $2r=n+1$, se poi $2r>n+1$ affinchè la funzione $\psi(\lambda)$ sia del grado voluto devono i coefficienti di f soddisfare le relazioni

$$\sum_{k=1}^{k=r+1}\frac{1}{B_k\{\varphi'(b_k)\}^2}=0,\quad \sum_{k=1}^{k=r+1}\frac{b_k}{B_k\{\varphi'(b_k)\}^2}=0,\dots,\quad \sum_{k=1}^{k=r+1}\frac{b_k^{2r-(n+2)}}{B_k\{\varphi'(b_k)\}^2}=0.\tag{17}$$

Così giungiamo alla espressione di f con $n+1-r$ potenze n^e, essendo $2r\geqq n+1$, partendo dalla espressione con $r+1$ potenze n^e, invece di partire da quella con $n+1$

[1] Battaglini (l. c. p. 24) ha dimostrato che se $2r<n+1$ tutti i gruppi polari di $n+1-r$ punti appartengono ad un involuzione $(r-1)$-*pla*.

come facevamo prima. In questo modo abbiamo il vantaggio che le condizioni (17) e la $\psi(\lambda)$ data dalla (16), si presentano già libere dai parametri p, mentre prima dovevamo determinarli per mezzo delle (8).

12. Prendendo la f di grado dispari $n=2\nu-1$, e prendendo $r=\nu$, dalla (15) abbiamo

$$f=\sum_{k=1}^{k=\nu} C_k(x_1c_k+x_2)^{2\nu-1}, \tag{18}$$

espressione sempre possibile, ed in un modo solo. I ν punti

$$x_1c_k+x_2=0$$

vengono rappresentati dalla binaria

$$\sum_{k=1}^{k=\nu+1}\frac{1}{B_k\{\varphi'(b_k)\}^2}\frac{1}{x_1b_k+x_2}=0, \tag{19}$$

essendo dati dalle radici c_k della (16).

Evidentemente

$$\Delta_y^{\nu-1}f=\sum_{k=1}^{k=\nu} C_k(y_1c_k+y_2)^{\nu-1}(x_1c_k+x_2)^{\nu},$$

dunque tutti i gruppi polari di ν punti sono coniugati al gruppo dei ν punti rappresentati dalla (19), ed appartengono perciò ad un involuzione $(\nu-1)$-*pla*.

La binaria di grado dispari $n=2\nu-1$ si dice ridotta alla forma *canonica* quando è espressa come la (18) colla somma di ν potenze n^e.

La (19) ci dà un covariante di f i cui ν punti la pongono sotto la forma canonica, perciò si dice il *canonizzante* di f.

Data una binaria di grado dispari $n=2\nu-1$ tutti i suoi gruppi polari di ν punti appartengono ad un involuzione $(\nu-1)$-*pla*, cioè sono tutti coniugati ad uno stesso gruppo di ν punti che rappresentano il canonizzante della binaria data [1].

13. Se la forma è di grado pari $n=2\nu$, prendendo $r=\nu+1$, abbiamo dalla (15)

$$f=\sum_{k=1}^{k=\nu} C_k(x_1c_k+x_2)^{2\nu},$$

purchè sia

$$\sum_{k=1}^{k=\nu+2}\frac{1}{B_k\{\varphi'(b_k)\}^2}=0.$$

Abbiamo

$$\Delta_y^{\nu}f=\sum_{k=1}^{k=\nu} C_k(y_1c_k+y_2)^{\nu}(x_1c_k+x_2)^{\nu}$$

quindi tutti i gruppi polari di ν punti sono coniugati rispetto al gruppo dei ν punti

$$x_1c_k+x_2=0,$$

[1] Sylvester (*Philosophical Magazine* 1851) ha trovato il canonizzante della binaria di grado dispari, e Battaglini (l. c. p. 30) ne ha trovato il significato geometrico.

ossia

$$\sum_{k=1}^{k=\nu+2} \frac{1}{B_k \{\varphi'(b_k)\}^2} \frac{1}{x_1 b_k + x_2} = 0,$$

perciò appartengono ad un involuzione $(\nu-1)$-*pla*. L'espressione

$$\sum_{k=1}^{k=\nu+2} \frac{1}{B_k \{\varphi'(b_k)\}^2}$$

è dunque un invariante, lo diremo il *cataletticante* [1] di f, ed è di grado $\nu+1$ nei coefficienti della forma, si deve poi annullare affinchè la forma si possa esprimere colla somma di ν potenze n^e.

Data una forma binaria di grado pari $n=2\nu$ se il suo cataletticante è nullo tutti i suoi gruppi polari di ν punti appartengono ad un involuzione $(\nu-1)$-*pla*, cioè sono coniugati ad uno stesso gruppo di ν punti che esprimono la forma colla somma di ν potenze n^e. Viceversa affinchè la forma possa esprimersi colla somma di ν potenze n^e deve essere nullo il suo cataletticante [2].

14. Dalla (15) abbiamo

$$\Delta_y^{r-1} f = \sum_{k=1}^{k=n+1-r} C_k (y_1 c_k + y_2)^{r-1} (x_1 c_k + x_2)^{n+1-r},$$

perciò se le (17) sono soddisfatte tutti i gruppi polari di $n+1-r$ punti sono coniugati al gruppo dei punti dati dalla binaria

$$\sum_{k=1}^{k=r+1} \frac{1}{B_k \{\varphi'(b_k)\}^2} \frac{1}{x_1 b_k + x_2} = 0,$$

quindi appartengono ad un involuzione $(n-r)$-*pla*. Si dice che le condizioni (17) costituiscono il *plesso cataletticante*, di ordine $2r-(n+2)$, della forma f, dunque:

Data una forma binaria di grado n, se è nullo il suo plesso cataletticante di ordine $2r-(n+2)$, essendo $2r>n+1$, tutti i suoi gruppi polari di $n+1-r$ punti appartengono ad un involuzione $(n-r)$-*pla* [3], cioè sono coniugati ad uno stesso gruppo di $n+1-r$ punti che esprimono la forma colla somma di $n+1-r$ potenze n^e. Viceversa affinchè la forma possa esprimersi colla somma di $n+1-r$ potenze n^e deve essere nullo il suo plesso cataletticante di ordine $2r-(n+2)$.

15. Preso un punto $y_1 y_2$, se

$$f = \sum_{k=1}^{k=r+1} B_k (x_1 b_k + x_2)^n,$$

(1) Sylvester (l. c.).

(2) Battaglini, (l. c. p. 32).

(3) Battaglini (l. c. p. 24) ha dimostrato che se è nullo il plesso cataletticante di ordine $2-r(n+2)$ tutti i gruppi polari di $n+1-r$ punti appartengono ad un involuzione $(n-r)$-*pla*.

il gruppo polare di $y_1 y_2$, costituito da $2(n+1-r)$ punti, è

$$\Delta_y^{2r-(n+2)} f = \sum_{k=1}^{k=r+1} \mathrm{B}_k (y_1 b_k + y_2)^{2r-(n+2)} (x_1 b_k + x_2)^{2(n+1-r)} .$$

Il suo cataletticante dovendo contenere i coefficienti al grado $n+2-r$, conterrà le $y_1 y_2$ al grado $(n+2-r)\{2r-(n+2)\}$, dunque vi sono tanti punti il cui gruppo polare di $2(n+1-r)$ punti ha nullo il cataletticante, cioè si può rappresentare colla somma di $n+1-r$ potenze $2(n+1-r)^e$. Se è possibile porre

$$f = \sum_{k=1}^{k=n+1-r} \mathrm{C}_k (x_1 c_k + x_2)^n,$$

sempre nell'ipotesi $2r > n+1$, avendo

$$\Delta_y^{2r-(n+2)} f = \sum_{k=1}^{k=n+1-r} \mathrm{C}_k (y_1 c_k + y_2)^{2r-(n+2)} (x_1 c_k + x_2)^{2(n+1-r)},$$

qualunque siano $y_1 y_2$, segue che quando è nullo il plesso cataletticante, di ordine $2r-(n-2)$, il covariante di grado $(n+2-r)\{2r-(n+2)\}$ deve essere nullo identicamente, e viceversa.

Data una forma binaria di grado n, e supposto $2r > n+1$, vi sono $(n+2-r)\{2r-(n+2)\}$ punti i cui gruppi polari di $2(n+1-r)$ punti hanno ciascuno il cataletticante nullo, e sono rappresentati da un covariante che è identicamente nullo quando è nullo il plesso cataletticante di grado $2r-(n+2)$.

16. Se facciamo $r=n$ deduciamo che la f è la potenza n^a di un espressione lineare quando è nullo il plesso cataletticante di grado $n-2$, ovvero quando è identicamente nullo il covariante che rappresenta i punti i cui gruppi polari di due punti hanno il cataletticante nullo, cioè sono costituiti da due punti coincidenti. Questo covariante di grado $2(n-2)$ è il covariante hessiano della binaria, abbiamo dunque il noto teorema:

Le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una binaria di grado n sia la potenza n^a di una binaria lineare sono espresse annullando identicamente il suo covariante hessiano.

Sopra un nuovo interruttore galvanico a periodo costante.

Memoria del prof. ADOLFO BARTOLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 2 aprile 1882.

(Con due tavole)

L'interruttore che sono ora per descrivere serve a chiudere dopo intervalli di tempo uguali o regolati da una legge determinata, un circuito elettrico per tempuscoli brevissimi e dentro certi limiti variabili ad arbitrio ma pur sempre uguali fra loro.

Questo interruttore fu da me imaginato e fatto costruire:

1° « Per determinare la legge con la quale diminuisce col tempo una nota forza elettromotrice di polarità generata su dati elettrodi da una data corrente che ha circolato in determinate condizioni » [1].

2° Per determinare la legge con la quale variano separatamente col tempo le forze elettromotrici di polarità dell'elettrodo positivo e dell'elettrodo negativo di un voltametro.

3° Per ricercare se la corrente che chiamerò residua, che circola in un voltametro ad elettrodi di platino o di oro con una pila di forza elettromotrice così debole che non potrebbe teoricamente decomporre l'acqua sia, o no corrispondente alla dissipazione di polarità [2].

Lo stesso interruttore può servire ancora allo studio di altri fenomeni, ad esempio della legge con cui varia col tempo la resistenza elettrica di un circuito, dopo che per qualche causa essa venga a variare.

Per quanto io sappia non è ancora stato descritto alcun interruttore che possa in modo soddisfacente servire allo studio delle questioni propostemi.

L'apparecchio che descrivo, risponde pienamente (dietro l'esperienza che ne ho fatto da qualche anno) allo scopo pel quale è destinato.

Il principio sopra cui si fonda la misura delle forze elettromotrici, col mio interruttore è il seguente, già da me felicemente impiegato nella modificazione all'interruttore Felici, per farlo servire allo studio delle leggi della formazione delle polarità. « Se di un circuito fanno parte una bussola reometrica, un reostata e una pila e se « la resistenza interna di questa è trascurabile di fronte a quella del rimanente del « circuito, la intensità della corrente, a corrente stabilita, è proporzionale alla forza « elettromotrice della pila stessa. Se poi si fa passare la corrente per un tempo

[1] Vedi Bartoli, *Le leggi delle polarità galvaniche.* Atti della r. Accademia dei Lincei, 3ª Serie, Vol. VIII, pag. 75: e Nuovo Cimento, 3ª S. T. VII, pag. 234.

[2] È inutile insistere qui sulla importanza di tale questione che si connette intimamente con l'altra: « Perchè i deboli elettromotori, decompongono, con elettrodi inattaccabili, elettroliti che teoricamente non potrebbero decomporre? ».

« brevissimo di fronte a quello che impiega l'ago a spostarsi dalla sua posizione di quiete « e se gli angoli corrispondenti alla deviazione sono piccolissimi, allora le deviazioni « impulsive di questo sono proporzionali alla durata del passaggio della corrente, « purchè il telaio della bussola non sia ricoperto da troppo grande numero di strati « di filo. È pur chiaro che rendendo brevissime queste durate, la forza elettromotrice « ancorchè variabile col tempo, rimarrà costante per tutta la durata del passaggio; « inoltre la resistenza dell'elettromotore essendo piccolissima rispetto a quella delle « altre parti del circuito, le deviazioni saranno indipendenti dalle possibili variazioni « di resistenza dello elettromotore stesso e saranno proporzionali alla forza elettro- « motrice dello elemento elettromotore durante quel tempuscolo ».

Veniamo subito a dar un'idea generale dell'apparecchio per poi descriverne una ad una le singole parti.

Su di una solidissima tavola (tav. I, fig. I; tav. II, fig. 3) sono inchiavardate due robuste caprette di ghisa K, K′ che sorreggono un asse di rotazione di acciaio mosso dal peso P mediante un sistema di puleggie ed una resistentissima catena senza fine. Sul davanti di quest'asse sono montate le quattro armille di metallo c' d' e' f' bene isolate su dischi di ebanite, e dopo queste una coppia di cilindri M, N il primo dei quali porta incastrati nel suo contorno quattro pezzi *m* di metallo ancor essi isolati su ebanite, ma riuniti ciascuno separatamente ad una delle predette armille per mezzo di un filo di rame rivestito di guttaperca. Sul contorno dell' altro cilindro N c'è un solo pezzo *n* di metallo isolato ed unito da un filo di rame ad un'altra armilla g' di metallo che vien subito dopo sull'asse di rotazione ed è così collocato che il suo termine risponde al principio d'uno dei quattro pezzi *m* del cilindro contiguo. De' sopporti verticali *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* bene isolati tengono applicate tangenzialmente alle armille delle semplici lamine di metallo, ed ai cilindri, delle lamine armate di un prisma il cui spigolo (orizzontale) rade la superficie del cilindro. Ora se una corrente elettrica dal polo positivo di una pila si reca al sopporto *g* e traverso alla lamina ed alla armilla g' giunge al pezzo *n* del cilindro N, ritornerà alla pila solamente quando, nel moto di rotazione, *n* si troverà in contatto del prisma del sopporto *a*, poichè questo è unito al polo negativo mediante un filo di rame che è unito ad un voltametro. Così una volta ad ogni giro dell'asse si chiude questo circuito elettrico per la durata del contatto, circola la corrente e gli elettrodi del voltametro restano polarizzati. Subito però che si è riaperto questo circuito che chiamerò polarizzante se ne chiude un altro, che dirò di polarità, in cui circola la corrente prodotta dalla polarizzazione degli elettrodi. Infatti da ciascuno di questi si stacca un filo di rame perfettamente isolato, ed uno va al sopporto *b* mentre l'altro, dopo avere attraversato un galvanometro, per quattro diramazioni si reca a' sopporti *c*, *d*, *e*, *f* che stabiliscono il contatto elettrico con le armille c', d', e', f'. Avviene quindi nel movimento di rotazione che subito dopo cessato il contatto fra il prisma del sopporto *a* ed il pezzo *n* del cilindro N (cioè appena aperto il circuito polarizzante) ha luogo il contatto del prisma del sopporto *b* col pezzo *m* del cilindro M, e si chiude un altro circuito che è quello che ho chiamato di polarità. Per esso circola la corrente generata nel voltametro, per un tempo brevissimo, quanto dura il contatto; ma dopo un quarto di giro ha luogo un nuovo contatto fra il prisma ed un altro pezzo *m*, ed

un altro circuito si chiude, per cui torna a passare pel galvanometro la corrente; e così si ripete la stessa cosa ad ogni quarto di giro e circola nel galvanometro la corrente prodotta dalla polarizzazione degli elettrodi del voltametro, della quale si può misurare l'intensità dalle deviazioni impulsive dello specchio del galvanometro.

Se non che il moto di rotazione non si fa in modo continuo, ma di un quarto di giro per volta e ad uguali intervalli di tempo. Questo si ottiene mediante un'altra parte della macchina che ora passo a descrivere. Sullo stesso asse di rotazione che porta le armille ed i cilindri, dei quali ho già parlato, e precisamente fra le due caprette K e K′ c'è la ruota di legno F dal cui contorno sporgono quattro denti di acciaio che se lo dividono in parti uguali, e sulle cui facce laterali, presso alla periferia sono piantati quattro pioli semicilindrici pur d'acciaio, fra di loro equidistanti e che volgono la loro convessità dalla parte verso cui avviene la rotazione. Nella fig. 1 si vedono soltanto quello (h') di una faccia che per la posizione rispondono a' denti del contorno, mentre nella fig. 2 si vedono quelli (h) della faccia opposta, che ne distano di 45°. Sotto e sullo stesso piano della ruota F giace una leva di 1° genere xy (vedi fig. 1, 2, 4) col fulcro orizzontale, che con uno dei suoi bracci opponendo un dente a quello della ruota le impedisce di girare. Questo braccio però è tirato in giù dal peso (q) (fig. 4) che agisce su di esso per intermezzo di una leva di 2° genere otq situata sotto alla precedente, e quando ottenga il suo effetto la ruota resta libera di girare. Se non che ciò non può avvenire finchè l'altro braccio della leva xy è trattenuto da un nottolino a molla k (vedi fig. 5). Ora un pendolo G (fig. 1) mosso da un meccanismo d'orologeria è quello che con le sue oscillazioni regola il moto della macchina, alzando periodicamente questo nottolino. Per questo circa a' due terzi dell'asta del pendolo è imperniato il pezzo k' (vedi fig. 5) che può girare soltanto per un verso, e con un naso R che nelle sue oscillazioni va a battere contro la ruota S, che il pendolo stesso muove mediante un *crick* montato sul suo asse e contro i cui denti giuoca un piccolo catenaccio a spirale portato da una forchetta girevole su di un pernio, alla quale il pendolo comunica un moto dal basso in alto e dall'alto in basso premendo alternativamente con un piolo i suoi due rami. La ruota S (fig. 2) non è tutta piena e quando il naso incontra una delle grandi insenature, il pezzo k' restando verticale batte col suo piede nel nottolino k, e siccome non può girare per cedere, lo alza, e lo alza precisamente quando il pendolo ripassa per la verticale. Allora la leva xy cedendo al peso q trabocca e svincola la ruota F che si mette a girare. Questa ha però fatto appena 45° che uno dei semicilindri d'acciaio h s'imbatte nel braccio ricurvo della leva di 1° genere Y l'altro braccio della quale è caricato di un peso; e la ruota dovendo eseguire il lavoro d'alzarlo perde buona parte della sua forza viva; un' altra parte ne perde subito dopo per l'incontro d'uno dei semicilindri h col braccio r della leva zancata rs (vedi fig. 1 e fig. 4) che finisce in una robustissima molla di acciaio, che deve piegare avanti a sè, eseguendo insieme l'importante lavoro di rimettere in posto la leva xy, rialzandola con l'altro braccio s e preparando così un ultimo ostacolo alla ruota F, un dente della quale viene a battere contro quello della leva $x\ y$. Questa ruota è poi così messa sull'asse di rotazione, rispetto ai cilindri M ed N, che i contatti elettrici si stabiliscono nei momenti di massima velocità, quando cioè hanno girato di 45°, ed

attesa la breve durata dei contatti si può ritenere che in quel breve tempo il moto sia uniforme (del che ci possiamo anche assicurare nel modo che ora indicheremo). Per misurare questa durata si ricorre all'artifizio di contare le vibrazioni che in quel tempo fa un diapason elettrico che fu costruito dal *Koenig* di Parigi. Per questo, sulla estremità dell'asse di rotazione c'è il cilindro di metallo D che si ricuopre di nero fumo, e sul quale si fa appoggiare una delicata molla d'acciaio attaccata in cima ad uno dei rami del diapason, che si mette in vibrazione un po' avanti che la macchina sia in moto. Non resta a fare altro che contare le vibrazioni inscritte sul cilindro D entro un arco uguale e corrispondente a quello su cui si stendono i contatti elettrici sul cilindro M, precisamente come si fa nell'interruttore Felici. Ripetendo la prova per tutti e quattro i contatti m del cilindro M si può verificare se la velocità massima di rotazione è sempre, come deve essere, la medesima durante il tempo che sta chiuso il circuito di polarità elettrica ne' singoli quarti di giro. L' apparato ha poi « un momento d'inerzia considerevole per rendere minimi e trascurabili gli effetti « di una variazione d'attrito che potrebbe sopravvenire da un momento ad un altro « e che potrebbe altrimenti modificarne la velocità ».

È da notarsi poi, quanto al circuito polarizzante che esso viene a chiudersi una volta ad ogni giro, ma che nelle esperienze possiamo a volontà sopprimerlo dopo la prima volta, con un semplice meccanismo (che non fu disegnato per non rendere troppo complicata la figura) od anche non adoprarlo affatto quando si abbia da fare con un voltametro di già polarizzato. Quanto poi al circuito di polarità è da osservarsi che per dare tempo all'ago del galvanometro di fermarsi prima che vi circoli una nuova corrente, possiamo invece di un galvanometro solo adoperare più galvanometri fino al numero di *quattro*, intercalandoli nelle diramazioni del reoforo che dal voltametro va alle armille c', d', e', f'. Si può del resto rendere più o meno lungo il periodo con cui si succedono le correnti di polarità, semplicemente adoperando una ruota spartitora S con un numero d'insenature diverso. Le grandi dimensioni dell'apparecchio e la perfetta resistenza delle varie parti, assicura completamente che la ruota incominci a girare (come verificammo) esattamente dopo multipli noti del secondo, e che il tempo che impiega la ruota, dall' istante in cui si mette in moto fino a quello in cui stabilisce il contatto elettrico sia in ogni caso lo stesso.

La grande massa della lente L e conseguentemente il grandissimo momento d'inerzia del pendolo, fa sì che pochissimo esso risenta delle perdite di forza viva che prova nell'alzare il nottolino k ecc. sicchè la legge del suo moto rimane invariata. Ed infatti il pendolo poteva durare ad oscillare regolarmente per varî minuti primi, senza bisogno di peso che lo caricasse, pur facendo agire l'interruttore.

Dato così un'idea sommaria della macchina ne descriverò partitamente le parti principali.

Meccanismo motore dell'asse di rotazione (vedi fig. 1 e 2). La catena senza fine $\theta\beta\mu\lambda\varepsilon$ si distende col tratto orizzontale β sulle due pulegge u e v, i cui perni son confitti sulle caprette K e C' mentre con la porzione verticale θ scende ad abbracciare il bozzello che sostiene il peso P per poi risalire coll'altra porzione verticale ε fino all' asse di rotazione, e dopo essersi accavallata sopra una corona di pioli di cui l'asse è munito, ridiscendere col tratto λ a trovare il bozzello del peso

minore p, e poi rientrare in sè stessa. Girando il manubrio (che si vede disegnato nella fig. 3) nel senso di una lancetta d'un orologio, i denti di un rocchetto impegnati negli anelli della catena ne sollevano il tratto θ, sicchè il peso P sale mentre quello p scende; ed un *crich* ω (fig. 2) che è sull'asse medesimo del rocchetto impedisce a questo di retrocedere sotto l'azione del peso, e così resta carico il meccanismo motore. Nel caricamento scorre soltanto la porzione di catena $\theta\,\beta\,\mu$, e nello scaricamento invece solamente l'altra $\varepsilon\,\lambda$ coll' asse di rotazione.

Armille. Le armille c', d', e', f' sono tutte eguali, l'armilla g' è un po' più grande. Sono d'argentana, come tutti i contatti elettrici a sfregamento di questa macchina, perchè questa lega ha di fronte agli altri metalli il pregio di non produrre delle sbavature, e sono isolate sull'asse da una armilla concentrica di ebanite, nel cui grosso si fa strada il filo di rame che congiunge ciascuna di esse ad uno de' contatti.

Cilindri. I cilindri M ed N di un diametro uguale, hanno un' altezza relativamente piccola ed N è anche più basso di M. Sono di legno di noce bollito nell'olio di lino; M è tutto in giro cerchiato con una striscia spessa di ebanite, che s'ispessisce maggiormente nei punti dove sono incastrati i pezzi d'argentana m. Questi come si vede nelle fig. 1 e 3, corrono lungo il cilindro da parte a parte, parallelamente all'asse, e sono distinti in tre porzioni eguali di diversa larghezza, e ciò per potere variare la durata dei contatti elettrici senza modificare la velocità di rotazione. Sul cilindro N c'è l'unico pezzo n anch'esso isolato su ebanite e distinto in due porzioni eguali, una di una lunghezza doppia dall'altra, per la ragione detta di sopra. Avanti di adoperare la macchina mi assicurava sempre del perfetto isolamento dell'ebanite dai cilindri, che si nettava (occorrendo) con carta smerigliata finissima e poi con pelle asciutta.

Sopporti. I sopporti a, b, c, d, e, f, g sono fatti tutti presso a poco all'istesso modo e consistono in una robustissima squadra di ferro, rinforzata da una verga obliqua (che non è disegnata nelle figure) a lati ineguali, sul minore dei quali, che serve da base ed è isolato dalla tavola da uno zoccolo di ebanite, è saldato un serrafilo; mentre sul lato maggiore che resta verticale è fermata in basso con due viti la lamina di argentana che in alto vien premuta più o meno da una vite di pressione che agisce sulla molla coll'intermezzo di un grosso cuoio. La sola differenza sta ne' sopporti a e b che non portano una lamina semplice ma una grossa lamina armata di un prisma, e possono muoversi lungo il cilindro e fissarsi con de' galletti dove più ne piace, onde portarne il prisma ora sopra una ora sopra un' altra porzione del pezzo metallico che è sul cilindro e così variare la durata del contatto.

Ruota de' freni e freni. La ruota F (fig. 1, 2, 3 e 4) è un poco più grande dei cilindri M, N e pure di noce stagionato, bollito nell' olio di lino; ma nel suo interno ha un' armatura di quattro raggi di acciaio, che dall'asse vanno alla periferia dove formano i quattro denti z. Il rivestimento in legno di questa armatura consta di due parti che combaciano esattamente e sono tenute insieme da otto chiavarde, che alternatamente sporgono quattro dall'una e quattro dall'altra faccia della ruota formando quattro pioli semicilindrici h ed h'. Dei pezzetti di cuoio foderano i quattro denti dalla parte che battono contro il dente della leva $x\,y$ per ammortire il colpo.

Il primo freno è fatto con una robusta leva di primo genere Y imperniata sopra

un cilindro di bossolo in cima ad una sbarra ritta sul piano della tavola, e sul suo braccio interno che è ricurvo agiscono successivamente i pioli h della ruota, abbassandolo ed alzando per conseguenza quello esterno che è gravato da un peso, a cui può sostituirsi con vantaggio un tubo o nastro di caucciù fissato per un capo in terra e per l'altro al braccio della leva. Un' appendice A in forma d'arco che si stacca dalla sbarra che porta questa leva sorregge il braccio che è caricato del peso e ne riceve l'urto quando dopo essere stato sollevato ricade: un guancialetto di gomma smorza il colpo.

Il secondo freno è una leva zancata imperniata sulla capretta K' il cui braccio r (vedi fig. 4) finisce in una robustissima molla d'acciaio su cui vengono a far forza uno ad uno i pioli h', sollevando in pari tempo coll'altro braccio s la leva $x\,y$.

Questa costituisce il 3° freno, che è piuttosto un organo che serve ora a fermare ed ora a lasciare libera la ruota F. Essa è di primo genere a braccia diseguali. Il più corto braccio x ha un dente che nella posizione orizzontale si contrappone ad uno di quelli della ruota e la ferma. Presso al dente si attacca a questo braccio una staffa, che gli trasmette moltiplicandolo lo sforzo fatto dal peso q sulla leva di 2° genere $q\,t\,o$ situata al di sotto. Sul braccio più lungo y ad una distanza dal fulcro eguale forse al braccio x fa presa il nottolino a molla k (fig. 5), che è fatto giocare dal pendolo. Quando la macchina è fuori d'azione si chiude a mano un altro nottolino che per semplicità non è stato rappresentato nel disegno, ma che si trova presso il ponticello sotto cui entra l'estremità y della leva. Questo ponte serve a limitare il trabocco della leva, ed è munito di un guancialetto di gomma o di cuoio, come tutte le parti soggette ad urto.

Pendolo ed organi accessori che servono a regolare il movimento della macchina. Il pendolo G L è formato di una robusta sbarra di ferro lunga circa un metro e trenta centimetri, e di una gran lente d'ottone piena di piombo del peso di oltre 60 chilogrammi, ed oscilla sospeso ad un coltello sopra piani di acciaio entro il castello di ghisa C C'. Il moto lo riceve, come negli orologi, da uno scappamento a caviglie H e da un peso di circa due chilogrammi, che agisce per mezzo d'una fune. Il pendolo può così andare per molte ore senza bisogno di ricaricare l'orologio. Circa a' due terzi della sua lunghezza, all' altezza della leva $x\,y$, il pendolo porta dalla parte che guarda la detta leva, il pezzo k' R (fig. 5) che può girare sul suo pernio soltanto in senso inverso delle lancette d'un orologio, ma che pel proprio peso tende a star verticale. Sul naso R, nel punto che batte sul contorno della ruota spartitora S, c'è un piccolo rocchettino d'acciaio che serve a trasformare l'attrito radente in volvente. Quanto alla ruota spartitora, oltre alle grandi, ha delle insenature minori, per impedire al naso R di ricadere nelle prime una volta che ne sia uscito, nonostante che la ruota abbia girato un poco; il che potrebbe disturbare il moto del pendolo. La ruota S poi gira per l'azione del catenaccio R (vedi fig. 6), che da una molla spirale è costantemente spinto contro i denti obliqui del *crich* montato sul suo asse. Il catenaccio scorre sopra un pezzo imperniato sul castello, che ha due rami a mo' di forchetta, sui quali agisce il pendolo mediante un piolo che non è altro che la continuazione del pernio su cui gira il pezzo k' R dalla parte opposta dell' asta. L'asse della ruota spartitora e del suo *crich* è sorretto su cuscinetti caricati sui fianchi del castello C C'.

Descritto l'apparecchio indicherò ora il suo uso nello studio della dispersione della polarità.

Mi assicurava prima di tutto che le interruzioni avvenivano dopo tempi esattamente eguali, col notare graficamente per mezzo d'un corista elettrico gli intervalli fra due successivi contatti: parimenti mi assicurava che le durate dei contatti erano in tutti i casi eguali.

Il voltametro era a lamine di oro o di platino di grandissima superficie, per modo che fosse perfettamente trascurabile la diminuzione di forza elettromotrice per le correnti generate in tutti i brevissimi tempuscoli di chiusura del circuito di polarità: la resistenza del voltametro, anche in conseguenza della grande superficie degli elettrodi, era sempre piccolissima e trascurabile di fronte a quella del rimanente circuito di polarità, eccettuato il caso che il liquido del voltametro non sia acqua stillata o soluzione d'ammoniaca.

I quattro circuiti di polarità di cui veniva successivamente a far parte il voltametro durante i tempuscoli di chiusura prodotta dal movimento periodico dell'interruttore, contenevano ciascheduno un reostata a solfato di zinco che permetteva introdurre resistenze variabili da 1000 a circa 60000 Siemens, e un galvanometro a specchio munito del suo smorzatore di rame. Così se la chiusura avveniva ogni quattro secondi, la corrente di polarità ripassava per uno stesso galvanometro per ogni sedici secondi, tempo più che sufficiente perchè il galvanometro fosse tornato perfettamente a zero ([1]). Occorreva anche che i galvanometri fossero di eguale sensibilità, nelle condizioni nelle quali erano adoperati; vale a dire che la stessa forza elettromotrice nel voltametro, generando una corrente che dura un tempo brevissimo ma sempre eguale, producesse nei galvanometri la stessa deviazione impulsiva. Questo si poteva ottenere mantenendo eguale la resistenza reostatica dei quattro circuiti di polarità, coll'allontanare convenientemente i telai mobili dei galvanometri, o col modificare l'astasia degli specchi calamitati o in altro modo qualunque agendo sui galvanometri; ma trovai più comodo invece, quando (come era in generale) la resistenza del voltametro fosse trascurabile di fronte a quella dell'intiero circuito, contentarmi a rendere approssimativamente eguali le sensibilità dei galvanometri, e poscia preparare convenientemente l'esperienza col variare convenientemente la resistenza dei reostati. Mi assicurava ogni volta prima d'incominciare l'esperienze che tutto era bene apparecchiato, coll'osservare che sostituito al voltametro un elemento Daniell di piccola resistenza interna, si avevano per le successive chiusure dei circuiti, deviazioni esattamente eguali nei quattro galvanometri.

Era necessario fare anche un' altra prova per assicurarsi che la debole corrente fornita dal voltametro polarizzato in tutte le successive chiusure di circuiti che avevano luogo per la intiera durata della esperienza, non diminuiva sensibilmente la sua forza elettromotrice. Per questo adoperava un artifizio simile a quello da me indicato nella mia Memoria sulle leggi delle polarità galvaniche ([2]). Cioè, dopo polarizzato il

([1]) I galvanometri adoperati erano alcuni costruiti dal Sauerwald di Berlino, altri dal Ruhmkorff. In alcune serie di esperienze impiegai due soli galvanometri, l'uno sistema Magnus, l'altro sistema Wiedemann, muniti di smorzatori metallici.

([2]) Atti della r. Accademia dei Lincei, loco citato.

voltametro con una pila si faceva in modo che venisse chiuso un circuito A di polarità (della stessa resistenza di quella dei soliti circuiti) per un tempo 20 o 30 volte maggiore di quello θ che duravano i passaggi delle correnti di polarità pei galvanometri; immediatamente dopo il cilindro M chiudeva un circuito per cui passasse pel tempuscolo θ la corrente di polarità per il galvanometro; si ripeteva poscia la stessa esperienza nelle stesse condizioni (col voltametro a principio depolarizzato, e polarizzato poi pel passaggio della corrente della stessa pila per un tempo eguale al primo) con il circuito A aperto: si doveva in questo caso ottenere la stessa deviazione impulsiva del galvanometro, dopo il successivo passaggio della corrente di polarità per il tempuscolo θ.

Questa riprova si poteva fare comodamente mediante delle striscie di argentana convenientemente inserite sulla ebanite del cilindro M, e comunicanti con due delle armille c' d' e' f'.

Aggiungerò qui in nota [1] le dimensioni delle parti più importanti del nuovo interruttore. In un' altra Memoria renderò conto dei risultati che ho già ottenuti [2], servendomi dell'interruttore descritto.

[1] Ecco le dimensioni delle parti principali dell'interruttore. Lunghezza dell'albero principale della ruota F e dei cilindri M, N, centimetri 80; suo diametro cent. 6.

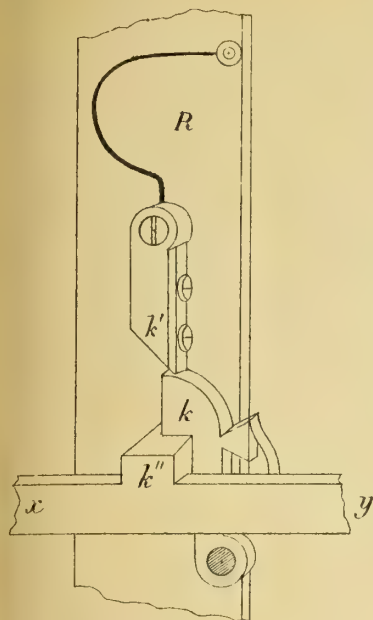
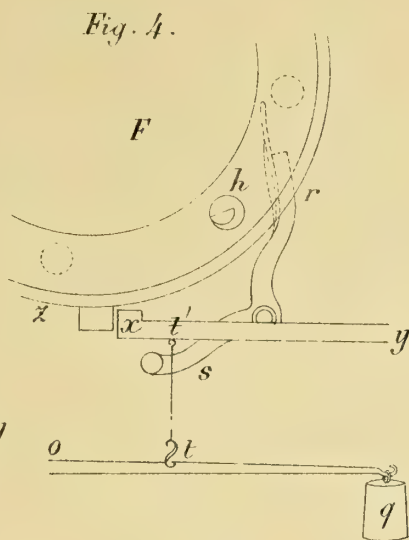
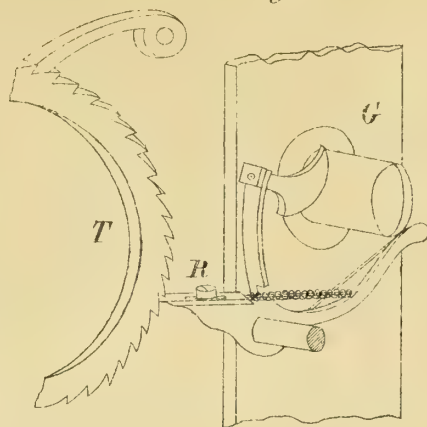
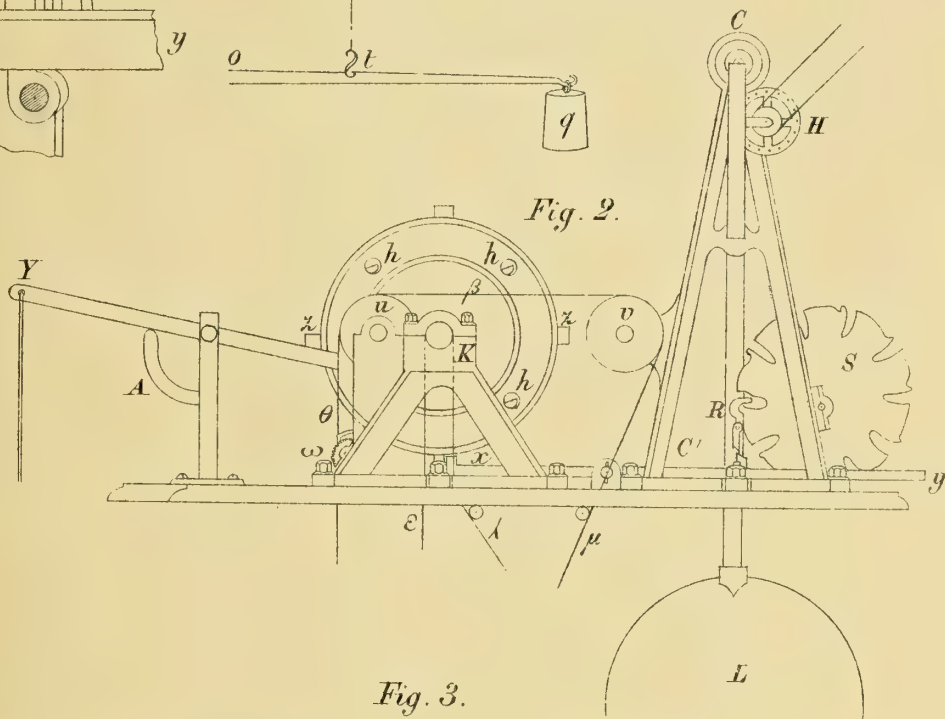
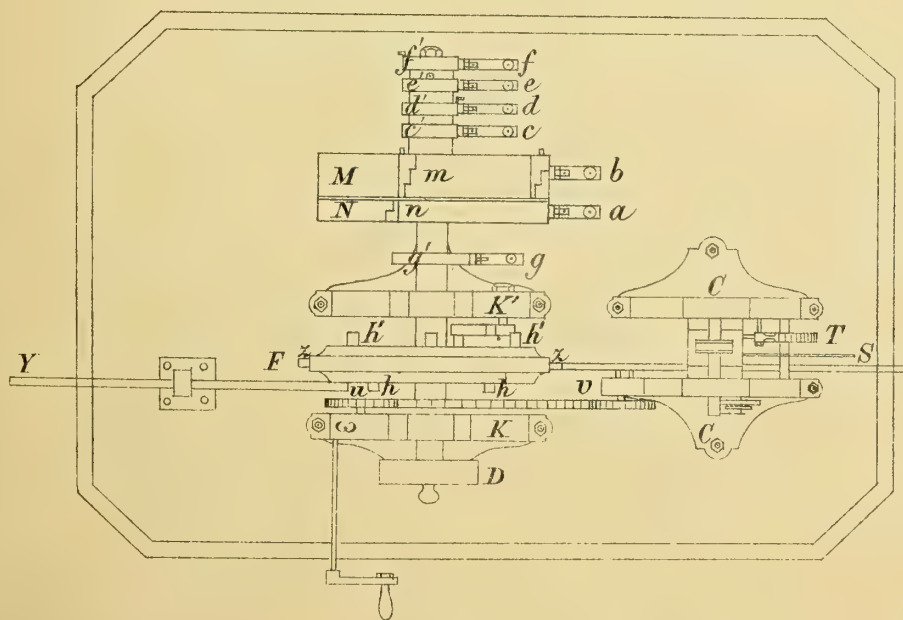
Diametro dei cilindri M ed N, cent. 40: loro altezza cent. 12.

Diametro della ruota F, cent. 41; spessore cent. 8.

Altezza del castello C, cent. 67. Lunghezza dell'asta G L del pendolo, cent. 130. Peso della lente L, chilogrammi 62. Lunghezza della catena $0\ \beta\ \mu\ \lambda\ \varepsilon$, cent. 380. Peso motore P da 100 a 300 chilogrammi, secondo le esperienze. Lunghezza del freno Y, cent. 82. Diametro del cilindro registratore D, cent. 20. Diametro della ruota spartitora S, cent. 25.

[2] L'interruttore fu costruito nel 1880 dal sig. R. Turchini meccanico di questo gabinetto fisico. La parte in legno fu lavorata dal sig. S. Vannucci inserviente di questo gabinetto. Costò in tutto circa lire 800. Debbo ringraziare anche i miei amici ed aiuti dott. Guido Alessandri, ora professore di fisica nel r. Liceo di Potenza e il sig. Paolo Guasti, che mi hanno con tanto zelo assistito nelle prove fatte per migliorare l'interruttore.

Fig. 1.
H
C
S
G
T
y
C'
F
z
h'
N
M
n
m
D
β
u
g'
Y
z
r
K'
K
c
d
e
f
x
g
a
b
μ
λ
t
o
q
p
ε
θ
L
P

Dr G. Alessandri dis.° Ottobre 1880.

Teorema fondamentale nella teoria delle equazioni canoniche del moto.

Memoria del Socio corrisp. F. SIACCI

letta nella seduta del 5 marzo 1882.

Siccome tutta la scienza dinamica è racchiusa in un'equazione differenziale, è lecito immaginare abbia ad esservi un teorema analitico tanto generale, che applicato a quell'equazione produca a guisa di corollari le soluzioni di tutti i problemi di moto. In mancanza di sì gran teorema, a cui non si arriverà forse mai, la scienza dinamica farebbe tuttavia un passo considerevole, se ad ogni ramo di essa si potesse far corrispondere un Capitolo, con un teorema generale in fronte, donde scaturissero senza troppo speciali artifizi tutti i teoremi, che appartengono a quel ramo.

Io mi sono provato a comporre uno di questi Capitoli, costruendo secondo tal concetto la teoria dell'equazioni canoniche del moto. Questa teoria, creata da Hamilton e perfezionata da Jacobi, è attualmente presso a poco nello stato, in cui fu trovata ne'scritti postumi di questo grande geometra — a parte i metodi per la risoluzione dell'equazioni a derivate parziali, che non entrano in questa teoria —. L'equazioni differenziali si deducono tranne qualche eccezione da quelle del Lagrange, e, senza eccezione, non sono mai le più generali. Il teorema della funzione caratteristica si dimostra per verifica. Le proprietà degli integrali canonici cambinati due a due nella funzione di Poisson si dimostrano a parte, e se ne deducono le equazioni del moto perturbato. Finalmente certe relazioni differenziali fra le variabili e le costanti canoniche considerando quelle come funzioni di queste, e queste come funzioni di quelle, si deducono da un teorema, che Jacobi disse fondamentale.

Il teorema, che io mi son permesso di chiamare fondamentale nella teoria dell'equazioni canoniche, è diverso da quello di Jacobi; ed è molto più generale, poichè da esso scaturiscono direttamente non solo tutti i teoremi anzidetti, ma altri più generali, senza bisogno di digressioni e di artifici, che nascondono la loro naturale connessione. Con tale teorema, che d'altronde è assai semplice, l'equazione dei momenti virtuali, qual'è data dall'enunciato del Principio, si trasforma immediatamente e nel modo più generale possibile, in un'altra avente la stessa forma, con variabili indipendenti. Con altra simile trasformazione si passa direttamente e ad un tratto al teorema della funzione caratteristica e all'equazioni del moto perturbato. Colla stessa facilità si trovano finalmente le relazioni fra i vari sistemi di variabili o costanti canoniche insieme ad altri teoremi generali, che credo nuovi, tra' quali uno contiene come caso particolare quello sovraccennato di Jacobi.

Non mi pare adunque improprio l'appellativo dato al teorema, che segue, nè mi parrebbe ingiusta l'affermazione, che in tal teorema si compendia tutta la teoria dell'equazioni canoniche del moto.

I. Teorema fondamentale.

1. *Se n equazioni fra le variabili:*

$$x_1\ y_1\ x_2\ y_2 \ldots\ x_n\ y_n$$

risolute rispetto ad n di queste verificano la relazione:

$$(f) \qquad \Sigma_r (dy_r\, \delta x_r - \delta y_r\, dx_r) = 0\,, \quad (r = 1, 2 \ldots n)$$

le n equazioni si possono sempre ridurre alla forma:

$$(s) \qquad y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \lambda_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial x_r} + \ldots + \lambda_k \frac{\partial \psi_k}{\partial x_r}\,;$$

ove φ, ψ_1, $\psi_2 \ldots \psi_k$ sono funzioni delle x, e $\lambda_1\ \lambda_2 \ldots \lambda_k$ s' intendono determinate in modo, che le (s) verifichino l'equazioni:

$$\psi_1 = 0\,, \quad \psi_2 = 0\ \ldots\ \psi_k = 0\,.$$

Se le n equazioni fra le x e le y fossero risolubili rispetto alle y, queste si potrebbero considerare come funzioni esplicite delle x, che sarebbero indipendenti fra loro; ed allora sviluppando dy_r e δy_r si avrebbe dalla (f)

$$\sum_r \sum_s \frac{\partial y_r}{\partial x_s} (dx_s\, \delta x_r - \delta x_s\, dx_r) = 0\,;$$

ed accoppiando in questa somma i termini moltiplicati per lo stesso binomio, si avrebbe

$$\sum_r \sum_s \left(\frac{\partial y_r}{\partial x_s} - \frac{\partial y_s}{\partial x_r} \right) (dx_s\, \delta x_r - \delta x_s\, dx_r) = 0;$$

e da questa, essendo le x indipendenti, si concluderebbe

$$\frac{\partial y_r}{\partial x_s} - \frac{\partial y_s}{\partial x_r} = 0\,,$$

ossia

$$y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r}\,,$$

φ essendo una funzione delle x.

Ma le n equazioni fra le x e le y possono non essere risolubili rispetto alle y, e quindi nè le y potranno in generale considerarsi come funzioni esplicite delle x, nè le x saranno variabili indipendenti, poichè da quelle n equazioni emergerà una equazione o più, tra le sole x.

Siano adunque

$$(\psi) \qquad \psi_1 = 0\,, \quad \psi_2 = 0\,, \ldots, \quad \psi_k = 0$$

queste equazioni fra le sole x, e poniamo

$$z_1 = f_1\,, \quad z_2 = f_2\,, \ldots, \quad z_{n-k} = f_{n-k}\,,$$

ove le f indicano funzioni arbitrarie delle x. Queste adunque ricavate dalle ultime n equazioni potranno considerarsi come funzioni delle z; e queste, non essendo legate

da alcuna equazione, saranno variabili indipendenti. Poniamo inoltre

$$(s)' \qquad y_r = \sum_i u_i \frac{\partial f_i}{\partial x_r} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \psi_j}{\partial x_r}, \quad \begin{cases} i = 1, 2 \dots n-k, \\ j = 1, 2 \dots \quad k. \end{cases}$$

La (f), che equivale a

$$d \sum_r y_r \delta x_r - \delta \sum_r y_r dx_r = 0,$$

diverrà

$$d \sum_i u_i \delta z_i - \delta \sum_i u_i dz_i = 0,$$

ossia

$$(f)' \qquad \sum_i (du_i \delta z_i - \delta u_i dz_i) = 0:$$

e le n-k equazioni, che insieme alle (ψ) debbono costituire il richiesto sistema fra le x e le y, dovranno verificare la $(f)'$. Ora questa non contiene che le u e le z, dunque anche le n-k equazioni richieste non conterranno che queste variabili. Esse si potranno perciò risolvere rispetto alle u, poichè nessuna relazione sussiste fra le z.

Si avrà dunque

$$u_i = \frac{\partial \varphi}{\partial z_i},$$

φ essendo una funzione delle z.

Queste n-k equazioni, sostituendo per z_i e per u_i le funzioni di x e di y che esse rappresentano, aggiunte alle k equazioni (ψ), formerebbero il numero richiesto di n equazioni fra le x ed y.

Queste n equazioni poi si ridurranno alle $(s)'$, le quali, mettendo per u_i il valore trovato $\frac{d\varphi}{\partial z_i}$, divengono

$$(s) \qquad y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \sum_j \lambda_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}$$

e $\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ si determineranno in guisa che le (s) comprendano le (ψ). E questo si potrà ottenere in molte maniere. Così il teorema è dimostrato.

2. Si avrà poi

$$\sum_r y_r dx_r = d\varphi.$$

3. Noi diremo *forma fondamentale* una espressione della forma

$$\sum_r (dy_r \delta x_r - \delta y_r dx_r),$$

ed *equazione fondamentale*, l'equazione, che nasce eguagliando a zero cotesta espressione.

4. Si deve notare come si possa nell'equazione (f), e quindi nelle (s) e nelle (ψ), mutare una x_s qualsiasi nella rispettiva y_s, purchè la y_s si muti contemporaneamente in $-x_s$. E questa osservazione s'intenderà ripetuta in tutte le applicazioni, che faremo del teorema fondamentale.

II. Riduzione dell'equazione dei movimenti virtuali alla forma fondamentale.

5. In ogni problema di dinamica, pel quale sussista una funzione delle forze, l'equazione dei momenti virtuali prende la forma

$$\Sigma m\,(dx'\,\delta x + dy'\,\delta y + dz'\,\delta z) - \delta U dt = 0,$$

ove $x\ y\ z$ sono le coordinate della massa m, $x'\ y'\ z'$ le componenti della sua velocità, ed U la funzione delle forze, cioè una funzione delle coordinate e del tempo t. Le variazioni δ s'intendono poi prese compatibilmente coi vincoli del sistema rappresentati in generale da equazioni fra le coordinate ed il tempo

$$\text{(L)} \qquad L_j = 0, \qquad (j = 1, 2 \ldots l).$$

Queste equazioni insieme con quelle, che ne derivano colla differenziazione, e che indicheremo con

$$\text{(L')} \qquad L'_j = 0,$$

costituiscono $2l$ equazioni di condizione fra le coordinate, le velocità e il tempo.

Se il problema non ammette una funzione delle forze, δU sarà un simbolo che compendia l'espressione $\Sigma\,(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)$, X, Y, Z essendo funzioni qualunque delle coordinate, delle velocità e del tempo.

6. Sia u_r una qualunque delle coordinate, il cui numero supporremo N, moltiplicata per la radice della rispettiva massa, e poniamo

$$u'_r = \frac{du_r}{dt}.$$

L'equazione dei momenti virtuali si potrà scrivere

$$\sum_r du'_r\,\delta u_r - \delta U dt = 0, \qquad (r = 1, 2 \ldots\ldots N)$$

e se con T si dinota la somma delle forze vive avremo

$$\frac{1}{2}\sum_r u_r'^2 = T;$$

onde

$$\sum_r du_r\,\delta u'_r - \delta T dt = 0.$$

Sottraendo questa equazione da quella delle velocità virtuali risulterà

$$(f) \qquad \sum_r (du'_r\,\delta u_r - du_r\,\delta u'_r) + (\delta T - \delta U)\,dt = 0.$$

7. Questa equazione, se U è una funzione, ha già la forma fondamentale, sebbene manchi al primo membro il termine $-(dT - dU)\,\delta t$, il quale è nullo, perchè, come vuole il principio delle velocità viruali, $\delta t = o$. Onde si può concludere, che se N+1 equazioni ($2l$ di esse sono le equazioni di condizione, ed una è quella che definisce U) verificano la (f), esse, (2), rendono un differenziale esatto la somma

$$\sum_r u'_r\,du_r - (T - U)\,dt.$$

8. Ma a ben intendere, in che debba consistere l'integrazione della (f), sarà utile ricordare, che la risoluzione del problema esige, che ognuna delle variabili u ed u'

sia espressa in funzione del tempo, e di altre quantità che si possono ridurre ai valori iniziali delle variabili stesse; ora tai valori iniziali, dovendo soddisfare anch'essi alle equazioni di condizione, si potranno considerare come funzione di $2N-2l$ costanti arbitrarie. Perciò le funzioni u ed u', che risolvono il problema, dovranno essere funzioni del tempo e di $2N-2l$ costanti arbitrarie, e soddisfare alle (L) alle (L') ed alla (f). In questa poi, mentre i differenziali si riferiscono al tempo, le variazioni si potranno riferire alle arbitrarie.

III. Le più generali equazioni canoniche.

9. *Al sistema di variabili u ed u' legate dall'equazioni* (L) *ed* (L'), *si voglia sostituire nel modo più generale un sistema di $2n=2N-2l$ variabili indipendenti tra loro*

$$p_s, \quad q_s, \quad (s=1,2\ldots n),$$

e tali, che

$$\sum_r (du'_r\,\delta u_r - du_r\,\delta u_r)$$

si muti in

$$\sum_s (dp_s\,\delta q_s - dq_s\,\delta p_s) - \delta\Omega dt,$$

essendo Ω una funzione da determinare delle p, delle q e del tempo.

Messe per u ed u' le funzioni cercate, l'equazione

$$(f) \qquad \sum_r (du'_r\,\delta u_r - du_r\,\delta u'_r) - \sum_s (dp_s\,\delta q_s - dq_s\,\delta p_s) + \delta\Omega dt = 0$$

dee divenire una identità.

Questa equazione ha la forma fondamentale, onde assimilando le u, le q e t alle x del § I, avremo che $N+n+1$ delle $2N$ equazioni richieste saranno

$$(s) \qquad -p_s = \frac{\partial\varphi}{\partial q_s} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial\psi_i}{\partial q_s}, \quad (i=1,2\ldots k, k\leq n)$$

$$(s)' \qquad u'_r = \frac{\partial\varphi}{\partial u_r} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial\psi_i}{\partial u_r} + \sum_j \mu_j \frac{\partial L_j}{\partial u_r},$$

$$(s)'' \qquad -\Omega = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial\psi_i}{\partial t} + \sum_j \mu_j \frac{\partial L_j}{\partial t};$$

ove $\varphi, \psi_1\, \psi_2 \ldots \psi_k$ sono funzioni arbitrarie delle u, delle q e di t, ed i fattori λ e μ sono determinati in modo da verificare le equazioni date (L), e l'equazioni arbitrarie

$$(\psi) \qquad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0, \ \ldots, \ \psi_k = 0.$$

Aggiungendo al sistema (s) (s)' (s)'', il sistema (L') avremo in tutto $2N+1$ equazioni, da cui si ricaveranno le u le u' ed Ω in funzione *delle p delle q e di t*, e *queste* $2N+1$ *funzioni saranno le funzioni più generali, che soddisfano al problema proposto.*

10. Per ricavare effettivamente u, u' ed Ω in funzione delle nuove variabili si può seguire il seguente procedimento.

Per avere le u si risolvano le equazioni (L) e le (s), il cui numero totale è $l+n=N$, rispetto alle u, le quali così divengono funzioni delle p delle q e delle λ: queste funzioni poi si sostituiscano nelle (ψ), e così si otterranno le λ in funzione delle p e delle q, e quindi le u risulteranno funzioni delle stesse quantità; e queste funzioni soddisferanno identicamente alle (L) ed alle (ψ).

11. Per avere poi le u' ed Ω in funzione delle medesime quantità non mancherà, che esprimere le μ in funzione di esse. Perciò si metteranno le espressioni di u'_r, date dalle $(s)'$, nelle $(\mathrm{L})'$ che hanno la forma

$$\sum_r \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial u_r} u'_r + \frac{\partial \mathrm{L}}{\partial t} = 0,$$

e così si otterranno l equazioni lineari, le quali, espresse le u in funzione delle p e delle q, daranno le μ.

12. Quando siano trovate le u in funzione delle p e delle q, com'è stato indicato al n. 10, le u', invece di ricavarle segue il procedimento del n. 11, si possono trarre dall'equazione $u'_r = \frac{du_r}{dt}$, nel seguente modo.

Dalle (s) $(s)'$ $(s)''$, come anche, (2), dal teorema fondamentale, si trae

$$\sum_r u'_r du_r - \sum_s p_s dq_s - \Omega dt = d\varphi.$$

Ora essendo le u funzioni già determinate delle p, delle q e di t, che soddisfano alle (L) ed alle (ψ), φ diverrà funzione delle p, delle q e di t. Onde

$$(c) \qquad \sum_r u'_r \frac{\partial u_r}{\partial q_s} - p_s = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s}\right)$$

$$(c)' \qquad \sum_r u'_r \frac{\partial u_r}{\partial p_s} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}\right)$$

$$(c)'' \qquad \sum_r u'_r \frac{\partial u_r}{\partial t} - \Omega = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right).$$

Ma

$$u'_r = \frac{du_r}{dt} = \frac{\partial u_r}{\partial t} + \sum_s \left(\frac{\partial u_r}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial u_r}{\partial p_s} p'_s\right),$$

da cui deducendosi

$$\frac{\partial u'_r}{\partial q'_s} = \frac{\partial u_r}{\partial q_s}, \quad \frac{\partial u'_r}{\partial p'_s} = \frac{\partial u_r}{\partial p_s},$$

le due prime delle precedenti equazioni diverranno

$$(d) \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_s} - p_s = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s}\right)$$

$$(d)' \qquad \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial p'_s} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial p_s}\right),$$

ove T si suppone espressa in funzione delle p, q, p' q'.

Da queste due equazioni si ricaveranno così le p' e q' in funzioni delle p e delle q, e, sostituitele nella precedente espressione di $\frac{du_r}{dt}$, si avrà u'_r.

Quanto al valore di Ω esso è dato immediatamente dalla $(c)''$; ma è da notare che esso riesce eguale a

$$(d)'' \qquad 2\mathrm{T} - \sum_s p_s q'_s - \frac{d\varphi}{dt};$$

il quale valore di Ω si trae aggiungendo alla $(c)''$ la (c) e la $(c)'$ moltiplicate rispettivamente per q'_s e per p'_s, e sommate col simbolo $\sum_s$.

13. Risoluto il problema enunciato, si hanno immediatamente dall' equazione dei momenti virtuali *le più generali* equazioni canoniche. Ridotta infatti, n.° 6, quell'equazione alla forma fondamentale:

$$(f)' \qquad \sum_r (du'_r \delta u_r - du_r \delta u') + (\delta T - \delta U)\, dt = 0 ,$$

ed espresse, come fu indicato, le u ed u' in funzione delle p e q, la $(f)'$ diverrà

$$(f)'' \qquad \sum_s (dp_s \delta q_s - dq_s \delta p_s) + (\delta T - \delta U - \delta \Omega)\, dt = 0 .$$

La quale, siccome p e q non sono legate da alcuna equazione di condizione, equivale al sistema

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial (T - U - \Omega)}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{dq_s}{dt} - \frac{\partial (T - U - \Omega)}{\partial p_s} = 0,$$

essendo il trinomio $T - U - \Omega$ espresso colle p e colle q.

Se non vi ha funzione delle forze, δU nella $(f)'$ ha la forma $\sum_r F_r \delta u_r$, essendo F_r una funzione delle u delle u' e di t, e quindi nella $(f)''$ δU prenderà la forma

$$\sum_s (A_s \delta p_s + B_s \delta q_s)$$

ed A_s B_s saranno funzioni delle p delle q e di t. Onde il sistema dell'equazioni differenziali, che si trae dalla $(f)''$ diverrà

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial (T - \Omega)}{\partial q_s} - B_s = 0 , \quad \frac{dq_s}{dt} - \frac{\partial (T - \Omega)}{\partial p_s} + A_s = 0 .$$

14. Queste, o le precedenti, sono le equazioni canoniche più generali, che si possano trarre dall'equazione dei momenti virtuali, nè mi consta siano mai state date prima d'ora.

Gli ordinari sistemi di equazioni canoniche, si ricavano esprimendo le coordinate u con funzioni delle sole q, che verifichino le equazioni di condizione (L), e questo caso, nella trasformazione nostra, corrisponde al caso particolare $k = n$. Ma anche in tal caso particolare il valore più generale di p_s è dato, n.° 12, da

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_s}\right),$$

essendo φ una funzione arbitraria delle q e di t, mentre, per quanto a me consta, è stato sempre fatto

$$p_s = \frac{\partial T}{\partial q'_s} .$$

15. Se le funzioni arbitrarie $\varphi_1\ \psi_1\ \psi_2 \ldots \psi_k$ sono indipendenti dal tempo risulta

$$\Omega = 0 .$$

Onde (d'') risulterà

$$\sum_s p_s q'_s = 2T - \frac{d\varphi}{dt} ,$$

ove, se $k = n$, cioè se le u sono funzioni delle sole q, φ è funzione arbitraria di queste sole variabili.

Negli ordinari sistemi si ritiene invece, meno generalmente,

$$\sum_s p_s q'_s = 2T.$$

IV. Equazioni canoniche del moto perturbato e funzione caratteristica.

16. *Le* $2n$ *variabili* p_s *e* q_s *si vogliano esprimere in funzione di altre* $2n$ *variabili,* P_s *e* Q_s, *tali che la funzione*

$$\sum_s (dp_s\delta q_s - dq_s\delta p_s) + \delta H dt$$

si cambi nell' altra

$$\sum_s (dP_s\delta Q_s - dQ_s\delta P_s) + \delta S dt$$

essendo H *una funzione data delle* p, q, t, *ed* S *una funzione delle* P, Q *e* t, *data o da determinare.*

Si dovrà dunque verificare indenticamente l'equazione fondamentale

$$(f) \qquad \sum_s (dp_s\delta q_s - dq_s\delta p_s - dP_s\delta Q_s + dQ_s\delta P_s) + \delta(H - S)\,dt = 0\,.$$

Onde assimilando le q, le Q, e t alle variabili x del teorema fondamentale, e ponendo

$$V = \varphi + \sum_i \lambda_i\psi_i \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots k, k < n),$$

l'equazioni che legano le vecchie variabili colle nuove saranno

$$(s) \qquad p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}\,,$$

$$(s)' \qquad -P_s = \frac{\partial V}{\partial Q_s}\,,$$

$$(s)'' \qquad S - H = \frac{\partial V}{\partial t}\,;$$

ed in queste equazioni φ e ψ sono funzioni delle variabili q, Q, e t, e i fattori λ sono determinati in modo, che le precedenti equazioni includano

$$(\psi) \qquad \psi_1 = 0\,, \qquad \psi_2 = 0\,, \ldots \psi_k = 0\,.$$

Da queste formole derivano immediatamente, come cra vedremo: 1° la trasformazione più generale di un sistema di equazioni canoniche in un altro; 2° le equazioni del moto perturbato; 3° il teorema della funzione caratteristica.

17. *Sia* S *una funzione da determinare*; le funzioni φ e ψ possono essere qualunque, ed allora le $(s)'$ e le (ψ) determinano le λ e le q in funzione delle P e delle Q; poscia le (s) determineranno le p in funzione delle stesse quantità.

La trasformazione precedente è adunque la più generale, con cui dalla equazione

$$\sum_s (dp_s\delta q_s - dq_s\delta p_s) + (\delta H + \delta R)\,dt = 0\,,$$

ossia da

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial(H + R)}{\partial q_s} = 0\,, \quad \frac{dq_s}{dt} - \frac{\partial(H + R)}{\partial p_s} = 0\,,$$

si passa all'equazione

$$\sum_s (dP_s\delta Q_s - dQ_s\delta P) + (\delta R + \delta S)\,dt = 0,$$

ossia a

$$\frac{dP_s}{dt} + \frac{\partial(S + R)}{\partial Q_s} = 0, \quad \frac{\partial Q_s}{dt} - \frac{\partial(S + R)}{\partial P_s} = 0\,.$$

Che se δR rappresenta $\sum_s (A_s \delta p_s + B_s \delta q_s)$, dopo la trasformazione δR prenderà la forma $\sum_s (A'_s \delta P_s + B'_s \delta Q_s)$, onde nelle precedenti equazioni si dovrà cambiare

$$\frac{\partial R}{\partial p_s}, \frac{\partial R}{\partial q_s}, \frac{\partial R}{\partial P_s}, \frac{\partial R}{\partial Q_s}$$

rispettivamente in

$$A_s \quad B_s \quad A'_s \quad B'_s .$$

Questa è la trasformazione più generale di un sistema di equazioni canoniche in un altro.

18. *Sia* $S = 0$; la $(s)''$ diviene

$$H + \frac{\partial V}{\partial t} = 0,$$

e si dovrà allora cercare una fuzione V che soddisfi a questa equazione, nella quale, per le (s), nella funzione H dovrà porsi $\frac{\partial V}{\partial q_s}$ al posto di p_s. Di tale equazione alle derivate parziali trovata una soluzione V con n arbitrarie

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n,$$

dalle (s) ed $(s)'$ si riaveranno le relazioni richieste fra le vecchie variabili e le nuove, relazioni adunque che trasformano le equazioni

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial (H + R)}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{dq_s}{dt} - \frac{\partial (H + R)}{\partial p_s} = 0,$$

ovvero

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_s} + A_s = 0, \quad \frac{dq_s}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_s} - B_s = 0,$$

in

$$\frac{dP_s}{dt} + \frac{\partial R}{\partial q_s} = 0, \qquad \frac{dQ_s}{dt} - \frac{\partial R}{\partial P_s} = 0,$$

ovvero

$$\frac{dP_s}{dt} + A'_s = 0, \qquad \frac{dQ_s}{dt} - B'_s = 0.$$

Queste sono le equazioni canoniche del moto perturbato.

19. *Sia finalmente* $S = 0$, $R = 0$; si avrà

$$dP_s = 0, \qquad dQ_s = 0,$$

ossia $P_s =$ *costante*, $Q_s =$ costante.

Perciò trovata una soluzione con n arbitrarie dell'equazione alle derivate parziali

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H = 0,$$

le equazioni

$$p_s = \frac{\partial V}{\partial q_s}, \quad -P_s = \frac{\partial V}{\partial Q_s}$$

saranno gl'integrali dell'equazioni differenziali

$$\frac{dp_s}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{dq_s}{dt} - \frac{\partial H}{\partial p_s} = 0$$

Questo è il noto teorema della funzione caratteristica. Come si vede, le *costanti canoniche* sono ridotte a un caso particolare di variabili canoniche.

V. Relazioni fra due sistemi di variabili canoniche.

20. *Siano fra le* $4n$ *variabili*

$$p_1\ p_2 \dots p_n\,,\ q_1\ q_2 \dots q_n$$
$$P_1\ P_2 \dots P_n\,,\ Q_1\ Q_2 \dots Q_n$$

le $2n$ *equazioni*

$$(s) \qquad \begin{cases} p_s = \dfrac{\partial\varphi}{\partial q_s} + \sum\limits_i \lambda_i \dfrac{\partial\psi_i}{\partial q_s} & (r,\ s = 1, 2 \dots n) \\ -P_r = \dfrac{\partial\varphi}{\partial Q_r} + \sum\limits_i \lambda_i \dfrac{\partial\psi_i}{\partial Q_r} & (i = 1, 2 \dots k, k \lesseqgtr n) \end{cases}$$

φ *e* ψ *esprimendo funzioni delle* q *e delle* Q, *e* λ *funzioni tali, che l'equazioni precedenti includano*

$$(\psi) \qquad \psi_1 = 0\,,\quad \psi_2 = 0\,, \dots,\quad \psi_k = 0\,.$$

Se si esprimono le variabili p *e* q *in funzione delle* P *e* Q, *e queste in funzione di quelle, si ha*

$$(f) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_s}{\partial Q_r} - \dfrac{\partial P_r}{\partial p_s} = 0\,, & \dfrac{\partial p_s}{\partial Q_r} + \dfrac{\partial P_r}{\partial q_s} = 0 \\ \dfrac{\partial q_s}{\partial P_r} + \dfrac{\partial Q_r}{\partial p_s} = 0\,, & \dfrac{\partial p_s}{\partial P_r} - \dfrac{\partial Q_r}{\partial q_s} = 0\,. \end{cases}$$

Se inoltre, indicando con α *e con* β *due qualunque delle variabili* P *e* Q, *si pone per compendio*

$$\sum_s \left(\frac{\partial q_s}{\partial\alpha} \frac{\partial p_s}{\partial\beta} - \frac{\partial p_s}{\partial\alpha} \frac{\partial q_s}{\partial\beta} \right) = (\alpha, \beta), \quad \sum_s \left(\frac{\partial\alpha}{\partial q_s} \frac{\partial\beta}{\partial p_s} - \frac{\partial\alpha}{\partial p_s} \frac{\partial\beta}{\partial q_s} \right) = [\alpha, \beta]\,,$$

si avrà

$$(f)' \qquad (P_r\, Q_r) = -1\,,\ (P_r\, Q_{r'}) = 0\,,\ (P_r\, P_{r'}) = 0\,,\ (Q_r\, Q_{r'}) = 0$$
$$(f)'' \qquad [P_r\, Q_r] = +1\,,\ [P_r\, Q_{r'}] = 0\,,\ [P_r\, P_{r'}] = 0\,,\ [Q_r\, Q_{r'}] = 0\,.$$

Supponendo che Δ e D siano due caratteristiche di differenziazioni, che si riferiscano solo alle variabili P, Q, p, q, le equazioni (s) supposte fra queste 4_n variabili, verificano identicamente l'equazione fondamentale

$$\sum_s (\Delta p_s\, Dq_s - \Delta q_s\, Dp_s) - \sum_r (\Delta P_r\, DQ_r - \Delta Q_r\, DP_r) = 0$$

e perciò esprimendo Dp_s e Dq_s in funzione di DP_r e di DQ_r, avremo

$$\sum_s \left(\Delta p_s \frac{\partial q_s}{\partial P_r} - \Delta q_s \frac{\partial p_s}{\partial P_r} \right) + \Delta Q_r = 0$$
$$\sum_s \left(\Delta p_s \frac{\partial q_s}{\partial Q_r} - \Delta q_s \frac{\partial p_s}{\partial Q_r} \right) - \Delta P_r = 0\,.$$

Sviluppando ora ΔQ_r e ΔP_r secondo Δp_s e Δq_s e raccogliendo i termini, che hanno per fattori Δp_s e Δq_s, troveremo senz'altro le (f).

Se al contrario nelle due precedenti identità si sviluppano Δp_s e Δq_s secondo ΔQ_r, $\Delta P_{r'}$ e $\Delta Q_{r'}$ si troveranno senz'altro le $(f)'$.

Le $(f)'$ finalmente, per virtù delle (f), equivalgono alle $(f)''$.

21. Il teorema, che Jacobi disse *fondamentale*, equivale alla prima parte del precedente, cioè a quella che si riferisce alle equazioni (f), ma pel solo caso, in cui le equazioni date fra le $4n$ variabili siano semplicemente

$$p_s = \frac{\partial \varphi}{\partial q_s}, \quad -P_s = \frac{\partial \varphi}{\partial Q_s}.$$

Noi inoltre dimostreremo in seguito, che le (f) hanno per integrali le (s).

22. *Sia* τ_t *una variabile contenuta nelle funzioni* φ *e* ψ, *oltre le* q *e le* Q, *ed all'equazioni* (s) *e* (ψ) *del* n. 20 *si aggiunga*

$$(s)' \qquad H_t = \frac{\partial \varphi}{\partial \tau_t} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial_i \psi}{\partial \tau_t}.$$

Da queste e dalle (s) *ricavando*:
le p, q *ed* H *in funzione delle* P, Q, τ,
le P, Q *ed* H *in funzione delle* p, q, τ,
si verificheranno sempre (f), $(f)'$ *ed* $(f)''$; *e dippiù si avrà*

$$\frac{\partial p_s}{\partial \tau_t} - \frac{\partial H_t}{\partial q_s} = 0, \quad \frac{\partial q_s}{\partial \tau_t} + \frac{\partial H_t}{\partial p_s} = 0,$$
$$\frac{\partial P_r}{\partial \tau_t} + \frac{\partial H_t}{\partial Q_r} = 0, \quad \frac{\partial Q_r}{\partial \tau_t} - \frac{\partial H_t}{\partial P_r} = 0.$$

Ricavando invece dalle (s) *ed* $(s)'$:
le p, q *e* τ *in funzione delle* P, Q, H.
le P, Q *e* τ *in funzione delle* p, q, H
si verificheranno sempre le equazioni (f) $(f)'$ $(f)''$; *e dippiù si avrà*

$$\frac{\partial p_r}{\partial H} + \frac{\partial \tau}{\partial q_r} = 0, \quad \frac{\partial q_r}{\partial H} - \frac{\partial \tau}{\partial Q_r} = 0$$
$$\frac{\partial P_r}{\partial H} - \frac{\partial \tau}{\partial Q_r} = 0, \quad \frac{\partial Q_r}{\partial H} + \frac{\partial \tau}{\partial H} = 0.$$

Queste relazioni si ricavano osservando che dalle equazioni (s) ed $(s)'$ si ha

$$\sum_s (dp_s \delta q_s - dq_s \delta p_s) - \sum_r (dP_r \delta Q_r - dQ_r \delta P_r) + \sum_t (dH_t \delta \tau_t - dt_t \delta H_t) = 0,$$

e considerando le identità che ne derivano, quando le variabili di un sistema si sviluppano secondo le variabili di un altro sistema.

Molte altre relazioni analoghe alle precedenti si potrebbero d'altronde ricavare colla stessa facilità, cambiando diversamente le variabili nei due sistemi.

23. *Siano fra le* $4n$ *variabili*

$$p_1 \, p_2 \ldots p_n, \; q_1 \, q_2 \ldots q_n$$
$$P_1 \, P_2 \ldots P_n, \; Q_1 \, Q_2 \ldots Q_n$$

$2n$ *equazioni tali, che esprimendo per esse le variabili della prima linea in funzione di quelle della seconda, e viceversa, si abbia*:

$$(f) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q_s}{\partial Q_r} - \dfrac{\partial P_r}{\partial p_s} = 0, & \dfrac{\partial p_s}{\partial Q_r} + \dfrac{\partial P_r}{\partial q_s} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial q_s}{\partial P_r} + \dfrac{\partial Q_r}{\partial p_s} = 0, & \dfrac{\partial p_s}{\partial P_r} - \dfrac{\partial Q_r}{\partial q_s} = 0. \end{cases}$$

Le $2n$ equazioni fra le $4n$ variabili si potranno sempre ridurre alle seguenti:

$$(s)\qquad \begin{cases} p_s = \dfrac{\partial \varphi}{\partial q_s} + \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_s}, \\ -P_s = \dfrac{\partial \varphi}{\partial Q_s} + \sum_i \lambda_i \dfrac{\partial \psi_i}{\partial q_s} \end{cases}$$

φ e ψ esprimendo funzioni delle q e delle Q, e le λ essendo determinate in modo che in quell' equazioni siano comprese

$$\psi_1 = 0\,, \quad \psi_2 = 0, \ldots, \psi_k = 0\,.$$

Supponendo che Δ e D esprimano due catteristiche di defferenziazione che comprendano le sole variabili P, Q, p, q, moltiplichiamo le equazioni (f) della prima linea per Δp_s e $-\Delta q_s$ rispettivamente, e poi sommiamo col simbolo $\sum\limits_s$. Avremo

$$\sum_s \left(\Delta p_s \frac{\partial q_s}{\partial Q_r} - \Delta q_s \frac{\partial p_s}{\partial Q_r} \right) - \Delta P_r = 0\,,$$

e dalle altre due avremo in modo analogo

$$\sum_s \left(\Delta p_s \frac{\partial q_s}{\partial P_r} - \Delta q_s \frac{\partial p_s}{\partial P_r} \right) + \Delta Q_r = 0\,.$$

Moltiplichiamo ora la prima di queste due ultime equazioni per DQ_r e la seconda per DP_r e sommiamo col simbolo $\sum\limits_r$; avremo:

$$\sum_s (\Delta p_s Dq_s - \Delta q_s Dp_s) - \sum_r (\Delta P_r DQ_r - \Delta Q_r DP_r) = 0.$$

E questa riduzione, pel teorema fondamentale, basta a dimostrare il teorema enunciato.

VI. Trasformazioni dell'equazioni $y_r = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \sum\limits_i \lambda_i \dfrac{\partial \psi_i}{\partial x_r}$.

Il sistema di equazioni

$$(s)\qquad y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r}\,, \qquad \begin{pmatrix} r = 1, 2 \ldots n \\ i = 1, 2 \ldots k \end{pmatrix}$$

includente l'equazioni

$$\psi_1 = 0\,, \quad \psi_2 = 0\,, \ldots, \psi_k = 0\,,$$

soddisfa all'equazione fondamentale

$$(f)\qquad \sum_r (dy_r \delta x_r - dx_r \delta y_r) = 0\,.$$

Siccome tale equazione non muta, cambiando x_r in y_r, purchè y_r venga cambiato in $-x_r$, così soddisferà alla stessa equazione anche un sistema di questa forma

$$(s)'\qquad \begin{cases} y_{\alpha_1} = \dfrac{\partial \varphi'}{\partial x_{\alpha_1}} + \sum\limits_j \lambda'_j \dfrac{\partial \psi'_j}{\partial x_{\alpha_1}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{\alpha_m} = \dfrac{\partial \varphi'}{\partial x_{\alpha_m}} + \sum\limits_j \lambda'_j \dfrac{\partial \psi'_j}{\partial x_{\alpha_m}}, \\ -x_{\alpha_{m+1}} = \dfrac{\partial \varphi'}{\partial y_{\alpha_{m+1}}} + \sum\limits_j \lambda'_j \dfrac{\partial \psi'_j}{\partial y_{\alpha_{m+1}}}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ -x_{\alpha_n} = \dfrac{\partial \varphi'}{\partial y_{\alpha_n}} + \sum\limits_j \lambda'_j \dfrac{\partial \psi'_j}{\partial y_{\alpha_n}}; \end{cases}$$

ove gli indici $\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$ hanno valori diversi, e φ' e ψ' sono funzioni di

$$x_{\alpha_1}\ x_{\alpha_2} \dots x_{\alpha_m},\ y_{\alpha_{m+1}},\ y_{\alpha_{m+2}} \dots y_{\alpha_n}$$

e le λ' funzioni tali, che le $(s)'$ comprendano

$$(\psi') \qquad \psi'_1 = 0 \quad \psi'_2 = 0, \dots, \psi'_{k'} = 0 .$$

D'altra parte il sistema (s) è la soluzione più generale della (f), dunque esso include il sistema $(s)'$, ossia date le funzioni φ e ψ del sistema (s), si potrà trovare una funzione φ', ed un certo numero di funzioni ψ' tali, che il sistema (s) si trasformi in $(s)'$.

Ora dimostrerò che fra tutti i sistemi $(s)'$ ve n'ha sempre uno almeno, in cui il numero delle funzioni ψ' è nullo.

Si vede facilmente che per la dimostrazione dell'assunto, basta far vedere che l'equazioni (s) si possono risolvere rispetto ad n tra le variabili x ed y aventi tutte indici diversi. Ed infatti se le equazioni (s) si possono risolvere rispetto ad n variabili, tra le altre n variabili non può sussistere alcuna delle relazioni (ψ').

Primieramente è da osservare che, date n equazioni distinte fra $2n$ variabili, è sempre possibile risolverle rispetto ad n di esse [1]. Supponiamo adunque risolute le (s) rispetto ad n variabili qualsiansi, e siano queste:

$$(\alpha) \qquad x_{a_1}\ x_{a_2} \dots x_{a_m},\ y_{a_{m+1}},\ y_{a_{m+2}} \dots y_{a_n}$$

le quali perciò saranno funzioni delle altre, che potranno essere indicate con

$$(\beta) \qquad y_{b_1}\ y_{b_2} \dots y_{b_m},\ x_{b_{m+1}},\ x_{b_{m+2}} \dots x_{b_n};$$

e s'intenderà che gl'indici delle variabili di una stessa linea possono non esser diversi tra loro. Ora se nella prima linea vi è una coppia, o più, di variabili aventi il medesimo indice, per esempio

$$(\alpha)' \qquad x_{\alpha_1}\ y_{\alpha_1},\ x_{\alpha_2}\ y_{\alpha_2}, \dots$$

vi saranno necessariamente nella seconda linea altrettante coppie con uno stesso indice per esempio:

$$(\beta)' \qquad x_{\beta_1}\ y_{\beta_1},\ x_{\beta_2}\ y_{\beta_2}, \dots$$

[1] Questa proposizione non è evidente, ma si dimostra facilmente come segue. Siano n equazioni $H_1 = 0,\ H_2 = 0 \dots H_{2n} = 0$, fra le $2n$ quantità $z_1\ z_2 \dots z_{2n}$, e rappresentiamo in generale con

$$H\,(z_r,\ z_s \dots z_t) \text{ oppure con } K\,(z_r\ z_s \dots z_t)$$

espressioni in cui *non* entrino le variabili $z_r, z_s \dots, z_t$. Posto ciò risolviamo l'equazione $H_1 = 0$, rispetto ad una delle variabili che contiene, e che indicherò con z_1, e così otterrò $z_1 = K_1\,(z_1)$, e sostituendo questo valore nelle altre equazioni avrò il sistema

$$z_1 = K_1\,(z_1),\ H_2\,(z_1) = 0,\ H_3\,(z_1) = 0, \qquad \dots H_n\,(z_1) = 0$$

Poscia risolvo $H_2\,(z_1) = 0$ rispetto ad una delle variabili rimastevi, e sia z_2, così avrò in modo analogo il sistema:

$$z_1 = K_1\,(z_1\ z_2),\ z_2 = K_2\,(z_1\ z_2),\ H_3\,(z_1\ z_2) = 0 \dots H_n(z_1\ z_2) = 0.$$

E così procedendo innanzi avrò

$$z_1 = K_1\,(z_1\ z_2 \dots z_r),\ z_2 = K_2\,(z_1\ z_2 \dots z_r), \dots,\ z_r = K_r\,(z_1\ z_2 \dots z_r),$$
$$H_{r+1}\,(z_1\ z_2 \dots z_r) = 0,\ H_{r+2}\,(z_1\ z_2 \dots z_r) = 0, \dots H_n\,(z_1\ z_1 \dots z_r) = 0,$$

e finalmente

$$z_1 = K_1\,(z_1 \dots z_n),\ z_2 = K_2\,(z_1 \dots z_n), \dots,\ z_n = K_n\,(z_1\ z_2 \dots z_n).$$

Ma le equazioni (s) verificano identicamente la (f); onde sviluppando le variabili (α) in funzione delle variabili (β), e raccogliendo i termini, che avranno per fattore

$$dy_{\beta_1}\,\delta x_{\beta_1} - dx_{\beta_1}\,\delta y_{\beta_1}$$

troveremo

$$\sum_r \left(\frac{\partial y_{\alpha_r}}{\partial x_{\beta_1}} \frac{\partial x_{\alpha_r}}{\partial y_{\beta_1}} - \frac{\partial x_{\alpha_r}}{\partial x_{\beta_1}} \frac{\partial y_{\alpha_r}}{\partial y_{\beta_1}} \right) = 1;$$

e questa equazione ci dimostra, che tra le equazioni, che danno le $(\alpha)'$, vi sarà una coppia almeno, per es. quella che dà $x_{\alpha_1}\, y_{\alpha_1}$, le cui espressioni non potranno entrambe essere indipendenti da y_{β_1}. Perciò potremo scrivere

$$x_{\alpha_1} = \text{funzione di } y_{\beta_1},$$

oppure

$$y_{\alpha_1} = \text{funzione di } y_{\beta_1};$$

e dall'una o dall'altra di queste due equazioni ricavata y_{β_1}, questa variabile passerà nella categoria delle variabili (α) mentre x_{α_1}, oppure y_{α_1}, passerà nella categoria delle variabili (β).

Ora quello che si fa circa la coppia di variabili aventi l'indice comune β_1, potendo farsi su qualunque altra coppia delle $(\beta)'$, rimane dimostrato il teorema seguente:

Date n equazioni fra le $2n$ variabili

$$x_1\, x_2 \ldots x_n, \quad y_1\, y_2 \ldots y_n$$

della forma

$$(s) \qquad y_r = \frac{\partial \varphi}{\partial x_r} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_r},$$

dove φ e ψ sono funzioni delle x, e le λ determinate in modo da comprendere

$$(\psi) \qquad \psi_1 = 0, \quad \psi_2 = 0 \ldots \psi_k = 0,$$

tali $2n$ equazioni possono essere risolute rispetto ad n variabili, i cui indici sono tutti diversi, cioè: 1, 2 ... n; *e quindi si possono ridurre alla forma*

$$y_{\alpha_1} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_{\alpha_1}}, \quad y_{\alpha_2} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_{\alpha_2}}, \ldots, \quad y_{\alpha_m} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_{\alpha_m}},$$

$$-x_{\alpha_{m+1}} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y_{\alpha_{m+1}}}, -x_{\alpha_{m+2}} = \frac{\partial \varphi'}{\partial y_{\alpha_{m+2}}}, \ldots, -x_{\alpha_n} = \frac{\partial \varphi'}{\partial x_{\alpha_n}},$$

essendo φ' è una funzione delle variabili

$$x_{\alpha_1}\, x_{\alpha_2} \ldots x_{\alpha_m}, \quad y_{\alpha_{m+1}}, y_{\alpha_{m+2}}, \ldots y_{\alpha_n}.$$

Sul valore dinamico di una caloria.

Nota del Socio G. CANTONI e del dott. G. GEROSA

letta nella seduta del 5 marzo 1882.

PARTE I.

Esame di alcune precedenti sperienze.

1. Non è qui luogo di dimostrare che i filosofi, i fisici ed i matematici più assennati del passato, nel trattare della natura propria del calore, intravviddero una relazione molto intima fra il moto delle particelle costituenti i corpi ed il calore di questi. Codesto studio storico venne già in gran parte eseguito da parecchi espositori della moderna dottrina termodinamica. Perciò qui ci basterà ricordare soltanto le sperienze più notevoli, che valsero di fondamento a questa dottrina.

2. La teoria della materialità del *calorico* e della varia *capacità* dei corpi per esso aveva perduto ogni base razionale, dopo che Rumford, colle sue memorabili esperienze (1798), pose in chiaro che la quantità di calore, promossa da azioni meccaniche in un corpo solido, è indipendente dalle modificazioni di densità da esso subíte, e soltanto dipende dalla quantità del lavoro meccanico, impiegato a produrre le modificazioni medesime.

Non meno memorabili furono a questo proposito le esperienze del Davy (1799), il quale entro un ambiente a temperature inferiori a zero gradi ottenne la parziale fusione di due pezzi di ghiaccio, fra loro strofinantisi in opera di esterna azione motrice. Perciocchè, in tal caso, la caloricità dell'acqua liquida prodotta essendo notevolmente maggiore (presso che doppia) di quella dell'acqua solida ingeneratrice, più non potevasi attribuire la liquefazione dell'acqua stessa ad una variazione in meno nella *capacità calorica* della medesima, siccome solevasi supporre per ispiegare fatti analoghi colla teoria della materialità del calorico.

3. Eppure codeste esperienze, tuttochè ricordate in molti incontri, non valsero a rendere accorta la comune dei fisici della irrazionalità di una dottrina, ch'essi erano abituati a trovar pronta a spiegare a modo loro i fenomeni termici. — E neanche le posteriori, e pur tanto celebrate esperienze del Regnault (1847), le quali dimostravano essere la caloricità dell' unità di peso di un dato gas indipendente dalla varia sua densità, non valsero a porre in evidenza l'assurdo concetto della capacità calorica, variabile nei gas col variare di volume.

Fu necessario che il Joule (1844) le confutasse con più dirette esperienze, le quali dimostrarono serbarsi invariata la temperatura in una massa gassosa, nella quale si muti anche notevolmente il proprio volume, purchè nell'atto dinamico essa non produca alcun lavoro esterno.

4. E sebbene gli scritti teorici di Mayer, di Kroenig e di Clausius aprissero in quel torno di tempo (1842) un più sicuro orizzonte alla termodinamica, il principale merito della vittoria è dovuto alle pazienti e svariate indagini esperimentali dello stesso Joule (1845-1849), le quali provarono che, per qualunque via si ottenga la conversione in calore di un lavoro meccanico, il rapporto tra le grandezze di codeste due energie (energia cinetica ed energia termica) risulta sensibilmente costante. Anche le esperienze di Hirn (1858 al 1862), condotte con forme non meno svariate, diedero lo stesso risultamento. Anzi meritano speciale ricordo due forme di prove, non prima tentate, e che l'Hirn seppe condurre ingegnosamente a buon fine, quelle cioè per le quali venne estesa la predetta correlazione al lavoro della energia muscolare d'un animale, ed al lavoro delle motrici a vapore.

5. Dietro i mirabili risultamenti ottenuti da questi due valorosi propugnatori dell'intima correlazione e della perfetta equivalenza delle anzidette due forme di energia fisica, moltissimi furono gli scienziati che, con novelle esperienze o con nuove meditazioni matematiche, illustrarono i principî fondamentali della termodinamica, Talchè questi vennero senza più accolti anche nella fisica elementare.

6. Tuttavia se i principî, che diremo razionali, di questa dottrina della perfetta convertibilità a reciprocanza tra l' energia cinetica e l' energia termica, ed insieme della conservazione dell'energia totale, si possono ormai ritenere per incontrovertibili, rimane ancora qualche incertezza sul preciso valore del rapporto fra l'unità di misura dei lavori delle forze motrici e l'unità di misura delle quantità di calore: in quanto che, oggi ancora, le determinazioni dei più riputati fisici conducono a valori sensibilmente diversi pel detto rapporto.

7. Posto pure come saldo il principio della conservazione della energia attraverso una serie qualsiasi di modificazioni prodotte in un sistema, pare a noi che non convenga trasmodare in estensione nell'applicarlo a questa indagine fondamentale. Così crediamo che le determinazioni del valore dinamico di una caloria, fatte attraverso una serie di azioni meccaniche, elettriche, magnetiche e termiche, non ponno non incontrare difficoltà grandissime di esecuzione, e non poche fonti d'errore nelle rispettive determinazioni.

Laonde sembra miglior partito quello di attenersi alle forme più semplici di conversione delle due forme di energie fisiche, e di determinazioni sperimentali. Soltanto dopo che queste saranno ben messe in sodo, si potranno, con maggiore fiducia e con più di accorgimento, ritentare le vie più complesse, le quali, quando fossero condotte in ogni parte a dovere, devono pur metter capo ad un eguale risultamento.

8. Tra i varî processi finora seguiti per la determinazione del ripetuto rapporto, tenendo conto anche delle difficoltà esperimentali, quelli che a noi sembrano meglio concludenti, sarebbero i seguenti:

a) il processo usato da Joule, mediante lo strofinio di una ruota a palette, animata da un peso motore, contro un liquido, il quale serve pure da corpo calorimetrico; metodo recentemente ripreso e perfezionato dal Rowland;

b) il processo seguito da uno di noi [1], misurando l'aumento di temperatura

[1] *Su le variazioni di temperatura promosse nei liquidi da alcuni movimenti.* Nota di Gio. Cantoni. Rend. dell'Ist. lomb. maggio 1864.

verificantesi in una massa di mercurio, lasciata cadere da una data altezza, ed arrestata poi d'un tratto;

c) il processo immaginato dal Bartoli ([1]) di sfruttare, mercè opportuna resistenza, l'energia di pressione, provocata in un liquido, trasformandola in calore nell'interno di un calorimetro Bunsen;

d) la determinazione, in parte teoretica ed in parte sperimentale, del lavoro di espansione di un gas, che meglio soddisfaccia alle ideali condizioni di un perfetto fluido aeriforme, quale fu proposta da Mayer, Person e Bourget.

9. Il metodo di Joule, ne' modi da lui adoperati, è certamente abbastanza diretto quanto alla conversione di un' energia cinetica in energia termica, e quanto alla misura del lavoro motore sfruttato e del calore prodotto.

Tuttavia rimane qualche incertezza nella prima di queste determinazioni, quella relativa alla grandezza del lavoro motore, trasmesso all'asse di rotazione ed usufruito dalle palette urtanti il liquido. E d'altra parte l'aumento nella temperatura di quest'ultimo, risultando piuttosto piccolo (circa 0°,62 C.), ancorchè prodotto in un tempo abbastanza lungo, non riesce troppo sicura la correzione da introdursi nel risultato sperimentale, per lo scambio di calore fra il calorimetro ed i corpi circostanti. Oltre a ciò codesta determinazione presuppone l'esatta conoscenza della caloricità propria del liquido strofinato e del solido strofinante, nelle condizioni di temperatura dell'esperienza stessa.

Nondimeno il risultato medio di una serie di ben 40 esperienze, eseguite dal Joule nel 1849 col metodo anzidetto, gli diedero pel valore dinamico d'una caloria chilogrammetri 424,4, i quali, corretti col calcolo per quanto all'influenza dell'aria esterna ed alla produzione di un legger suono concomitante lo strofinio del liquido, vennero da lui ridotti a 772,6 libbre-piedi inglesi per 1° Fh., ossiano chilogrammetri 423,9 per 1° C. ([2]).

Non è molto che lo stesso Joule riprendeva nuove serie di prove (1877), perfezionando notevolmente l'apparecchio calorimetrico ed il misuratore del lavoro di strofinamento dell'acqua entro un vaso di ottone, e determinando con cura le correzioni dei termometri, il valore in acqua del calorimetro ed accessorî, e l'influenza della irradiazione e comunicazione di calore all'aria. Otteneva anche uno scaldamento molto più rapido e rilevante, cioè di 25° C. circa in 41'. Il risultato medio delle più attendibili serie di esperimenti, ridotto al livello del mare e alla latitudine di Greenwich ed al vuoto, corrisponde a piedi-libbre inglesi 772,55 per 1° Fh. ([3]), ossia chilogrammetri 423,8 per 1° C., valore quasi identico all'anzidetto.

Anche recentemente (1879) il Rowland, passando in rassegna diversi metodi impiegati per questa determinazione, stimò che il processo del Joule fosse preferibile agli altri; ma pensò di perfezionarlo, determinando la quantità di

([1]) *Apparecchio per la determinazione dell'equivalente meccanico del calore* di A. Bartoli. Memorie della R. Accademia dei Lincei, classe di scienze fisiche ecc. Vol. VIII, 1880.

([2]) Philosophical Transactions of the Royal Society, 1850, pag. 82.

([3]) Philosophical Transactions ecc., 1878, Part II, pag. 365.

lavoro impiegato, mediante il numero dei giri fatto in un dato tempo dalle palmette, foggiate e disposte in modo opportuno ed assai numerose, e mediante il momento d'una coppia, applicata ad impedire che il calorimetro, liberamente sospeso ad un filo di ferro, seguisse il movimento dell'interna ruota. Di tal modo l'aumento di temperatura ch'egli poteva determinare nel calorimetro per il tempo d'un'ora era da 35° a 45°.

Ora i risultati ottenuti dal Rowland accennerebbero ad una sensibile variazione, correlativa alla temperatura dell'acqua strofinata dalla ruota, avendo egli trovata la seguente serie di valori per l'equivalente dinamico d'una caloria in chilogrammetri:

			Δ
a	5°	429,8	
»	10°	428,5	1,3
»	15°	427,4	1,1
»	20°	426,4	1,0
»	25°	425,8	0,6
»	30°	425,6	0,2
»	36°	425,8	—0,2

E ciò, a suo avviso, in dipendenza della legge di variazione della caloricità dell'acqua, la quale, secondo tali sue esperienze, andrebbe scemando da 0 a 30°, toccando fra 30° e 35° un valor minimo ([1]).

Ma questa deduzione sarebbe in troppo aperta contraddizione con quanto risultò dalle sperienze di Regnault, di Pfaundler, di Hirn, di Jamin e di uno di noi ([2]), le quali mirano a dare per la caloricità dell'acqua un valor massimo verso 4° o poc'oltre.

E qui appunto si rivela uno degli inconvenienti sovra accennati pel metodo anzidetto, quello cioè dell'incertezza nella quale tuttora ci troviamo intorno alla legge di variazione nella caloricità dell'acqua.

Dopo i lavori di Münchlausen, di Baumgartner, e specialmente di Pfaundler, di Hirn, di Jamin, di Stamo e d'Henrichsen, che dimostrano essere codesta variazione abbastanza sentita e non proporzionale alla variazione di temperatura, riesce meno sicura la stessa definizione di *caloria*, cioè del modulo unitario della quantità di calore.

10. Passando ora ad esaminare il processo ideato dal Bartoli, dobbiamo anzitutto dichiararlo ingegnoso nel suo concetto fondamentale, quello cioè di riconoscere la quantità di calore prodotta in un liquido per la diretta conversione della sua energia barica in energia termica mediante l'attrito capillare. Ma d'altra parte l'impiego del calorimetro Bunsen per determinare una quantità di calore, che nelle esperienze dal Bartoli descritte valeva soltanto a spostar l'indice calorimetrico di circa 56^{mm} pur sotto una pressione di 7^{m} di mercurio, e la non breve durata di ciascuna di tali esperienze (da 30′ a 60′) ci lasciano in dubbio che i valori per tal modo attribuiti all'equivalente dinamico di una caloria (variabili fra 426,8 a 430,2

([1]) *On the mechanical equivalent of heat*, by Henry A. Rowland. Cambrige 1880.

([2]) *Sulla caloricità dell'acqua* ecc. del dott. G. Gerosa. Memorie della R. Accademia de' Lincei. Vol. X, 1881.

chm.) non abbiano quella sicurezza, che a prima giunta si potrebbe aspettare da codesto processo.

Non è qui il luogo di entrare in una minuta discussione sulle imperfezioni e sui pregi relativi del calorimetro Bunsen. Diremo solo che, nel caso delle presenti esperienze, alle incertezze già notate su la caloricità dell'acqua liquida, si aggiungono quelle del valore delle calorie di fusione del ghiaccio e quelle della densità del ghiaccio a zero, contenuto nell'insieme del recipiente calorimetrico, le cui variazioni in volume, colla fusione, servono di base all'apprezzamento calorimetrico. E qui devesi ancora considerare che, sebbene sia notevole la variazione nel volume dell'acqua corrispondente all'atto di fusione, siccome però il mercurio ha una caloricità tanto piccola (circa $^1/_{30}$ di quella dell'acqua), e siccome poi a fondere un grammo di ghiaccio si richiedono 80 piccole calorie, così il raffreddamento d'un grado in un grammo di mercurio non può fondere che $\frac{1}{30.\ 80} = \frac{1}{2400}$ di grammo d'acqua. Talchè sarà sempre più sensibile quel processo per cui direttamente si determina l'incremento di temperatura occorso nel mercurio, in relazione ad una data diminuzione nella sua energia cinetica, prodotta da una determinata resistenza.

Ed invero, quando si abbiano termometri molto sensibili e pronti, e quando si abbia modo di apprezzare direttamente l'aumento di temperatura prodottosi nel mercurio per una repentina diminuzione di velocità, il processo riuscirà più semplice, e suscettivo di molta approssimazione per il calcolo dell' equivalente dinamico del calore. Oltre di che, in tal modo, si eviteranno anche le suaccennate incertezze su la caloricità propria dell'acqua liquida, su le calorie di fusione dell'acqua solida, e sul vario grado di compattezza del ghiaccio calorimetrico.

11. Qualora poi, siccome noi proponiamo per tutte le indagini fisiche, si assumesse come liquido calorimetrico il mercurio stesso, già riconosciuto il più opportuno tra i liquidi come corpo termometrico, allora per la precedente determinazione basterebbe conoscere l'aumento di temperatura del mercurio per avere direttamente la quantità di calore prodotto in funzione della caloricità del mercurio stesso: poichè questa, per diverse ragioni, la si può ritenere molto meno variabile, almeno entro i limiti delle ordinarie temperature, che nol sia la caloricità dell'acqua.

E noi crediamo che, assumendo come *unità* delle quantità di calore (*caloria*) quella richiesta a scaldare di 1° l'unità di peso del mercurio, preso alla temperatura di 0°, si avrebbero due notevoli vantaggi. L'uno che il mercurio tiene certamente una legge di caloricità più semplice di quella dell'acqua, almeno per le temperature comprese fra 0° e 30°, e l'altro che la caloricità del mercurio (anche riferita a volumi eguali pei due liquidi) essendo notevolmente minore di quella dell'acqua (0,41) le variazioni di temperatura, prodotte dalla comunicazione di una data quantità di calore alla massa calorimetrica, saranno proporzionalmente maggiori; e quindi con maggior approssimazione si potranno calcolare le caloricità dei varî corpi, riferite a quella del mercurio.

Con questa proposta s' avrebbe anche il vantaggio di identificare i due liquidi tipi, assunti dai fisici come corpo termometrico, e come corpo calorimetrico.

12. Venendo ora al terzo dei suaccennati modi di determinazione del valore dinamico di una caloria, quello dedotto dal rapporto fra la caloricità di un gas a pressione costante C_s e quella a volume costante C_v, ed assumendo la relazione

$$p\,(C_s - C_v)\,E = P\alpha$$

dove p esprime il peso dell'unità di volume del gas, α il suo coefficiente di dilatazione, P la pressione sull'unità di superficie del gas, ed E l'equivalente ricercato, sarà

$$E = \frac{P\alpha}{p\,(C_s - C_v)}$$

Ora per l'aria si può ritenere

$$p = 1{,}2932$$
$$\alpha = 0{,}003665$$
$$C_s = 0{,}2373$$
$$C_v = 0{,}1685\ (^1)$$
$$P = 10332{,}9$$

e con questi valori si ottiene per l'aria

$$E = 424,\ 4 \text{ chilogrammetri.}$$

Per l'idrogeno si ha invece

$$p = 0{,}089578$$
$$\alpha = 0{,}0036613$$
$$C_s = 3{,}4090$$
$$C_v = \frac{C_s}{1{,}410} = 0{,}99127$$

assumendo per $\frac{C_s}{C_v}$ il valore 1,410 ritenuto da Cazin; per cui

$$E = 426{,}1.$$

Ora queste due determinazioni abbastanza discordi, rivelano come l'incertezza sussistente intorno all'esatta determinazione del rapporto fra le due caloricità si agiti entro tali limiti da esercitare ancora una notevole influenza sul valore così dedotto di E.

PARTE II.

Nostre esperienze.

1. *Ricerca del valore dinamico d'una caloria.* — Abbiamo più sopra avvertito che, posto pure come saldo il principio della conservazione delle energie attraverso una serie qualsiasi di modificazioni, sono tuttavia per crescere le difficoltà di ricerca

(1) Questo valore fu dedotto dal rapporto $\frac{C_s}{C_v}$ in base alla relazione $\frac{C_s}{C_v} = \left(\frac{V}{V_1}\right)^2$, dove V_1 è la velocità di propagazione del suono in metri, dedotta dalla formola teorica di Newton,

$$V_1^2 = g\,\frac{e}{d} = 280{,}0$$

e V il valore sperimentale della stessa velocità di questa propagazione nell'aria a 0°, che può ritenersi eguale a 332,37 per le più attendibili e recenti determinazioni.

Ora questo valor medio di V ci dà

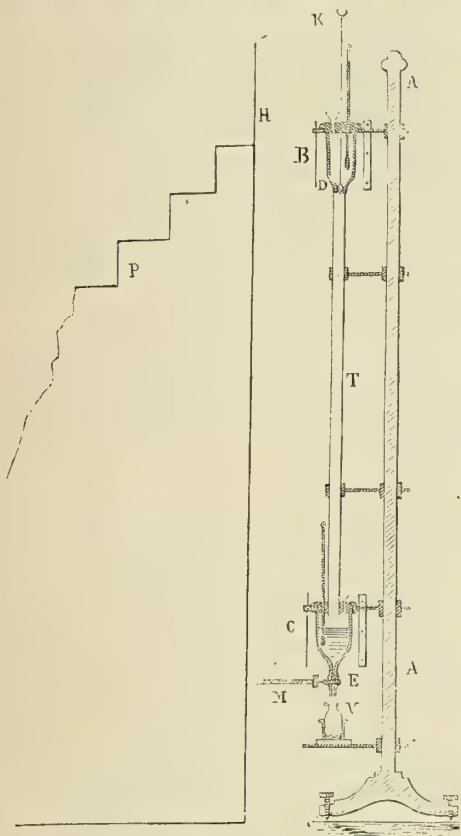
$$\left(\frac{V}{V_1}\right)^2 = \frac{C_s}{C_v} = 1{,}409.$$

e le fonti d'errore nella determinazione del valore dinamico di una caloria a misura che la serie medesima va rendendosi vieppiù complessa. Per tanto credemmo più sicura via quella di ricercare codesto valore colla forma più semplice e diretta di conversione delle energie fisiche. Tale ci parve quella ricordata sopra [parte I^a, 8 *b*)] e già adoperata da uno di noi. Procurammo però di evitare alcune difficoltà allora incontrate, e di migliorare possibilmente il processo, ne' modi che or passiamo a descrivere.

2. *Descrizione dell'apparecchio.* — Da un vaso cilindrico di vetro B (alto 23 cent. e del diametro di cent. 11,5), tenuto da un anello di ferro ricoperto con pelle di daino e fisso alla sommità di un robusto albero A di ghisa, si lasciava cadere per il proprio peso e per l'altezza di met. 2,225, lungo il tubo di vetro T, una massa di mercurio di circa 500 cm. c. (la quale veniva raccolta da un altro vaso C, simile a B e come quello disposto) e si misurava l'aumento di temperatura prodotto dall'arresto del moto di gravità del mercurio stesso.

Il vaso B era chiuso da un tappo di sughero, fornito dei fori necessarî per ricevere un termometro, un agitatore in ferro con manico d'ebanite (isolante per il calore), un imbuto di vetro per versare il mercurio, ed un'asticina K di ferro, munita all'estremo superiore d'un anello ed all'inferiore d'un cono d'ebanite, che entrava a perfetta chiusura nella tubulatura D, per la quale effluiva il mercurio dal vaso B. Il vaso C era pur chiuso da un tappo di sughero, che portava un ampio foro al centro, nel quale penetrava a stento il tubo T, ed uno piccolo laterale per ricevere un termometro. Al fondo del vaso era unita una tubulatura d'ebanite con chiave. Amendue i vasi poi erano protetti da un largo manicotto di lamina di ottone, sottile e tersa: e tutto l'apparecchio era posto in una stanza ben riparata, la cui temperatura per ogni serie di prove si manteneva pressochè costante, col favore di un cielo di continuo coperto.

3. *Modo di esperimentare.* — Si eseguivano due serie di prove al giorno. Però la sera pel mattino appresso, ed il mattino (dopo fatta una serie di prove) per la sera si preparava nei vasi l'opportuna massa di mercurio; cosicchè, al riprendere di ogni serie d'esperienze, tutto era alla stessa temperatura dell'ambiente.

In due si esperimentava. Uno saliva sul palco P (dove un ampio schermaglio H di metallo lucente difendeva l'apparecchio dal calore della persona) ed agitava il mercurio nel vaso superiore, leggendo contemporaneamente il termometro per mezzo d'una lente di sufficiente ingrandimento: l'altro, quando da un po' la temperatura

era costante, per mezzo dell'asta M apriva la chiave E, lasciava effluire il mercurio e leggeva mediante un cannocchiale da catetometro la temperatura del vaso inferiore data dal termometro, prima e dopo l'efflusso. — Appena cessato l'efflusso dal vaso inferiore e chiusa la chiave, veniva sollevata l' asta K e lasciato effluire il mercurio del vaso superiore, di cui s' era notata la temperatura all' istante dell' apertura. Quegli stesso, che leggeva il termometro superiore, scendeva a leggere l'inferiore, per evitare ogni errore personale; dacchè intercedeva un tempo più che sufficiente prima che cessasse l'efflusso. Del resto la temperatura del mercurio caduto non presentò mai una sensibile variazione, anche per letture successive tal quanto discoste fra loro.

Per un'altra prova il mercurio dianzi raccolto nel vaso V, che era rivestito in parte da una cassetta di legno, per evitare un sentito riscaldamento durante il trasporto, veniva versato nel vaso superiore; e poi, come in addietro, si procedeva.

E tornò facile il ricondurre a giusto segno la temperatura dei vasi, che da una prova all'altra veniva crescendo, coll'aggiungere piccole quantità di mercurio mantenuto a zero. Anzi, potendosi per tal mezzo disporre delle più piccole variazioni di temperatura, si ottenne di mettere l'esperienza nelle migliori condizioni, come appresso si dirà [1].

4. *Termometri.* — La temperatura era data da due termometri Baudin, a bulbo fusiforme e così lungo (6,5 cent.) da investire quasi tutta l'altezza del liquido. Questi erano bensì divisi soltanto in decimi; ma ogni grado misurava più che un centimetro dell'asta termometrica.

Essi erano stati dapprima con cura calibrati e confrontati fra di loro per ben tre mesi di continuo (dalla primavera all'estate), mentre stavano in un bagno, il quale variava ben lentamente nella temperatura col variare della stagione.

Si ebbe così mezzo di riconoscere che il vetro, ond'erano costituiti i due termometri, aveva una legge di dilatazione eguale per entrambi, almeno nel campo delle osservazioni fatte; imperocchè quasi costantemente differivano di $0^{\circ},02$ le temperature da essi segnate, tenuto conto della calibrazione particolare per ciascuno di essi. E si verificò altresì, raffreddandoli fino a zero da una stessa temperatura di 10°, di 15°, di 20°, di 25° e di 30°, che gli spostamenti dello zero erano in entrambi per ciascuna prova quasi eguali, per cui si poteva ritenere che veramente la legge di dilatazione del vetro per ambedue i termometri fosse la stessa, quando concordemente venissero passati da una temperatura all' altra.

D' altra parte invece risultò da un numero grandissimo di esperienze, opportunamente stabilite, che bastava variare la temperatura dai 10° ai 20° per l' un termometro in più cd in meno a differenza dall' altro, perchè essi non più si accordassero; cioè tosto dopo presentavano una differenza di $0^{\circ},01$ ed anche maggiore che non prima.

Ora nelle nostre esperienze i termometri non ebbero mai a variare più che di due gradi, e questa variazione fu fra i 6° e gli 8°, cioè a così bassa temperatura

[1] Amiamo qui render grazie al sig. Domenico Omodei, aspirante alla laurea in fisica, il quale prestò intelligente e premuroso aiuto nella massima parte delle esperienze or descritte.

che pur il confronto col termometro ad aria non avrebbe accennato una correzione sensibile.

S'aggiunga che quando non trattisi di determinare delle temperature assolute, ma soltanto, com'è nel caso nostro, di determinare con precisione delle piccole differenze di temperatura, basterà che i termometri, una volta calibrati con diligenza, presentino le stesse variazioni nel coefficiente di dilatazione del vetro che costituisce i loro bulbi, i quali aver devono altresì forma e dimensioni presso che uguali.

Temendo poi, nel caso nostro, che i termometri per la loro squisitezza avessero a subire delle variazioni col trovarsi a vicenda sotto la pressione di una notevole massa di mercurio, vennero paragonati frequentemente durante le esperienze.

Ma, siccome le circostanze erano sempre identiche per i due termometri, quando li si leggevano, e siccome si era verificato dapprima che i bulbi loro si modificavano egualmente per eguali pressioni, così nei diversi confronti soltanto lievi differenze si riscontrarono (delle quali si tenne tuttavia conto rigoroso), e non ci preoccupò il pensiero delle tante cautele che son necessarie per metter d' accordo due letture termometriche, nelle quali i termometri peschino in due fluidi di densità e di temperature notevolmente diverse.

5. Ora, nelle condizioni nostre, a modificare il risultato dell' esperienza non poteva intervenire che:

a) la resistenza dell'aria opposta al moto di gravità del mercurio;

b) l'influenza termica del vaso inferiore, ed

c) il disturbo nella distribuzione della temperatura lungo il tubo T, prodotto dalle due persone che conducevano l'esperienza.

6. *Resistenza dell'aria.* — Ma, nell'ipotesi che una colonna d'aria, eguale alla colonnina di mercurio in cammino, si muovesse continuamente, per quanto dura la caduta del mercurio medesimo, colla legge dei gravi cadenti e per lo spazio compreso fra il foro d' efflusso ed il centro di massa del mercurio contenuto nel vaso inferiore, la resistenza dell' aria sarebbe rappresentata da una quantità di calore 0,000003268, atta a riscaldare i 500 cm. c. di mercurio di appena 0°,000014; quantità che sarebbe compresa fra gli errori d'esperienza, ancor quando fosse cento volte maggiore.

7. *Influenza termica del vaso inferiore.* — Invece, come ora parrà chiaro, si può dire che i risultati dell'esperienza sono in diretta correlazione coll'influenza termica del vaso inferiore, che funge da recipiente calorimetrico, potendosi poi le non troppo sentite divergenze degli uni dagli altri attribuire alla ineguale distribuzione della temperatura dell'aria lungo il tubo T.

Di fatti, esaminando i dati qui sotto in diversi gruppi raccolti, dove A indica la temperatura del mercurio nel vaso superiore all'istante dell'efflusso; B la temperatura del mercurio nel vaso inferiore prima della caduta del mercurio dal vaso superiore; C la temperatura del mercurio nel vaso inferiore dopo la caduta, si è fatti accorti non solo della stretta relazione fra l'aumento di temperatura C-A, che va manifestando al termometro il mercurio dopo la caduta, e la differenza di temperatura A-B, che il vaso superiore tiene rispetto all'inferiore: ma ancora ci si rivela regolare accordo, ogniqualvolta si ripetano le stesse condizioni.

A	*B*	*C*	*A-B*	*C-A*
6°,829	6°,700	6°,925	0°,129	0°,096
6,067	6,925	7,145	0,142	0,078
7,326	7,205	7,405	0,121	0,079
7,843	7,725	7,900	0,118	0,057
7,958	7,841	8,011	0,117	0,053
8,072	7,940	8,110	0,132	0,038
7,107	6,975	7,200	0,132	0,093
7,290	7,145	7,370	0,145	0,080
7,465	7,325	7,525	0,140	0,060
7,624	7,485	7,685	0,139	0,061
7,743	7,625	7,800	0,118	0,057
7,873	7,755	7,930	0,118	0,057
8,012	7,880	8,075	0,132	0,063
8,112	8,000	8,160	0,112	0,048
8,222	8,085	8,270	0,137	0,048
		media	0°,129 ;	0°,064

A	*B*	*C*	*A-B*	*C-A*
7°,475	7°,380	7°,550	0°,095	0°,075
7,584	7,500	7,660	0,084	0,076
7,703	7,600	7,780	0,103	0,077
		media	0°,094 ;	0°,076

A	*B*	*C*	*A-B*	*C-A*
7°,161	7°,135	7°,290	0°,026	0°,129
7,082	7,060	7,210	0,022	0,128
6,522	6,500	6,660	0,022	0,138
6,680	6,660	6,810	0,020	0,130
		media	0°,022 ;	0°,131

A	*B*	*C*	*A-B*	*C-A*
6°,360	6°,350	6°,500	0°,010	0°,140
6,220	6,210	6,355	0,010	0,135
6,255	6,245	6,390	0,010	0,135
7,102	7,085	7,235	0,017	0,133
7,092	7,080	7,223	0,012	0,131
6,913	6,900	7,050	0,013	0,137
		media	0°,012 ;	0°,135

A	*B*	*C*	*A-B*	*C-A*
6°,545	6°,545	6°,700	0°,000	0°,155
6,540	6,540	6,685	0,000	0,145
6,320	6,320	6,457	0,000	0,137
6,417	6,410	6,564	0,007	0,147
6,433	6,430	6,578	0,003	0,145
6,958	6,950	7,100	0,008	0,142
6,779	6,770	6,920	0,009	0,141
6,804	6,800	6,934	0,004	0,130
7,037	7,030	7,170	0,007	0,133
		media	0°,004 ;	0°,142

A	*B*	*C*	*A-B*	*C-A*
6°,395	6°,400	6°,538	—0°,005	0°,143
6,915	6,920	7,060	—0,005	0,145
6,828	6,840	6,980	—0,012	0,152
6,290	6,300	6,430	—0,015	0,140
		media	—0°,009 ;	0°,145

A	*B*	*C*	*A-B*	*C-A*
6°,540	6°,610	6°,700	—0°,070	0°,160
6,600	6,670	6,750	—0,070	0,150
6,844	6,920	7,000	—0,076	0,156
6,893	6,970	7,048	—0,077	0,155
		media	—0°,072 ;	0°,155

E questo molto bene è messo in chiaro dal seguente specchio, dedotto dalla curva costruita coi valori dati dalle esperienze or ora riportate:

A-B	*C-A*	*A-B*	*C-A*	*A-B*	*C-A*	*A-B*	*C-A*
0°,130	0°,064	0°,070	0°,090	0°,010	0°,139	—0°,040	0°,149
0,120	0,065	0,060	0,097	0,000	0,143	—0,050	0,150
0,110	0,068	0,050	0,106	—0,010	0,145	—0,060	0,151
0,100	0,072	0,040	0,116	—0,020	0,146	—0,070	0,153
0,090	0,078	0,030	0,125	—0,030	0,148	—0,075	0,155
0,080	0,083	0,020	0,133				

8. Così essendo, appar chiaro come le cinquantasei esperienze citate nella seguente tabella, e dirette alla determinazione del valore dinamico di una caloria, siano state eseguite nelle migliori condizioni.

Tabella dei dati corretti di 56 esperienze.

1.ª Serie.

Numero delle esperienze	*A*	*B*	*C*	*A - B*	*C - A*
1.	6°,943	7°,013	7°,100	—0°,070	0°,157
2.	6,938	7,008	7,100	—0,070	0,162
3.	6,928	7,004	7,095	—0,076	0,167
4.	6,938	7,008	7,103	—0,070	0,165
5.	6,395	6,468	6,540	—0,073	0,145
6.	6,488	6,560	6,628	—0,072	0,140
7.	6,540	6,610	6,700	—0,070	0,160
8.	6,600	6,670	6,750	—0,070	0,150
9.	6,729	6,802	6,880	—0,073	0,151
10.	6,709	6,780	6,870	—0,071	0,161
11.	7,156	7,234	7,302	—0,078	0,146
12.	6,660	6,738	6,800	—0,078	0,140
13.	6,807	6,885	6,950	—0,078	0,143
14.	6,858	6,920	7,000	—0,062	0,142
15.	6,844	6,920	7,000	—0,076	0,156
16.	6,863	6,935	7,015	—0,072	0,152
17.	6,878	6,950	7,023	—0,072	0,145
18.	6,918	6,990	7,066	—0,072	0,148
19.	6,893	6,970	7,048	—0,077	0,155
20.	6,918	6,985	7,070	—0,067	0,152
21.	6,928	6,700	7,090	—0,072	0,162
22.	6,938	7,008	7,100	—0,070	0,162
			media	—0°,072 ;	0°,1537

2.ª Serie.

Numero delle esperienze	*A*	*B*	*C*	*A - B*	*C - A*
1.	6°,345	6°,425	6°,500	—0°,080	0°,155
2.	6,420	6,500	6,565	—0,080	0,145
3.	6,430	6,510	6,578	—0,080	0,148
4.	6,520	6,600	6,665	—0,080	0,145
5.	6,585	6,670	6,725	—0,085	0,145
6.	6,720	6,800	6,875	—0,080	0,155
7.	6,866	6,950	7,005	—0,084	0,139
8.	6,918	7,000	7,008	—0,082	0,162
9.	6,898	6,980	7,045	—0,082	0,147
10.	6,873	6,955	7,015	—0,082	0,142
11.	6,893	6,980	7,050	—0,087	0,157
12.	6,918	7,000	7,082	—0,082	0,164
13.	6,953	7,034	7,013	—0,081	0,160
14.	6,908	6,988	7,072	—0,080	0,164
15.	6,928	7,010	7,100	—0,082	0,172
16.	6,550	6,630	6,705	—0,083	0,158
17.	6,670	6,750	6,810	—0,080	0,140
18.	6,700	6,785	6,850	—0,085	0,151
19.	7,017	7,100	7,170	—0,083	0,153
20.	7,027	7,114	7,200	—0,087	0,173
21.	7,047	7,140	7,215	—0,093	0,168
22.	7,127	7,210	7,286	—0,083	0,159
			media	—0°,082 ;	0°,1546

3.ª Serie.

Numero delle esperienze	*A*	*B*	*C*	*A - B*	*C - A*	Temperatura dell'aria
1.	5°,830	5°,900	6°,000	—0°,070	0°,170	6°,30
2.	5,970	6,045	6,135	—0,075	0,170	6,34
3.	6,050	6,120	6,220	—0,070	0,168	6,37
4.	6,130	6,200	6,300	—0,070	0,170	6,40
5.	6,205	6,270	6,375	—0,065	0,166	6,43
6.	6,315	6,378	6,485	—0,063	0,165	6,45
7.	6,362	6,437	6,527	—0,075	0,170	6,46
8.	6,370	6,445	6,536	—0,075	0,170	6,47
9.	6,393	6,460	6,563	—0,067	0,170	6,48
10.	6,381	6,450	6,550	—0,069	0,170	6,50
11.	6,430	6,500	6,600	—0,070	0,165	6,53
12.	6,450	6,525	6,620	—0,075	0,170	6,55
			media	—0°,072 ;	0°,1687	

Perciocchè trovandosi il vaso inferiore ad una temperatura di 0°,075 maggiore rispetto a quella del vaso superiore, prima della caduta del mercurio, ed essendo all'incirca doppio (0°,157) l'aumento di temperatura, prodotto dalla conversione del moto di gravità del mercurio in moto termico, doveva in tal modo accadere che il vaso inferiore, al compiersi di ogni esperienza, cedesse nella prima metà del periodo di caduta al mercurio sopravegnente quella stessa quantità di calore, che poi il mercurio, nella seconda metà del periodo medesimo, cedeva al vaso.

9. Ed ora si può argomentare che, se fosse stato facile man tenere a temperatura costante l'aria entro il tubo T, ogni divergenza fra i diversi risultati sarebbe scomparsa. Però, siccome il valor medio dell'aumento C-A in 22 esperienze (0°,1537), eseguite con una differenza A-B eguale a 0°,072, non differisce dal valor medio di quello d'altre 22 esperienze (0°,1546), eseguite con una differenza A-B eguale a 0°,082, che di un millesimo di grado circa, dovuto, secondo la legge d'influenza termica del vaso, ad una differenza, nel primo caso in meno e nel secondo in più, fra la temperatura dei vasi, così non saremo lungi dal vero, ammettendo che la ineguale distribuzione di temperatura lungo il tubo fu corretta e compensata dal notevole numero di esperienze, eseguite in condizioni tali, per cui, talora appena superiore, talora appena inferiore, era la temperatura dell'aria nel tubo rispetto a quella del mercurio, il quale attraversava tutto lo spazio di m. 2,225 con una colonnina raccolta ed uniforme di mill. 3,6 di diametro.

10. E tanto non solo appare dall'andamento generale delle esperienze, ora prese in esame; ma è confermato in modo particolare dall'ultimo gruppo di dodici esperienze della precedente tavola. Questa serie di prove, essendo stata eseguita tutta di continuo, ha concesso di poter riconoscere, come si comporti il risultato dell'esperimento in corrispondenza al variare della temperatura dell'ambiente all'intorno del tubo. Infatti, se confrontiamo i numeri della colonna che dà la temperatura dell'aria con quelli della colonna A, notiamo che presso a poco di pari passo vanno crescendo da una ad altra esperienza, sempre però tenendosi quelli dell'aria di alquanto superiori (donde quindi un valore più alto per C-A), e che quindi con mirabile costanza l'esperienza dà sempre lo stesso valore per C-A.

11. Per ciò non si è creduto opportuno di tralasciare il medio valore di queste ultime prove, sebbene sia tal quanto superiore ai medî valori degli altri due gruppi. Ma lo si mise in calcolo con questo criterio, che, se il valor medio di ciascuno dei primi due gruppi si fosse ripetuto ventidue volte, quello di quest'ultimo avesse a ripetersi dodici volte.

Quindi, per le nostre esperienze, si ritenne che

$$\frac{22 \,.\, 0{,}1537 + 22 \,.\, 0{,}1546 + 12 \,.\, 0{,}1687}{22 + 22 + 12} = 0{,}1573$$

fosse l'aumento C-A di temperatura, che meglio si approssima al vero.

12. Ora se p è il peso del mercurio impiegato nell'esperienza ed s lo spazio percorso, il lavoro eseguito dal mercurio nella caduta sarà ps; dove s nel nostro caso è lo spazio, misurato esattamente, che intercede fra i centri di massa del mercurio contenuto nei due vasi.

D'altronde, se t è l'aumento C-A di temperatura, dovuto alla conversione del moto di gravità del mercurio in moto termico, e se, per le varie considerazioni suesposte (parte I^a. 11), la caloricità del mercurio viene assunta come l'unità di misura delle caloricità relative dei corpi, sarà pt la quantità di calore prodotto, corrispondente al lavoro ps.

Cosicchè, detto E il valore dinamico di una caloria, sarà

$$Ept = ps;$$

donde

$$E = \frac{s}{t}.$$

Quindi per le nostre esperienze il valore cercato di E risulta eguale a

$$\frac{2,225}{0,1573} = 14,145,$$

cioè *una caloria*, riferita al mercurio, può produrre un lavoro di chilogrammetri $14 + \frac{1}{7}$. E ponendo $A = \frac{1}{E}$, il valore calorimetrico dell'unità di lavoro (del chilogrammetro), sarebbe espresso da $A = \frac{1}{14,125} = 0,0707$.

13. Se ora poi vogliamo il valore di E in funzione dell'unità di calore riferita all'acqua, sarà

$$E = \frac{s}{ct},$$

dove c rappresenta la caloricità del mercurio rispetto all'acqua.

14. *Caloricità del mercurio.* — Il mercurio usato nelle esperienze era stato dapprima purificato per bene col bicromato di potassio.

Di esso non fu determinato il peso specifico, perchè questo non doveva essere introdotto nell'espressione che valuta E, mentre invece ne fu determinata, con tre serie di prove, la caloricità. La prima sovra una porzione di mercurio messa in disparte innanzi le esperienze; la seconda sovra una porzione del mercurio che aveva servito per circa metà corso delle esperienze, e la terza sovra una porzione del mercurio che aveva servito per l'intiero corso delle medesime. E ciò, non perchè durante le prove avesse il mercurio accennato, almeno nell'aspetto, alla minima ossidazione, ma presupponendo che avesse assorbito tal poco d'umidità.

Diffatti, come valori medî di ciascuna delle tre serie di prove fatte s'ebbero i numeri

0,033065
0,033328
0,033732;

dove appunto le differenze, che essi tengono, sono probabilmente da attribuirsi all'umidità assorbita dal mercurio durante l'insieme delle esperienze.

La determinazione della caloricità del mercurio fu eseguita col calorimetro ad acqua. Cioè in un vaso calorimetrico, contenente circa un litro d'acqua alla temperatura di 22°, si veniva immergendo un fascio di tubicini di vetro sottilissimo (45 gr. di vetro bastavano a contenere circa 1 kilog. di mercurio) dianzi riempiti di mercurio e suggellati alla lampada. I tubicini, prima di essere chiusi, furono sottoposti alla campana della macchina pneumatica per ispogliare d'aria il mercurio, e prima di essere introdotti nel calorimetro erano tenuti immersi per ben un' ora in un bagno di mercurio, predisposto in un altro vaso calorimetrico, cui si lasciava assumere la temperatura dell'ambiente, ch'era di circa 11°. Così durante il rapido trasporto dall'uno all'altro vaso calorimetrico, che si eseguiva mediante un filo di seta, col quale i tubicini erano legati per un estremo, si poteva ritenere che nessuna variazione di temperatura essi dovessero subire, attraversando un ambiente che aveva la stessa temperatura del bagno da cui venivano tolti.

In questa determinazione furono seguite tutte le precauzioni usate nello studio della caloricità dell' acqua, ed i risultati furono corretti rispetto alla caloricità di questa, secondo la legge ivi trovata [1].

[1] Vedi Memoria succitata del dott. G. Gerosa. Accademia de' Lincei, vol. X, 1881.

15. Ed ora, se per c poniamo nella relazione

$$E = \frac{s}{c\,t}$$

il medio valore « 0,033375 » dei tre numeri sovradetti

0,033065, 0,033328, 0,033732,

e ricordiamo che $s = 2,225$ e $t = 0,1573$, si ottiene

$$E = \frac{2,225}{0,033375 \,.\, 0,1573} = 423,82.$$

Questo valore di E si avvicina in singolar modo a quelli avuti da Joule (parte I. 9), i quali darebbero 423,85. Differisce pur di poco da quello calcolato in base alla caloricità dell'aria atmosferica ed alla velocità di propagazione del suono in essa, e si avvicina altresì ai valori delle più attendibili esperienze di Hirn sullo schiacciamento del piombo ($E = 425$) e sul perforamento dei metalli ($E = 425$), non che all'altro di Joule sul calore prodotto dallo strofinio di due dischi di ferraccio ($E = 424,6$).

16. Un'obbiezione seria però, che noi stessi muoviamo alla nostra ricerca, è che l'incremento di temperatura, prodotto dalla conversione del moto di gravità del mercurio in moto termico, risulta molto piccolo; talchè, riguardato $E = \frac{s}{c\,t}$ una funzione delle due variabili c e t, il differenziale

$$dE = -\frac{\partial\left(\frac{s}{ct}\right)}{\partial t}\,dt + \frac{\partial\left(\frac{s}{ct}\right)}{\partial c}\,dc$$

$$= -\left[\frac{s}{t^2 c}\,dt + \frac{s}{t\,c^2}\,dc\right]$$

per $dt = 0,002$ e $dc = 0,00005$, assume il valore

$$d\,E = -\,6,0236,$$

essendo

$$s = 2,225$$
$$t = 0,1573$$
$$c = 0,033375:$$

ossia, nell'ipotesi che si fosse commesso l'errore di 0°,002 nella valutazione del valor medio C-A, desunto dalle 56 esperienze surriportate, e l'errore di 0,00005 sulla caloricità del mercurio, il valore di E dovrebbe essere di 6,0236 maggiore o minore di quello più sopra determinato. Ed ancor quando fosse assunto costante c, sarebbe

$$d\,E = -\,5,3887.$$

17. Tuttavia è nostra convinzione, fondata segnatamente sull'ultima succitata serie di 12 esperienze, che assai probabilmente il valore di E, dietro più rigorose prove, debba piuttosto riuscire un po' inferiore, anzi che superiore ai 424 chilogrammetri. Talchè i valori summenzionati, trovati dal Bartoli e dal Rowland, ci sembra che debbano essere un po' superiori al vero.

Sul Trias della regione occidentale della Sicilia.

Memoria del Socio corrisp. GAETANO GIORGIO GEMMELLARO

letta nella seduta del 6 giugno 1880.

(con cinque tavole)

I.

I terreni mesozoici della regione occidentale della Sicilia occupano un' area molto estesa, e ne formano la parte più rupestre e pittoresca. Partendo dalle Madonie, essi si dividono a un dipresso a guisa di un V, spingendosi, con un ramo lungo la costa settentrionale della Sicilia, e coll'altro attraversando il centro della provincia di Palermo e il circondario di Bivona, e prolungandosi fino alla montagna di s. Calogero di Sciacca.

Fanno parte del lato littoraneo di questo V la rupe di Cefalù, la montagna di s. Calogero e il castello di Termini-Imerese, le montagne di Trabia, il monte Cane, le torri di Termini e i monti Catalfano, Giancagno e Consona di Bagheria. Appartengono pure a questo lato il gruppo dei monti del Mezzagno e quello di s. Martino, il monte Gallo e il monte Pellegrino (Palermo), e poi il monte Inici, la montagna Grande di Calatafimi, l'esteso gruppo dei monti di Castellammare e s. Vito, e il monte s. Giuliano.

Il lato interno viene costituito dal monte di Cammarata, dal monte Cassaro di Castronuovo, dalla montagna del Casale, dai monti e dalle rupi dei dintorni di Prizzi e di Palazzo Adriano, dal monte Irione, dalla montagna della Madonna del Bosco, dal gruppo dei monti di Bivona e Caltabellotta, dal monte Tartara, e dal monte s. Calogero di Sciacca.

Taluni picchi di questi monti, nelle Madonie, sono molto elevati, come quello d'Antenna e quello Carbonara, alzandosi, il primo, 1975 m. e il secondo, 1977 m. sopra il livello del mare. In tutti gli altri siti essi non arrivano a quest'altezza, ma pur non di meno sono molto elevati: infatti il monte s. Calogero di Termini-Imerese è alto 1325 m., il monte Cane 1224 m., il monte di Cammarata 1578 m., il monte Giblimese del gruppo di s. Martino 1203 m., il monte Irione 1214 m., il monte Inici 1054 m., e il monte Asparagio del gruppo di Castellammare 1109 m.

Questa gran massa di rocce fu per lungo tempo riferita ad unico periodo geologico, venendo considerata or come cretacea ([1]), or come giurese ([2]), or come di

([1]) Hoffmann, *Uebersicht der geognostischen Verhältnisse von Sicilien* (Arch. für Min., Geol., u. s. w). Berlin 1839.

([2]) Costant Prévost, *Profil général du sol de la Sicile* etc. (Bull. de la Soc. géol. de France. t. 2) Paris 1832. — Carlo Gemmellaro, *Sul terreno giurassico della Sicilia* (Atti dell'Accad. Gioenia delle scienze naturali di Catania. ser. I, t. 13. — Neues Jahrbuch für Min., Geol., und Petr. Stuttgart 1836 — *Elementi di geologia* Catania 1840).

transizione [1]; ma ciò arbitrariamente, perchè la guida di questo giudizio era soltanto il carattere petrografico. Nessuna parola era stata mai detta sulla disposizione e sull'andamento stratigrafico di queste rocce, e nessuna sopra i loro fossili.

Dopo molti anni di osservazioni e di ricerche, e dopo varî tentennamenti sull'età e sulla delimitazione di queste rocce, ho provato con una serie di pubblicazioni [2] che esse, invece di appartenere ad un sol piano geologico, contengono non solo quasi tutti i piani geologici cretacei, giuresi e liassici che si conoscono nella provincia mediterranea, ma racchiudono ancora alcuni lembi dell'eocene inferiore e medio. Talchè oggi si sa che in queste rocce si trova della serie cretacea: il turoniano, il cenomaniano, l'urgoniano e il neocomiano; della giurese: il titonio inferiore, gli strati ad *Aspidoceras acanthicum*, la zona a *Peltoceras transversarium*, la zona a *Stephanoceras macrocephalum*, la zona a *Posidonomya alpina* e gli strati ad *Arpoceras opalinum;* e della serie liassica: il lias superiore, gli strati a *Terebratula Aspasia* ed il lias inferiore. Inoltre si conosce d'ognuna di queste zone e di questi gruppi di strati i varî aspetti petrografici, la estensione geografica, gli accidenti stratigrafici, e quel che è più interessante, i documenti paleontologici in un modo estesissimo.

Però questi piani geologici non costituiscono tutta la gran massa delle rocce mesozoiche della regione occidentale della Sicilia. Anzi la parte predominante e fondamentale era fino a pochi anni addietro ancora un' incognita. Di essa, non essendosi trovato nessun elemento paleontologico, e le rocce più giovani, che vi poggiano di sopra, essendo d'aspetto petrografico variabilissimo, d'età diversa e fra di loro con grandi lacune, riusciva difficile determinare l'epoca geologica, alla quale doveasi riferire. Ma dopo la scoverta della ricca fauna nella più antica delle rocce liassiche, essendomi convinto che il calcare cristallino del monte del Casale e di Bellampo appartiene al lias inferiore, veniva naturale il supporre che le rocce sottostanti doveano essere più antiche; ed infatti dopo lunghe ricerche, sono arrivato a scoprirvi dei resti organici che le fanno riconoscere di età triassica.

La scoverta del trias fossilifero in Sicilia ha una grande importanza, non solo per la sua geologia, ma ancora per quella dei terreni mesozoici dell'Italia continentale, e c'è da sperare che questa scoverta, come quella di molti piani geologici eminentemente fossiliferi della Sicilia, potrà servire a stenebrare la non ben conosciuta geologia dei terreni mesozoici degli Appennini e quella delle Alpi lombarde e venete, le quali, sebbene siano state da lungo tempo studiate da illustri geologi nazionali ed esteri, pur non di meno, per la grande estensione del suolo, il diverso aspetto delle rocce e le insuperabili difficoltà del terreno, lasciano non poche quistioni *sub judice.*

[1] Daubeny, *Sketch of the geology of Sicily* The Edinb. philos. Journ. t. 13. 1825 — A descript. of active and estinct volcanos 1° edit. London. — Scinà, *Topografia di Palermo e dei suoi contorni*, Palermo 1818. — Brocchi, *Sulle diverse formazioni di rocce della Sicilia* (L'iride, giornale di lettere ed arti per la Sicilia. Palermo 1822).

[2] G. G. Gemmellaro, *Studî paleontologici sulla fauna del calcare a Terebratula janitor del Nord di Sicilia.* Palermo 1868-1876. — Idem, *Sopra alcune faune giuresi e liassiche di Sicilia, studi paleontologici.* Palermo 1872-1881. — Idem, *Sui terreni cretacei della Sicilia.* Giornale di scienze naturali ed economiche, t. XIII, p. 19. Palermo 1878.

Le rocce triassiche in questa regione della Sicilia formano, come si è detto, la parte fondamentale e predominante dei terreni mesozoici. Esse compariscono alla base della grande faglia settentrionale e delle altre trasversali dell'isola, e trovandosi fortemente scontorte, più volte fratturate ed estesamente denudate, affiorano a salti, or sotto forma di monti, in gruppi o isolati, or sotto quella di rupi ed or sotto quella di burroni fra di loro più o meno distanti. Le altre mesozoiche più giovani vi si trovano addossate in mille modi, qui mostrandosi più o meno estese nelle loro sinuosità, là poggiandovi sul declivio, ed or ricoprendole intieramente e seguendone le ondulazioni, ed or mancando completamente. Le rocce terziarie, invece, che occupano generalmente le pianure e le vallate, si estendono nella parte più bassa delle loro sinuosità, e qualche volta giacciono in lembi staccati su di esse e strangolati e serrati nei loro ripiegamenti.

Le rocce triassiche, essendo estesamente denudate, rarissime volte si trovano fra di loro sovrapposte; però, studiandole in diverse contrade, riesce facile stabilire la loro serie cronologica.

A s. Elia, piccola borgata di santa Flavia, che sorge a N-E del monte Catalfano, le acque del Tirreno s'infrangono contro potenti strati di calcare compatto, tenace, cristallino, bianco tendente leggermente al grigio o al rossastro, macchiato o venato in nero e non di rado brecciforme a cemento di color rosso-mattone. Questi strati stanno diretti da N. a S. con inclinazione ad Ovest, poggiandovi sopra una potente e grande massa di dolomia che forma quasi intieramente il monte Catalfano.

In questo calcare i fossili sono estremamente rari; soltanto sopra quelle parti, che sono state per lungo tempo esposte all'azione degli agenti esterni, spuntano fuori alcuni avanzi di *encrini*, e di *cidaridi* che pel cattivo stato di conservazione, riesce impossibile di determinare.

Se si eccettua questa contrada, ove al di sotto della dolomia comparisce questo calcare, in tutti gli altri siti della regione occidentale della Sicilia, la roccia fondamentale è la dolomia.

Questa dolomia è bianca o cenerina, oppure bianca tendente al grigio-ceruleo o al roseo. Come varia pel colorito, essa è variabile ancora pella struttura e pella potenza, trovandosi ora polverulenta, ora cavernosa, ora brecciforme ed ora cristallina, e là mostrandosi immensamente sviluppata in spessezza e qua ridotta soltanto a pochi metri. Essa è raramente ben stratificata, ed è per lo più informe, principalmente quando domina la sua struttura polverulenta o brecciata. Questa roccia è molto estesa longitudinalmente: infatti si trova alle Madonie, a monte s. Calogero di Termini-Imerese, a monte Cane, alle torri di Termini, ai monti di Trabia, ai monti Catalfano, Giancagno e Consona, nel gruppo dei monti del Mezzagno e di s. Martino, ai monti Gallo e Pellegrino (Palermo) e nell'esteso gruppo dei monti di Castellammare e s. Vito, non che nel gruppo dei monti di Caltabellotta e Bivona, della quale dolomia sono essi in parte o intieramente formati.

In questa roccia, se non mancano completamente i fossili, di certo sono rarissimi. Dopo molti anni di ricerche mi è stato dato soltanto di trovare in Boccadifalco presso Palermo due *pelecypodi* ed una *Rhynchonella* che non si prestano, pel loro cattivissimo stato, ad una esatta determinazione.

Al di sopra di questa dolomia vi poggiano degli strati di calcare compatto, omogeneo, non di rado venato da spato calcare con liste e noduli di selce cornea. Esso è a frattura concoidale e a grana più o meno fina, presentandosi or bianco, or bianco tendente al grigio, ora al giallo sbiadito, e non raramente bianco tendente al roseo, oppure di color grigio oscuro. Questi calcari ordinariamente variano in potenza secondo la preponderanza della sottostante dolomia, mostrandosi in strati numerosi ove la dolomia manca oppure affiora per pochi metri, ed assottigliandosi in que' siti in cui questa roccia è dominante. Essi, infatti, nella contrada Madonna del Balzo del monte Irione e lungo il fiume di s. Calogero alla montagna Rosmarino, arrivano a prendere la potenza di circa 300 a 350 m., invece in molte altre contrade, come per esempio a monte Catalfano e alla contrada sant'Anna del gruppo dei monti di s. Martino, vengono rappresentati da un numero piuttosto sparuto di strati.

La loro estensione longitudinale è molto considerevole; essi stanno direttamente sovrapposti alla dolomia a monte s. Calogero di Termini-Imerese, e di là si estendono alla montagna di Rosmarino, a quelle di Trabia, alle torri di Termini, alla montagna del Cane e ai monti di Giancagno e Catalfano. Essi si vedono poggiare pure sulla dolomia delle montagne di Misilmeri, Villabbate e della contrada Grazia presso Parco (gruppo dei monti del Mezzagno), alla contrada sant'Anna (gruppo dei monti di s. Martino), al monte Asparagio (gruppo dei monti di Castellammare) ecc. In altri punti però non compare sotto di essi la dolomia, come alla contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo, alla contrada Madonna del Balzo del monte Irione e in alcuni dei monti dei dintorni di Prizzi e Palazzo Adriano.

Ordinariamente fra gli strati di questi calcari non vi sono intercalate altre rocce. Però in alcune contrade, come per esempio, lungo il vallone della Pernice di s. Calogero di Termini-Imerese e nella contrada Giardinetto presso Trabia vi si trovano intercalati degli scisti argillosi fissili, di color grigio, talvolta tendente a quello dell'ardesia, oppure al rossastro. In altri luoghi, come al vallone Friguredda presso Termini-Imerese, fra questi calcari alternano, per molti metri di spessezza, calcari argillosi, tenaci, quasi cornei e nerastri, venati da spato calcareo bianco con scisti argillosi fissili di color d'ardesia, oppure rossastri, o giallastri. In altri siti, invece di scisti, fra alcuni strati di calcare a noduli di selce cornea si trovano o alternano degli strati di dolomia.

Questi calcari da per tutto sono eminentemente fossiliferi; in essi però, meno della *Daonella styriaca* Mojs. e del *Pinacoceras* cfr. *perauctum* Mojs., tutti gli altri fossili sfortunatamente sono indeterminabili, oppure appartengono a specie nuove, quindi riesce difficilissimo conquagliare i varî livelli di questa roccia con le diverse zone geologiche di altre contrade.

Alla Portella del Fico presso Parco (gruppo dei monti del Mezzagno) questi calcari a circa sette metri al di sopra della dolomia, contengono:

Posidonomya gibbosa Gemm.
Halobia Curionii Gemm.

In contrada Giardinetto presso Trabia:

Halobia sicula Gemm.
» *subreticulata* Gemm.

Nella Montagna della Madonna della Scala, presso Palazzo Adriano:

Halobia subreticulata Gemm.
» *insignis* Gemm.
» *sicula* Gemm.
Daonella styriaca Mojs.

Nella Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo; negli strati superiori si trova:

Halobia subreticulata Gemm.
» *sicula* Gemm.
Posidonomya lineolata Gemm.

e negli inferiori:

Halobia radiata Gemm.
Daonella lenticularis Gemm.
Halorites sp. del gruppo dell'*Hal. semiplicatus* Hauer sp.

Il monte Irione, nella contrada Madonna del Balzo, lungo la strada provinciale che da Corleone porta a Giuliana, è tagliato a picco, e ad una certa altezza del burrone presenta il santuario, il quale si può scegliere come limite delle diverse altezze, donde provengono i fossili. Nella parte inferiore di questo burrone, fino a circa 15 m. al di sotto del santuario, i varî strati di quel calcare contengono una gran quantità di esemplari dell'*Halobia Mojsisovicsi* Gemm., i quali nel livello più basso sono accompagnati da una specie di *Juvavites*. Superiormente a questo assieme di strati, fino a circa 5 m. sopra il santuario si trovano:

Halobia mediterranea Gemm.
» *Curionii* Gemm.
» *Beneckei* Gemm.
Posidonomya affinis Gemm.
» *gibbosa* Gemm.

Al di sopra del burrone, nel piano del Cervo gli strati contengono:

Halobia subreticulata Gemm.
» *Curionii* Gemm.
» *Beneckei* Gemm.
» *insignis* Gemm.
Posidonomya lineolata Gemm.
» *fasciata* Gemm.
Posidonomya gibbosa Gemm.
Pinacoceras cfr. *perauctum* Mojs.
Arcestes aff. all'*A. periolcus* Mojs.
» *sp.* del gruppo dell'*A. colonus* Mojs.

Finalmente negli strati della contrada Neviera, che è la parte culminante del monte Irione, si rinviene:

Monotis limaeformis Gemm.
» *rudis* Gemm.
» *Stoppanii* Gemm.

le quali si trovano ancora in grande quantità nella parte superiore di monte Gallo presso Prizzi.

Gli scisti argillosi contengono anch'essi numerosi fossili. In quelli del vallone della Friguredda presso Termini-Imerese il mio egregio amico prof. Ciofalo ha trovato miriade di esemplari della *Estheria Ciofaloi* Gemm. e ultimamente io vi ho scoverto un' altra *Estheria* e un *Trachyceras* sp. aff. al *Trach. senticosum* Dtm. sp.

assai mal conservato ([1]). Negli altri della contrada del vallone della Pernice (montagna di s. Calogero di Termini-Imerese) è comune la *Posidonomya elegans* Gemm.

In alcune contrade, come alla Portella del Fico, monte Grifone, monte Giancagno, montagne di Trabia e monte S. Calogero di Termini-Imerese, sopra questi calcari con noduli di selce cornea poggia in concordanza una dolomia con noduli di selce cornea o senza. Essa è cristallina, di color bianco-grigiastro e ordinariamente poco potente. I fossili vi sono rarissimi, riducendosi a due sole valve della *Daonella Lepsiusi* Gemm., che ho trovato sul versante orientale del monte Grifone (gruppo dei monti del Mezzagno).

Finalmente corona la serie delle rocce triassiche un' altra dolomia che ordinariamente manca di noduli di selce cornea. Essa è bianco-grigia, cristallina ed a frattura irregolare: non è ordinariamente molto potente, nè estesa molto longitudinalmente, anzi limitatissima, e si rinviene a lembi staccati in concordanza con la roccia precedente. Essa trovasi alla contrada Portella del Fico, monte Grifone (gruppo dei monti del Mezzagno) e a monte S. Calogero di Termini-Imerese. In questa dolomia, a monte Grifone, ho trovato alcune *Rhynchonelle* del tipo della *Rhynchonella pedata* Bronn., una *Spirigera* del tipo della *Spirigera oxycolpos* Emmr. e diversi *pelecypodi*, che atteso il loro cattivo stato di conservazione non si prestano ad un'esatta determinazione.

I fossili che si conoscono nelle rocce del trias della parte occidentale della Sicilia sono dunque i seguenti:

a) Calcare di S. Elia, borgata di S. Flavia:

Encrinus sp. ind. — *Cidaris* sp. ind.

b) Dolomia inferiore:

Rhynchonella sp.

c) Calcare a noduli di selce cornea e scisti subordinati:

Estheria Ciofaloi Gemm.
Trachyceras sp. aff. al *Trach. senticosum* Dtm. sp.
Arcestes sp. del gruppo dell' *Arc. colonus* Mojs.
Arcestes sp. aff. all'*Arc. periolcus* Mojs.
Pinacoceras cfr. *perauctum* Mojs.
Juvavites sp. n.
Halorites sp. del gruppo dell'*Hal. semiplicatus* Hauer sp.
Arpadites sp. aff. all'*Arp. Rüppeli* Klpst sp.
Halobia Mojsisovicsi Gemm.
» *Curionii* Gemm.
» *Beneckei* Gemm.
Halobia mediterranea Gemm.
» *sicula* Gemm.
» *subreticulata* Gemm.
» *insignis* Gemm.
» *radiata* Gemm.
» *simplex* Gemm.
Daonella styriaca Mojs.
» *lenticularis* Gemm.
Monotis rudis Gemm.
» *Stoppanii* Gemm.
» *limaeformis* Gemm.
Posidonomya affinis Gemm.
» *lineolata* Gemm.
» *fasciata* Gemm.
» *elegans* Gemm.
» *gibbosa* Gemm.

([1]) Questa ultima specie si è trovata negli scisti cornei.

d) Dolomia a *Daonella Lepsiusi* Gemm:

Daonella Lepsiusi Gemm.

e) Dolomia superiore:

Rhynchonella sp. del gruppo della *Rh. pedata* Bronn.

Spirigera sp. » della *Sp. oxycolpos* Emmr.

II.

Nelle rocce noriche della provincia mediterranea mancano le *Halobie,* mentre se ne conoscono varie in quelle della provincia juvavica. Questo dipende, giusta le belle ricerche del Mojsisovics, da ciò che in quell'epoca il mare di queste due provincie non era in comunicazione, e perciò non si potea verificare il passaggio degli animali marini dall'uno all'altro mare. Però nell'epoca carnica questi due mari si misero in comunicazione, onde gli animali ebbero agio di poterli percorrere liberamente, e quindi le rocce, che vi si depositarono, contengono molte specie di animali marini comuni, fra cui varie *Halobie.* Ammessa la indipendenza nell'epoca norica del mare della regione mediterranea da quello della juvavica, e la esistenza nelle rocce carniche mediterranee delle specie del genere *Halobia,* che manca in quelle noriche della stessa provincia, ragion vuole che il calcare a noduli di selce cornea della parte occidentale della Sicilia, che è ricco di *Halobie,* debba considerarsi appartenente all'epoca carnica.

Questa opinione viene avvalorata dalla presenza della *Daonella styriaca* Mojs. e dal *Pinacoceras* cfr. *perauctum* Mojs., due specie della zona a *Trachyceras Aonoides* del Röthenstein dei dintorni d' Aussee, che si son trovate nel calcare a noduli di selce cornea della montagna della Madonna della Scala presso Palazzo Adriano e della contrada Madonna del Balzo del monte Irione.

La *Daonella styriaca* Mojs. negli strati calcarei della montagna della Madonna della Scala presso Palazzo Adriano, accompagna l'*Halobia sicula* Gemm. e l'*Halobia insignis* Gemm., e in quelli della contrada Madonna del Balzo del monte Irione il *Pinacoceras* cfr. *perauctum* Mojs. si trova insieme coll'*Halobia subreticulata* Gemm. coll'*Halobia insignis* Gemm., coll'*Halobià Curionii* Gemm., coll'*Halobia Beneckei* Gemm., colla *Posidonomya gibbosa* Gemm., colla *Posidonomya lineolata* Gemm. ecc. Questi fossili, stando insieme colle precedenti specie carniche guida, e trovandosi ancora negli strati medî e superiori del calcare a noduli con selce cornea d'altri siti della regione occidentale della Sicilia, ci danno la certezza che questa porzione di tale gran massa calcarea, appartiene al piano carnico e che con particolarità essa è sincronica alla zona a *Trachiceras Aonoides* delle Alpi.

L'*Halobia Curionii* Gemm. e la *Posidonomya gibbosa* Gemm. in alcune contrade, come per esempio al vallone del Fico presso Parco, invece di giacere in questa porzione della roccia, si trovano negli strati inferiori che stanno a pochi metri sulla dolomia. Questi però non sono gli equivalenti degli strati inferiori di questo calcare, ma di quelli che corrispondono alla sua parte media e superiore. Alla contrada Madonna del Balzo del monte Irione, infatti, sotto gli strati di questo calcare con *Pinacoceras* cfr. *perauctum* Mojs., *Halobia insignis* Gemm., *Halobia Curionii* Gemm., *Posidonomya gibbosa* Gemm. ecc., ossia sotto quelli sincronici agli strati fossiliferi del vallone del

Fico, se ne trovano molti altri zeppi dell'*Halobia Mojsisovicsi* Gemm., che mancano in questa località e in tutte quelle ove questa roccia non è molto sviluppata in ispessezza. Or, come ho detto precedentemente, la potenza di questa roccia stando in modo inverso a quella della sottostante dolomia, e in alcuni siti, come per esempio presso il Mezzagno e nel lato N. E. del monte S. Calogero di Termini-Imerese, scorgendosi il passaggio dell'una all'altra roccia, credo che la parte inferiore di questo calcare e con particolarità lo insieme degli strati con *Halobia Mojsisovicsi* Gemm. venga in molti siti sostituita dalla parte superiore della sottostante dolomia. Ond'è che, in quei luoghi ove il calcare con noduli di selce cornea non è molto potente e la sottostante dolomia è sviluppatissima, gli strati inferiori del calcare non rappresentano punto gli strati ad *Halobia Mojsisovicsi* Gemm., ma altri a questi superiori.

Dai documenti paleontologici che si hanno della parte inferiore di questo calcare è impossibile poter stabilire con certezza, se essa e la dolomia vicaria siano conquagliabili alla zona a *Trachyceras Aonoides*, o pure a quella sottostante alpina a *Trachyceras Aon.* Purnondimeno, considerando: 1° che gli strati inferiori di questo calcare contengono una gran quantità di esemplari della *Halobia Mojsisovicsi* Gemm. la quale manca in quelli ove trovasi la *Daonella styriaca* Mojs. il *Pinacoceras* cfr. *perauctum* Mojs. e le loro specie coeve; 2° che questi strati della contrada S. Benedetto presso Palazzo Adriano han presentato un esemplare di *Arpadites* strettamente legato in parentela all'*Arp. Rüppeli* Klpst. sp. degli strati di s. Cassiano, è probabile dunque che essi con quei vicarii eteropici di dolomia siano equivalenti a quei della zona a *Trachyceras Aon* delle Alpi.

Stabilita l'età carnica del calcare a noduli con selce cornea e della parte superiore della sottostante dolomia, bisogna ora determinare quella delle altre rocce di questa serie. Ciò riesce molto difficile, perchè queste mancano di fossili guida; però tenteremo di fissarla servendoci degli altri elementi che esse ci apprestano.

Incominciando cronologicamente, il calcare di S. Elia ha una grande analogia petrografica ed una identica posizione stratigrafica di quello del Messinese [1] che poggia sul servino, e su di cui sta, come nella regione occidentale della Sicilia, una gran massa dolomitica. Questo in s. Elia contiene dei numerosi avanzi di *encrini* e di *cidaridi* come quello che trovasi ad oriente del Lago d'Iseo, che viene riferito al Muschelkalk [2]. Il nostro però per la sua posizione potrebbe rappresentare il Muschelkalk superiore.

Al di sopra di questa roccia viene la gran massa dolomitica, su di cui riposa il calcare a noduli di selce cornea. La parte superiore di questa dolomia, essendo stata considerata vicaria della inferiore del calcare a noduli di selce cornea, e riferita alla parte inferiore del piano carnico, il rimanente di essa non può che appartenere al piano norico.

Poggia sul calcare a noduli di selce cornea, che rappresenta in gran parte, come ho detto, dei depositi sincronici a quei della zona a *Trachyceras Aonoides*, la dolomia

[1] Seguenza. *Breve nota int. le form. prim. e second. della Prov. di Messina.* Boll. del R. Com. Geologico d'Italia. Firenze 1871.

[2] Mojsisovics, *Ueber heteropische Verhältnisse in Triasgebiete der lombardischen Alpen.* Wien 1880.

con *Daonella Lepsiusi* Gemm. Questa roccia, contenendo una specie di *Daonella,* genere che non si estende al di sopra del carnico, non può riferirsi che alla parte superiore di questo piano, ovvero alla zona a *Turbo solitarius* Ben. che è stata trovata in questi ultimi anni in varî siti dell'Apennino sotto tutt'altro aspetto petrografico, ma che in molte contrade alpine viene rappresentata dalla stessa dolomia.

La dolomia superiore, in ultimo, che forma il coronamento di questa serie di rocce, credo che possa rapportarsi al retico, che sebbene nel Messinese sia chiaro paleontologicamente, nella parte occidentale della Sicilia è piuttosto dubbio e con tutt'altro aspetto litologico. Porto questa opinione non solo per le relazioni stratigrafiche di questa dolomia, che poggia sulla dolomia a *Daonella Lepsiusi* Gemm. e porta sopra di sè, in alcuni siti, degli strati del calcare cristallino (lias inferiore), ma ancora per l'aspetto dei pochi fossili che vi si trovano. Essi sono: una *Rhynchonella* del gruppo della *Rh. pedata* Bronn., e una *Spirigera* del gruppo della *Sp. oxycolpos* Emmr., forme tutte e due dominanti nei depositi retici di Kössen.

La tavola seguente sintetizza ciò che abbiamo detto sulla serie triassica della parte occidentale della Sicilia.

e. Dolomia superiore		Retico
d. Dolomia a *Daonella Lepsiusi*	Zona a *Turbo solitarius*	
Monotis rudis, *Mon. limaeformis*, *Posidonomya gibbosa*, *Daonella Styriaca*, *Halobia Curionii*, *Pinacoceras* cfr. *perauctum* ecc. *c.* Calcare a noduli di selce cornea e scisti subordinati	Zona a *Trachyceras Aonoides*	Carnico
Halobia Mojsisovicsi, *Arpadites* sp. aff. all'*Ar. Rüppeli*	Zona a *Trachyceras Aon.*	
b. Dolomia inferiore		Norico
a. Calcare di S. Elia a *Encrini* e *Cidaridi*		Muschelkalk superiore

III.

Genere **Halobia** Bronn.

Halobia insignis Gemm.

Tav. II.

Lunghezza 139.mm 65.mm

Altezza 67.mm 35.mm

Questa specie è grandissima, piana, appena convessa sulla regione apiciale, molto più lunga che alta, e con il margine cardinale lunghissimo, la cui parte posteriore è più del doppio estesa dell'anteriore. La sua orecchietta porta sulla parte inferiore una piega alta, larga, piana o leggermente convessa e striato-rugosa, che viene limitata in alto d'una sottile costella. La superficie di questa Halobia è ornata di coste radiali superiormente convesso-appiattite, e alquanto arcuate longitudinalmente con la convessità rivolta indietro. Esse si estendono sino al margine cardinale posteriore, mentre al di sotto dell'orecchietta riduconsi a semplici e leggerissime strie radiali.

Queste coste, che partono un po' al di sotto dell'apice, e la cui origine è poco marcata, accompagnandosi lungo il loro cammino, si vedono man mano dividere e suddividere in modo tale che ogni costa produce da sette ad otto coste secondarie sul margine palleale anteriore, e fino a sedici sul posteriore; senza contare inoltre che talune di esse portano un leggerissimo intaglio intercostale che le bipartisce. I solchi intercostali principali sono piuttosto stretti e profondi e qualche volta ineguali, essendovene alla regione anteriore taluni più larghi degli altri; essi lungo il margine divengono superficialissimi e stretti. Oltre a questi ornamenti si vedono ancora sulla superficie di questa conchiglia delle strie concentriche, fine ed avvicinate, fra le quali di tratto in tratto si notano dei cercini ellittici, forti e variciformi, che sono più pronunziati nella sua regione anteriore. Queste strie si estendono dalla parte posteriore all'anteriore del margine cardinale, talchè passando sull'orecchietta la rendono striato-rugosa.

È proprio caratteristico in alcuni individui di questa specie un sistema di strie trasversali, che trovasi sotto la loro orecchietta, e che intersecando le strie radiali vi produce degl'interstizî di forma romboidale, che mancano in tutte le Halobie fin ora conosciute.

Nei giovani di questa specie v'è da notare soltanto che le coste sono più strette e i solchi più fini e superficiali.

Questa bellissima Halobia richiama per la sua grandezza l'*Halobia Hörnesi* Mojs. e l'*Halobia halorica* Mojs.; però la disposizione degli ornamenti della sua orecchietta la distingue chiaramente da esse; inoltre essa è ancor meno convessa di entrambe e le sue coste si dividono maggiormente.

Questa specie si trova nel calcare bianco-grigiastro con noduli di selce cornea della contrada Madonna della Scala presso Palazzo Adriano con l' *Halobia sicula* Gemm. e la *Daonella styriaca* Mojs., e in quello del piano del Cervo del monte Irione con l' *Halobia subreticulata* Gemm., la *Posidonomya lineolata* Gemm., la *Posidonomya fasciata* Gemm. ecc.

L'*Halobia insignis* Gemm. è una specie piuttosto comune.

Halobia Beneckei Gemm.

Tav. III, fig. 3 e 4; Tav. IV, fig. 4 e 5.

Lunghezza	17.mm	29.mm	9.mm
Altezza	12.mm	21.mm	6.mm

Conchiglia trasversalmente ovale, molto inequilaterale e più lunga che alta. Le sue valve sono molto rigonfiate lungo una linea, che partendo dall'apice si estende obliquamente al margine palleale. L'apice è acuto, arcuato e alquanto sporgente dal margine cardinale. Essa ha la parte posteriore della linea cardinale molto più lunga che l'anteriore. La sua orecchietta risulta d'una piega marginale, alta, robusta e subtriangolare. Tutta la superficie di questa conchiglia è ornata di coste fortemente scolpite e leggermente arcuate, che partendo un po' al di sotto dell'apice s'irradiano su tutta la parte periferica, lasciando soltanto una strettissima e liscia area lungo il suo margine cardinale posteriore. Queste coste alla distanza di circa 5.mm dall'apice si dividono in due coste secondarie, e, ad altezze diverse, queste presentano dei fini solchi

che le suddividono in due e qualche volta in altre tre costelle. Spesso però una delle due coste secondarie scorre semplice fino al margine palleale; come pure vi sono degli esemplari in cui le coste principali invece di biforcarsi, si triforcano, e percorrono semplici tutta l'altezza della conchiglia. Alcuni esemplari di questa specie presentano qualche costa principale con l'intaglio che la bipartisce, ma che dopo un certo tratto si scancella, dando luogo alla fusione delle due costole in una semplice. Le sue strie concentriche sono forti e lontane fra di loro, fra le quali si notano di tratto in tratto dei cercini variciformi che stanno più avvicinati, ma meno sporgenti verso l'apice.

I giovani esemplari di questa specie sono meno obliquamente convessi, ed hanno le coste radiali più semplici e meno forti.

Questa specie è alquanto vicina all'*Halobia norica* Mojs., però se ne distingue per essere più inequilaterale, per avere i cercini più rilevati, le coste radiali più grossolane ed estese verso il lato posteriore, e l'orecchietta consistente in una piega più robusta e triangolare. Essa ha pure qualche analogia con l'*Halobia Curionii* Gemm. colla quale si trova insieme; ma questa, avendo le coste più strette, dritte e divise da solchi più larghi che si arrestano molto al di sotto del margine cardinale posteriore lasciandovi un'area liscia ed assai larga, ed avendo l'orecchietta diversamente conformata, non può affatto confondersi con la specie in esame.

L'*Halobia Beneckei* Gemm. proviene dalla contrada Madonna del Balzo e precisamente dagli strati corrispondenti al santuario del monte Irione. Le specie che la accompagnano sono: l'*Halobia Curionii* Gemm., l'*Halobia mediterranea* Gemm., la *Posidonomya affinis* Gemm. ecc.

Questa specie è comune.

Halobia Curionii Gemm.

Tav. III, fig. 5 e 6.

Lunghezza	20.mm	24.mm
Altezza	17.mm	19.mm

Questa Halobia è trasversalmente più o meno ovale e più lunga che alta. Essa presenta un leggiero rigonfiamento che corre direttamente dall'apice al margine palleale. La sua orecchietta porta una piega rilevata, la quale partendo dall'apice va obliquamente in fuori, lasciando tra essa e il margine cardinale, che sta rivolto in alto, uno spazio liscio e canaliforme. Il suo apice è alquanto acuto ed arcuato. A poca distanza di esso s'irradiano delle coste che si arrestano molto avanti del margine posteriore, lasciandovi un'area larga e perfettamente liscia, oppure con qualche traccia scancellata d'intaccature radiali. Le coste sono poco divise ; ordinariamente dopo una prima divisione ne subiscono soltanto un'altra, e non vi è esemplare in cui non si trovino delle coste semplici. Soltanto in un grande esemplare ho visto una costa, che dopo di aver percorso semplice quasi l'intera altezza della conchiglia, si triforca presso il margine palleale. Le coste vengon divise da larghi solchi che arrivano non raramente a superarle in larghezza.

Questa specie è più affine all'*Halobia norica* Mojs., che non lo sia la specie precedente, sì per la forma dell'orecchietta, che per l'estensione dell'area non solcata

che si trova sulla sua regione posteriore. La disposizione delle sue coste, che sono divise da solchi molto più larghi, è talmente differente da quella delle coste dell'*Halobia norica* Mojs., che la fa chiaramente differire da essa

Essa si trova nella contrada Madonna del Balzo e precisamente negli strati corrispondenti al santuario del monte Irione con la specie precedente.

L'*Halobia Curionii* Gemm. è piuttosto rara.

Halobia mediterranea Gemm.

Tav. III, fig. 7 a 9.

Lunghezza	18.mm	28.mm	37.mm	40.mm
Altezza	12.mm	19.mm	26.mm	29.mm

Conchiglia piuttosto grande, trasversalmente ovale, più lunga che alta e alquanto rigonfiata un po' obliquamente d'alto in basso. Del suo margine cardinale la parte posteriore è più lunga dell'anteriore. La sua orecchietta, a forma di larga piega, viene delimitata in sotto da un forte solco; essa ha la superficie regolarmente inclinata o depressa e provvista di un leggerissimo solco marginale. Alla distanza di circa 7.mm dall'apice s'irradiano delle coste che percorrono la superficie della conchiglia fino al margine palleale. Esse però non si estendono fino al suo margine posteriore, per cui vi si nota un'area perfettamente liscia, che sebbene non sia ordinariamente molto estesa, in alcuni individui è estesissima. Le coste dopo aver percorso un breve tratto della superficie della conchiglia si biforcano, e scorrono alcune semplici ed altre suddivise in due costole secondarie. Esse sono piuttosto strette, arcuate, arrotondate superiormente, oppure piatte. Quelle che si trovano sulla regione anteriore sono generalmente più larghe delle altre e divise da leggerissimi solchi, mentre sul resto della conchiglia esse sono divise da solchi più stretti e profondi. La superficie di quest'Halobia è provvista ancora di cercini variciformi, larghi e lontani fra di loro, i quali sono più rilevati e avvicinati sulla regione apiciale.

I giovani esemplari di questa specie sono caratteristici per la grandezza dei cercini concentrici, per la regione apiciale estesamente liscia e per le coste larghe, semplici e divise da leggieri intagli.

Questa specie per il leggiero solco marginale che ha sulla piega della sua orecchietta, come pure per l'area estesa mancante di coste che mostra al di sotto del margine cardinale posteriore, richiama l'*Halobia austriaca* Mojs. L'andamento delle sue coste radiali, però, è molto diverso, suddividendosi meno di come ha luogo presso la specie del Mojsisovics.

Questa specie accompagna nella stessa località le due Halobie precedentemente descritte; ma è d'esse molto più comune.

Halobia Mojsisovicsi Gemm.

Tav. III, fig. 10 a 12.

Lunghezza	41.mm	39.mm
Altezza	33.mm	32.mm

Le valve di questa distintissima specie sono più lunghe che alte, rigonfiate al centro e con il lato posteriore leggermente più largo dell'anteriore. La loro orecchietta è provvista d'una piega larga e superiormente rotondata che partendo dall'apice portasi

obliquamente in fuori e in basso, e che è munita di fine strie trasversali. La superficie delle valve è completamente ornata di finissime coste radiali, che partendo quasi dal loro apice s'irradiano su tutta la loro parte periferica. Queste coste, dopo una prima divisione in due e qualche volta in tre coste secondarie, si suddividono ad altezze diverse un'altra volta, e c'è il caso ancora che alcune d'esse si suddividano una terza volta. Sulle due valve si notano ancora dei cercini concentrici, i quali sulla regione apiciale sono quasi equidistanti, avvicinati e più forti degli altri, che, mentre si osservano quasi scancellati nella loro regione palleale, in quella posteriore sono fortissimi. Fra questi cercini si osservano ancora delle linee concentriche fine e più o meno avvicinate, che prolungandosi sulla piega dell' orecchietta la rendono striata trasversalmente.

Questa specie per l' orecchietta striata trasversalmente, per le coste strette che si suddividono più volte ad altezze diverse e per la sua superficie striata concentricamente si distingue facilmente dalle Halobie fin'ora conosciute. Non v' è dubbio che con le sue numerose e fine coste richiama l'*Halobia distincta* Mojs., l'*Halobia celtica* Mojs. e l' *Halobia lineata* Münst. sp.; ma queste essendo a *stretta orecchietta* non si possono punto confondere colla specie di Sicilia. Come pure la grandezza della sua orecchietta e la finezza delle sue coste l'avvicinano all' *Halobia superba* Mojs., però la mancanza d' ogni tendenza ad inflettersi delle sue coste la distacca subito da essa, e dalle altre appartenenti al gruppo dell'*Halobia fallax* Mojs.

L'*Halobia Mojsisovicsi* Gemm. proviene dagli strati inferiori della contrada Madonna del Balzo del monte Irione, ove è comunissima.

Halobia subreticulata Gemm.

Tav. III, fig. 13; Tav. IV, fig. 7.

Lunghezza	22.mm (1)	33.mm	42.mm
Altezza	25.mm	?	?

Questa Halobia è grande, di forma quasi orbicolare, sub-equilaterale, più alta che lunga e piana. La sua orecchietta porta nella parte inferiore una stretta piega che la delimita chiaramente dal resto della conchiglia. Il suo apice è acuto e pochissimo arcuato. A pochi millimetri al di sotto di esso s'irradiano delle coste, le quali mentre sulla parte anteriore si estendono fino al margine inferiore dell'orecchietta, su quella posteriore si arrestano molto prima del margine cardinale, lasciando un' area priva di coste radiali, o provvista soltanto verso la parte periferica di leggerissimi e indistinti intagli. Queste coste piuttosto larghe e superiormente piane sono leggermente arcuate con la concavità rivolta in avanti; esse dopo essersi biforcate una prima volta si dividono nuovamente in due costicine, e alcune d' esse qualche volta presentano un solco, che le suddivide in altre due. I solchi intercostali sono nei grandi esemplari larghi e piuttosto profondi, mentre in quei di media grandezza e nei giovani sono piuttosto superficiali e stretti. Tutta la superficie di questa conchiglia è ornata di strie concentriche fine ed avvicinate, le quali presso la regione palleale stanno fra di loro molto più serrate. Fra queste strie si notano dei forti cercini concentrici

(1) Misure calcolate dalle strie d'accrescimento.

che sono nella regione apiciale più rilevati ed equidistanti, e che si estendono dal margine cardinale del lato posteriore alla base dell'orecchietta.

L'*Halobia subreticulata* Gemm. per la sua forma equilaterale si allontana dal tipo generale delle Halobie, avvicinandosi piuttosto a quella dominante delle Daonelle; ma la presenza della sua orecchietta non lascia alcun dubbio sulla sua determinazione generica. La sua forma generale e l'andamento delle sue coste ricordano sino ad un certo punto l'*Halobia rarestriata* Mojs., da cui differisce però per la piega che limita inferiormente la sua orecchietta, per l'andamento non rettilineo delle sue coste e per le fine strie concentriche che l'adornano, che richiamano la scultura della *Daonella reticulata* Mojs.

Questa bella specie è piuttosto comune; essa proviene dal calcare a noduli di selce cornea della contrada Madonna della Scala dei dintorni di Palazzo Adriano, dalla contrada Giardinetto presso Trabia, dalla contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo e dal piano del Cervo del monte Irione.

Halobia sicula Gemm.

Tav. IV, fig. 2 e 3.

Lunghezza	14.mm	20.mm	20.mm
Altezza	11.mm	15.mm	16.mm

Quest'Halobia è la più comune di tutte quelle che fin ora si son trovate nel trias della parte occidentale della Sicilia. Essa è ancora molto estesa orizzontalmente essendosi trovata nel calcare con noduli di selce cornea delle contrade; Madonna della Scala (Palazzo Adriano), Giardinetto (Trabia) e Scaletta (monte Cassaro di Castronuovo).

L'*Halobia sicula* Gemm. è una specie piuttosto piccola, alquanto più lunga che alta, appena convessa sulla sua regione apiciale e più o meno sinuata nella regione posteriore al di sotto della corrispondente porzione del margine cardinale. Il suo lato anteriore, leggermente più corto del posteriore, ha l'orecchietta limitata inferiormente d'una piega leggiera più o meno larga. Al di sotto dell'apice s'irradiano delle coste che si arrestano ai due lati alquanto al di sotto del margine cardinale posteriore e anteriore, lasciandovi due aree liscie e prive di coste; di queste aree la posteriore è più estesa e mostra qualche leggerissimo intaglio marginale. Le coste sono larghe, basse, piane superiormente e divise da stretti solchi; esse si dividono soltanto in due coste secondarie, e ordinariamente presso la regione palleale una o tutte e due portano un leggerissimo solco che le bipartisce. In molti esemplari, però, alcune coste subiscono soltanto una sola divisione, e percorrono semplici tutta l'altezza della conchiglia. La sua superficie è provvista parimente di strie concentriche finissime che si distinguono solamente colla lente d'ingrandimento; fra di loro ve ne ha più forti che dominano nella regione palleale stando fra di loro molto avvicinate, come pure alcune di esse acquistano quasi a distanze eguali tale forza e si rilevano talmente da prendere l'aspetto di cercini concentrici. Questi cercini partono dal margine cardinale posteriore e passando sulla piega auricolare si estendono regolarmente al margine cardinale anteriore; però quando la parte posteriore della conchiglia è fortemente

sinuata, anch'essi vi presentano una leggiera sinuosità. La parte interna delle valve di questa specie mostra ancora un bello splendore madreperlaceo.

Questa Halobia è molto affine all'*Halobia plicosa* Mojs., dalla quale si distingue per le coste più larghe e meno divise, per l'orecchietta meno robusta e pe' cercini concentrici che si estendono fino al margine cardinale anteriore.

Essa trovasi con l'*Halobia subreticulata* Gemm., l'*Halobia insignis* Gemm., la *Daonella styriaca* Mojs., e la *Posidonomya lineolata* Gemm.

Halobia radiata Gemm.

Tav. I, fig. 9 a 12.

Lunghezza	25.mm	29.mm	38.mm	?
Altezza	22.mm	23.mm	33.mm	39.mm

Questa elegante Halobia è sottile, un po' meno alta che lunga, equilaterale e piana. Essa ha l'apice sprovvisto di strie longitudinali, acuto, arcuato e un po' sporgente al di fuori della linea cardinale. La sua orecchietta stretta, rilevata e marginale distinguesi dal resto della conchiglia per un solco che la delimita inferiormente, e le dà l'aspetto d'una piega marginale rotondata superiormente. A poca distanza dall'apice partono molte coste leggerissime e di larghezza variabile, che si arrestano al di sotto del lato cardinale anteriore e posteriore, lasciando in ogni lato un'area priva di coste. Esse irradiandosi verso la regione palleale si sfioccano più volte e danno luogo a costelle sottilissime; ma siccome vengono divise da solchi più o meno larghi e superficiali, pare che la conchiglia abbia coste piuttosto grandi, le quali viste colla lente d'ingrandimento risultano formate dalla unione di molte costelle sottilissime. Tutta la superficie di questa conchiglia è provvista fino ad una certa età di strie concentriche finissime fra le quali si trovano dei cercini forti e variciformi. Però nei grandi esemplari queste strie divengono forti e intersecando le costelle radiali le increspano senza interrompere il loro andamento rettilineo; mentre i cercini concentrici tendono piuttosto a scancellarsi.

Questa specie appartiene al gruppo delle forme dell'*Halobia rarestriata* Mojs. con cui ha comune la caratteristica forma dell'orecchietta e l'andamento delle coste radiali che sono increspate nei suoi grandi esemplari come quelle dell'*Halobia lineata* Münst. sp. e dell'*Halobia salinarum* Bronn. Essa pur non di meno si discosta per l'assieme dalle forme parenti, ed ha tali particolarità che viene agevole distinguerla da esse.

L'*Halobia radiata* Gemm. si trova negli strati inferiori del calcare con noduli di selce cornea della contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo insieme alla *Daonella lenticularis* Gemm. e all'*Halobia transversa* Gemm. Essa è comunissima.

Halobia transversa Gemm.

Tav. III, fig. 1 e 2.

Lunghezza	31.mm	23.
Altezza	20.mm	19.

Halobia molto inequilaterale, trasversalmente ovale, obliquamente rigonfiata, più larga indietro che in avanti e con lungo margine cardinale, la cui parte posteriore è tripla in lunghezza di quella anteriore. La sua orecchietta è stretta; essa porta inferiormente una piega che la delimita nettamente dal resto della conchiglia. L'apice

e i suoi lati anteriore e posteriore sono affatto lisci: essi presentano come il resto della conchiglia, dei forti ed elevati cercini concentrici fra i quali stanno intercalate delle finissime strie anch'esse concentriche, che nel lato anteriore si arrestano sotto l'orecchietta. Il resto della sua superficie è ornato ancora di costelle radiali superficiali, finissime, filiformi e rugose per l'intersecazione colle strie concentriche. Queste costelle radiali lungo il loro corso si dividono più volte; fra di loro ve ne è alcune che di tratto in tratto, e ad uguale distanza risaltano dalle altre per la loro maggiore grandezza.

Questa distinta specie non ha forme affini.

Essa proviene dalla stessa località della specie precedente, ed è rarissima.

Halobia simplex Gemm.

Tav. I, fig. 7 e 8.

Lunghezza	11.mm	10.mm (1)
Altezza	10.mm	8.mm

Questa piccola Halobia è un po' più lunga che alta, leggermente sinuata nel suo lato posteriore, e con il margine cardinale posteriore un po'più lungo dell'anteriore. La sua orecchietta resulta d'una piega marginale relativamente alta e stretta, che viene circoscritta in basso da un forte solco che la delimita dal resto della conchiglia. Essa è ornata di stretti e prominenti cercini concentrici, che dall'apice alla base si mostrano in generale sempre più distanti fra di loro e meno prominenti. Questa specie, che ad occhio nudo pare mancante delle caratteristiche pieghe radiali, mostra, colla lente d'ingrandimento, d'esserne anch'essa provvista. Queste costelle radiali sono finissime, leggiere, filiformi; esse partendo al di sotto dell'apice s'irradiano verso la circonferenza della conchiglia, dividendosi ad altezze diverse. Giudicando degli esemplari che ho sotto gli occhi, pare che esse non si estendano fino ai due lati del margine cardinale, o vi si assottiglino in modo da non potersene distinguere.

Questa specie per la sua forma e per l'estrema finezza delle sue costelle si distingue facilmente da tutte le Halobie fin ora conosciute.

Essa si trova con l'*Halobia Curionii* Gemm., coll'*Halobia Benekei* Gemm. ecc. nella contrada Madonna del Balzo del monte Irione e precisamente negli strati di calcare a noduli di selce cornea presso il santuario. Se ne sono trovate tre sole valve.

Genere **Daonella** Mojsisovics.

Daonella lenticularis Gemm.

Tav. I, fig. 3 a 5.

Lunghezza	7.mm	23.mm
Altezza	5.mm	21.mm

Questa conchiglia è piccola, di forma lenticolare, appena più lunga che alta, leggermente rigonfiata sulla regione apiciale e con il lato cardinale posteriore più lungo dell'anteriore. Il suo margine cardinale dritto termina arrotondito nel punto di congiungimento con quello anteriore e posteriore. Alcuni esemplari al di sotto del lato cardinale anteriore presentano una leggiera e stretta depressione, che lasciando

(1) Le misure sono state calcolate dalle strie d'accrescimento.

più elevata alla sua parte superiore una stretta area marginale, pare che siano provvisti di orecchietta. Ad una certa distanza dall' apice (circa 3.mm) partono alcune larghissime pieghe che si prolungano soltanto verso la parte centrale del margine palleale, non estendendosi punto verso i suoi lati anteriore e posteriore. Queste pieghe sono larghissime, non prominenti, piane superiormente, ineguali e vengono ordinariamente divise una sola volta da intagli superficialissimi e strettissimi. Tutta la superficie di questa conchiglia è munita di cercini concentrici, equidistanti e rilevati che stanno maggiormente avvicinati fra di loro nella regione apiciale.

Questa specie, benchè piccola, ha stretta parentela colla *Daonella styriaca* Mojs., dalla quale la considero come diversa, anzichè come giovane della stessa specie, perchè la *Daonella Styriaca* Mojs. in questo stato di sviluppo si presenta con tutt'altri caratteri. Essa ne differisce per le coste più larghe e divise da solchi superficialissimi e lineari, le quali coste non divengono punto strette verso il suo lato posteriore. Inoltre le coste sono molto ineguali in grandezza, la qual cosa non si osserva punto nella *Daonella styriaca* Mojs.

La *Daonella lenticularis* Gemm. accompagna l'*Halobia radiata* Gemm. negli strati inferiori della contrada Scaletta (monte Cassaro di Castronuovo) ove è comunissima.

Daonella styriaca Mojs.

Tav. I, fig. 1 e 2.

1874. *Daonella styriaca*, Mojsisovics, *Ueber die Triadischen Pelecypoden-Gattungen Daonella und Halobia*, p. 10, tav. I, fig. 4, 5.

Lunghezza 50.mm
Altezza 41.mm

I diversi esemplari della *Daonella styriaca* Mojs., provenienti dalla montagna della Madonna della Scala presso Palazzo Adriano, corrispondono in tutto con il tipo degli strati a *Trachyceras ellipticus* del Röthelstein presso Aussee. Ho potuto convincermi di ciò non solo dai disegni e dalla magistrale descrizione data dal Mojsisovics, ma ancora confrontando gli esemplari di Sicilia con molti tipici, provenienti da Aussee, i quali, determinati dallo stesso Mojsisovics, mi sono stati dati gentilmente dal Barone Ferd. von Andrian. La sola differenza che vi ho potuto trovare si è che negli esemplari di Sicilia le coste radiali non si presentano mai così larghe come nell'esemplare di Aussee (Mojsisovics, op. cit. tav. I, fig. 4).

La *Daonella styriaca* Mojs. nella montagna della Madonna della Scala presso Palazzo Adriano trovasi insieme all'*Halobia sicula* Gemm., all'*Halobia insignis* Gemm. e all'*Halobia subreticulata* Gemm.

Daonella Lepsiusi Gemm.

Tav. I, fig. 6.

Lunghezza 26.mm
Altezza 27.mm

Conchiglia depressa, quasi orbicolare, più alta che lunga. La sua linea cardinale dritta, termina arrotondata al punto di congiungimento con quella dei lati posteriore e anteriore (?). Il suo apice è liscio. Alla distanza di circa 6.mm della sua

punta partono delle coste radiali che si estendono fino alla regione palleale, lasciando un'area liscia al suo lato posteriore. Gli esemplari che ho sotto gli occhi, mancando del lato anteriore, non si vede se sono occupate dalle coste fino al margine cardinale. Le coste dividendosi un po' sotto la loro origine, percorrono ordinariamente semplici tutta l'altezza della conchiglia, poche soltanto si dividono una seconda volta. Esse sono poco elevate, di media grandezza e vengon divise da solchi che divengon sempre più leggieri verso la regione posteriore della conchiglia. Essa è ancora provvista di cercini concentrici, distanti fra di loro e che divengono più forti e rilevati verso la sua regione posteriore.

Questa specie è vicinissima alla *Daonella solitaria* Mojs. e alla *Daonella Beyrichi* Mojs. Differisce dalla prima per le sue coste che sono molto più fine, e dalla seconda per la forma più alta e per le coste meno fine e che si dividono meno nel loro corso.

La *Daonella Lepsiusi* Gemm. è una specie rarissima che proviene dalla dolomia a *Daonella Lepsiusi* del monte Grifone (gruppo dei monti del Mezzagno).

Genere **Posidonomya** Bronn.

Posidonomya fasciata Gemm.

Tav. IV, fig. 7 e 8.

Lunghezza	13.mm	12.mm
Altezza	11.mm	10.mm

Questa conchiglia è di forma ovato-orbicolare, alquanto inequilaterale e rigonfiata un po' obliquamente. L'apice, quasi mediano, è di mediocre grandezza ed arcuato. Il lato posteriore mostrasi regolarmente curvato, mentre l'anteriore lo è leggermente, anzi qualche volta può dirsi quasi dritto. La sua superficie è provvista di pieghe concentriche, larghe, prominenti ed equidistanti che nella regione palleale, avvicinandosi fra di loro, divengono ordinariamente più strette e meno rilevate. Sulla sua regione palleale posteriore porta poche strie radiali, che non oltrepassano la metà inferiore dell'altezza della conchiglia.

Questa conchiglia sta strettamente legata in parentela colla *Posidonomya alta* Mojs., da cui differisce per essere più rigonfiata, per aver l'apice più grande e fortemente arcuato e per essere ornata di grandi pieghe concentriche.

Si trova nella contrada Madonna del Balzo del monte Irione coll'*Halobia Beneckei* Gemm., coll'*Halobia Curionii* Gemm., colla *Posidonomya affinis* Gemm. ecc. Essa è una specie alquanto comune.

Posidonomya affinis Gemm.

Tav. IV, fig, 6.

Lunghezza	17.mm
Altezza	13.mm

La conchiglia di questa Posidonomya è trasversalmente ovale, inequilaterale e rigonfiata obliquamente dall'apice al margine palleale posteriore. Il suo apice è di discreta grandezza e leggermente arcuato. Essa ha la regione posteriore dilatata e termina con contorno rotondato, e l'anteriore più stretta e con contorno rotondato. La sua superficie è munita di pieghe concentriche piuttosto larghe ed equidistanti

che, avvicinandosi al margine palleale, vanno mano mano impicciolendosi. Verso la metà della sua altezza si vedono nascere delle strie radiali più o meno avvicinate ed impresse che si estendono fino al margine palleale.

Questa specie, piuttosto rara, è vicina alla *Posidonomya Wengensis* Wiss., dalla quale differisce per essere obliquamente rigonfiata, meno alta e anteriormente più attenuata. La *Posidonomya obliqua* Hauer., sebbene la richiami ancora per l'assieme, se ne allontana maggiormente, perchè è più obliquamente rigonfiata e perchè le sue pieghe hanno tutt'altra disposizione.

La *Posidonomya affinis* Gemm. s'incontra colla *Posidonomya fasciata* Gemm., coll'*Halobia Beneckei* Gemm. ecc. nella contrada Madonna del Balzo del monte Irione.

Posidonomya lineolata Gemm.

Tav. IV, fig. 9 e 10.

Lunghezza . . . . 7.^{mm}
Altezza . . . . 5.^{mm}

Questa Posidonomya è piccola, di forma trasversalmente ovale e alquanto inequilaterale. Essa è leggermente convessa dall'apice al margine palleale e dilatata verso i lati. Il suo lato posteriore è più lungo e largo dell'anteriore, ed entrambi sono rotondati nel punto di congiungimento con il margine cardinale. L'apice è piuttosto piccolo ed arcuato. La superficie della conchiglia è ornata di pieghe concentriche, che avvicinate e piuttosto prominenti nella regione apiciale vanno dileguandosi e allontanandosi verso la regione palleale. In questa regione fra le pieghe concentriche si vedono, colla lente d'ingrandimento, delle linee fine che camminano parallelamente ad esse. Un po' al di sotto dell'apice partono delle strie numerose, fine, avvicinate ed ineguali, che si estendono fino al margine palleale, lasciando libero soltanto il lato anteriore e posteriore della conchiglia.

Questa specie, per le strie intercalate fra le pieghe concentriche, ricorda la *Posidonomya pannonica* Mojs.; essa però oltre di avere tutt'altre dimensioni, ne differisce ancora per la forma, per l'estensione delle sue strie radiali e per il numero delle sue strie concentriche che stanno intercalate fra ogni due pieghe, il che non è costante come in quella.

Essa è comune e proviene dalla contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo e dalla contrada piano del Cervo di monte Irione.

Posidonomya elegans Gemm.

Tav. IV, fig. 11 e 12.

Lunghezza . . . . 6.^{mm}
Altezza . . . . 5.^{mm}

Specie piccola, poco inequilaterale, leggermente convessa sulla regione apiciale, e dilatata regolarmente alla circonferenza. Il suo margine cardinale dritto e relativamente lungo si arrotondisce regolarmente ai punti d'unione coi margini anteriore e posteriore. L'apice termina un po' ottuso. Ad una certa distanza da esso partono alcune costelle radiali strette e rialzate, fra le quali, a diverse altezze della conchiglia, se ne intercalano altre secondarie finissime e variabili in numero, le quali come le

principali si estendono fino alla sua periferia. Queste costelle vengono intersecate da fine strie concentriche alcune delle quali sono fortissime.

Questa specie non ha affinità con le congeneri triassiche.

Essa è molto comune nella contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo e nella contrada Vallone della Pernice del monte s. Calogero di Termini Imerese.

Posidonomya gibbosa Gemm.

Tav. V, fig. 11 e 12.

Lunghezza	6.mm	4.mm
Altezza	5.mm	3.mm

Conchiglia piccolissima, inequilaterale, obliquamente ovale, fortemente rigonfiata, gibbosa. Tutta la sua superficie è munita di larghe e rilevate pieghe concentriche separate da solchi larghi e profondi. Sopra ognuna di queste pieghe si vedono con la lente d'ingrandimento delle strie concentriche d'accrescimento piuttosto forti.

Questa specie si distingue dai giovani della *Posidonomya affinis* Gemm., per essere molto più gibbosa e meno inequilaterale. Più affine per la forma alla *Posidonomya fasciata* Gemm. se ne allontana, ancora, perchè è più piccola, più gibbosa e più inequilaterale.

Questa specie è frequente nella contrada Vallone del Fico presso Parco e in quella della Madonna del Balzo del monte Irione. Essa, nella prima località, accompagna l'*Halobia Curionii* Gemm., e nella seconda l'*Halobia mediterranea* Gemm., l'*Halobia Beneckei* Gemm., l'*Halobia insignis* Gemm., la *Posidonomya fasciata* Gemm., il *Pinacoceras* cfr. *perauctum* Mojs. ecc.

Genere **Monotis** Bronn.

Monotis rudis Gemm.

Tav. V, fig, 4 a 7.

Lunghezza	15.mm	15.mm
Altezza	12.mm	13.mm

Conchiglia spessa, ovato-orbicolare, un po' più lunga che alta, appena rigonfiata obliquamente lungo la linea che dall'apice va al terzo posteriore del lato palleale. Il suo margine cardinale è retto, e la sua parte anteriore è alquanto più lunga della posteriore. Molto al di sotto dell'apice partono delle coste piuttosto grossolane in due cicli un po' distanti fra loro, le quali s'irradiano fino al margine palleale, lasciando libero il lato anteriore e posteriore della conchiglia. Le coste del primo ciclo ordinariamente sono un po' più grandi di quelli del secondo che stanno in modo alterno colle prime. Tutta la superficie della conchiglia è provvista ancora di strie concentriche, fra le quali ve ne ha molte forti e cerciniformi, che si estendono dal suo lato anteriore al posteriore, e che intersecando le coste radiali, le rendono alquanto ondulate. Queste strie concentriche d'accrescimento sulla superficie posteriore della conchiglia, corrispondente alla sinuosità marginale dell'orecchietta, si presentano anch'esse sinuose. L'orecchietta posteriore è piccola, depressa, e con leggiera sinuosità.

Questa specie ha qualche analogìa colla *Monotis Alberti* Goldf. dalla quale si

distingue per la forma generale, per il lato anteriore e posteriore privi di coste e per il loro andamento.

Essa proviene dalla contrada Neviera del monte Irione e dal monte Gallo dei dintorni di Prizzi, ove accompagna la *Monotis Stoppanii* Gemm. e la *Monotis limaeformis* Gemm. Nella seconda località essa è frequente.

Monotis Stoppanii Gemm.

Tav. V, fig. 1 a 3.

Lunghezza	13.mm	9.mm
Altezza	10.mm	7.mm

Questa elegante conchiglia è sottile, inequilaterale, trasversalmente ovale e dilatata. La sua regione posteriore è più larga dell'anteriore. Essa ha la regione apiciale convessa e l'apice acuto e alquanto prominente. La sua superficie è ornata di costelle radiali, lamelliformi, finissime, fra i cui interstizî, sulla regione palleale, se ne trovano alcune marginali. Esse vengono intersecate da numerose e finissime strie di accrescimento che le danno un aspetto quasi squamoso. La sua orecchietta posteriore è ottusangola e leggermente sinuata.

Questa specie pei suoi ornamenti si distingue facilmente dalle specie congeneri. Essa proviene dalle stesse località, in cui si trova la precedente specie.

Monotis limaeformis Gemm.

Tav. V, fig. 8 a 10.

Lunghezza	28.mm	30.mm
Altezza	22.mm	26.mm

Conchiglia obliquamente ovale, inequilaterale e leggermente convessa. Il suo margine cardinale è rettilineo e piuttosto corto. Il suo contorno anteriore è largamente rotondato e il posteriore quasi retto, troncato. La sua orecchietta posteriore è piccola, fortemente depressa e al suo contorno esterno leggermente sinuata; quella anteriore non è delimitata e si continua confondendosi colla superficie della conchiglia. Questa specie è provvista di numerose coste radiali delle quali quelle che occupano i due terzi anteriori della sua superficie sono prominenti, rotondate superiormente e alternanti con coste più piccole, mentre le altre che stanno sul suo terzo posteriore sono di uguale grandezza, poco rilevate e più larghe. Essa porta ancora numerose strie concentriche di accrescimento che essendo fortissime e serrate sulla sua regione posteriore, intersecando le coste, le rendono increspate, mentre sul resto della conchiglia assottigliandosi passano sulle coste senza modificarne l'andamento.

Questa specie è legata in stretta parentela colla *Monotis salinaria* Bronn dalla quale differisce, perchè ha il lato cardinale più corto e l'orecchietta posteriore meno estesa; inoltre essa ha nella sua regione posteriore le coste increspate e sul resto della sua superficie non è trasversalmente striolata.

Questa specie proviene dalle stesse località delle due precedenti Monotis.

SPIEGAZIONE DELLE TAVOLE

Tavola I.

Gli esemplari di questa tavola si conservano nel Museo di geologia e mineralogia della R. Università di Palermo.

Fig. 1, 2. *Daonella Styriaca* Mojs. Questi due esemplari provengono dalla montagna della Madonna della Scala presso Palazzo Adriano.

Fig. 3-5. *Daonella lenticularis* Gemm. Questi esemplari provengono dagli strati inferiori del calcare a noduli di selce cornea della contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo. L'esemplare fig. 3 è ingrandito.

Fig. 6. *Daonella Lepsiusi* Gemm. Proveniente dalla dolomia del monte Grifone dei dintorni di Palermo.

Fig. 7, 8. *Halobia simplex* Gemm. Della contrada Madonna del Balzo del monte Irione presso Bisacquino.

Fig. 9-12. *Halobia radiata* Gemm. Proveniente dalla contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo. Gli esemplari fig. 11 e 12 sono ingranditi.

Tavola II.

Gli esemplari di questa tavola si conservano nel Museo di geologia e mineralogia della R. Università di Palermo.

Fig. 1-3. *Halobia insignis* Gemm. Esemplari provenienti dalla contrada Piano del Cervo del monte Irione dei dintorni di Bisacquino.

Fig. 4. Idem. Regione cardinale ingrandita per far vedere gli ornamenti dell'orecchietta. Proviene dalla stessa località.

Fig. 5. Idem. Esemplare giovane ingrandito. Proveniente dalla stessa località.

Tavola III.

Gli esemplari di questa tavola si conservano nel Museo di geologia e mineralogia della R. Università di Palermo.

Fig. 1, 2. *Halobia transversa* Gemm. Esemplari provenienti dalla contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo.

Fig. 3, 4. *Halobia Beneckei* Gemm. Esemplari provenienti dalla contrada Madonna del Balzo del monte Irione presso Bisacquino.

Fig. 5, 6. *Halobia Curionii* Gemm. Esemplari provenienti dalla stessa località.

Fig. 7-9. *Halobia mediterranea* Gemm. Esemplari provenienti dalla stessa località.

Fig. 10-12. *Halobia Mojsisovicsi* Gemm. Esemplari provenienti dagli strati inferiori del calcare con noduli di selce cornea della contrada Madonna del Balzo del monte Irione presso Bisacquino.

Fig. 13. *Halobia subreticulata* Gemm. Esemplare proveniente dalla contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo.

Tavola IV.

Gli esemplari di questa tavola si conservano nel Museo di geologia e mineralogia della R. Università di Palermo.

Fig. 1. *Halobia subreticulata* Gemm. Esemplare trovato nella contrada Piano del Cervo del monte Irione presso Bisacquino.

Fig. 2, 3. *Halobia sicula* Gemm. Questi esemplari sono stati trovati nella contrada Madonna della Scala dei dintorni di Palazzo Adriano.

Fig. 4, 5. *Halobia Beneckei* Gemm. Esemplari giovani ingranditi, provenienti dalla contrada Madonna del Balzo del monte Irione presso Bisacquino.

Fig. 6. *Posidonomya affinis* Gemm. Esemplare proveniente dalla precedente località.

Fig. 7, 8. *Posidonomya fasciata* Gemm. Esemplari trovati nella precedente località.

Fig. 9, 10. *Posidonomya lineolata* Gemm. Esemplari provenienti dalla contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo. L'esemplare fig. 10 è ingrandito.

Fig. 11, 12. *Posidonomya elegans* Gemm. Esemplari provenienti dalla contrada Scaletta del monte Cassaro di Castronuovo. L'esemplare fig. 12 è ingrandito.

Tavola V.

Gli esemplari di questa tavola si conservano nel Museo di geologia e mineralogia della R. Università di Palermo.

Fig. 1, 2. *Monotis Stoppanii* Gemm. Questi esemplari sono provenienti dal monte Gallo dei dintorni di Prizzi. Quello fig. 2 è ingrandito.

Fig. 3. Idem. Esemplare della stessa provenienza ingrandito, in cui si vede la sua orecchietta sinuata.

Fig. 4, 5. *Monotis rudis* Gemm. Esemplari provenienti dal monte Gallo dei dintorni di Prizzi.

Fig. 6, 7. Idem. Gli stessi esemplari ingranditi.

Fig. 8-10. *Monotis limaeformis* Gemm. Questi esemplari sono stati trovati nella contrada Niviera del monte Irione presso Bisacquino.

Fig. 11, 12. *Posidonomya gibbosa* Gemm. Esemplari provenienti dalla contrada Valle del Fico, presso Palermo.

Fig. 13, 14. *Estheria Ciofaloi* Gemm. Esemplari provenienti dalla contrada Vallone Friguredda presso Termini Imerese. L'esemplare fig. 14 è ingrandito.

G. Tambuscio dis.

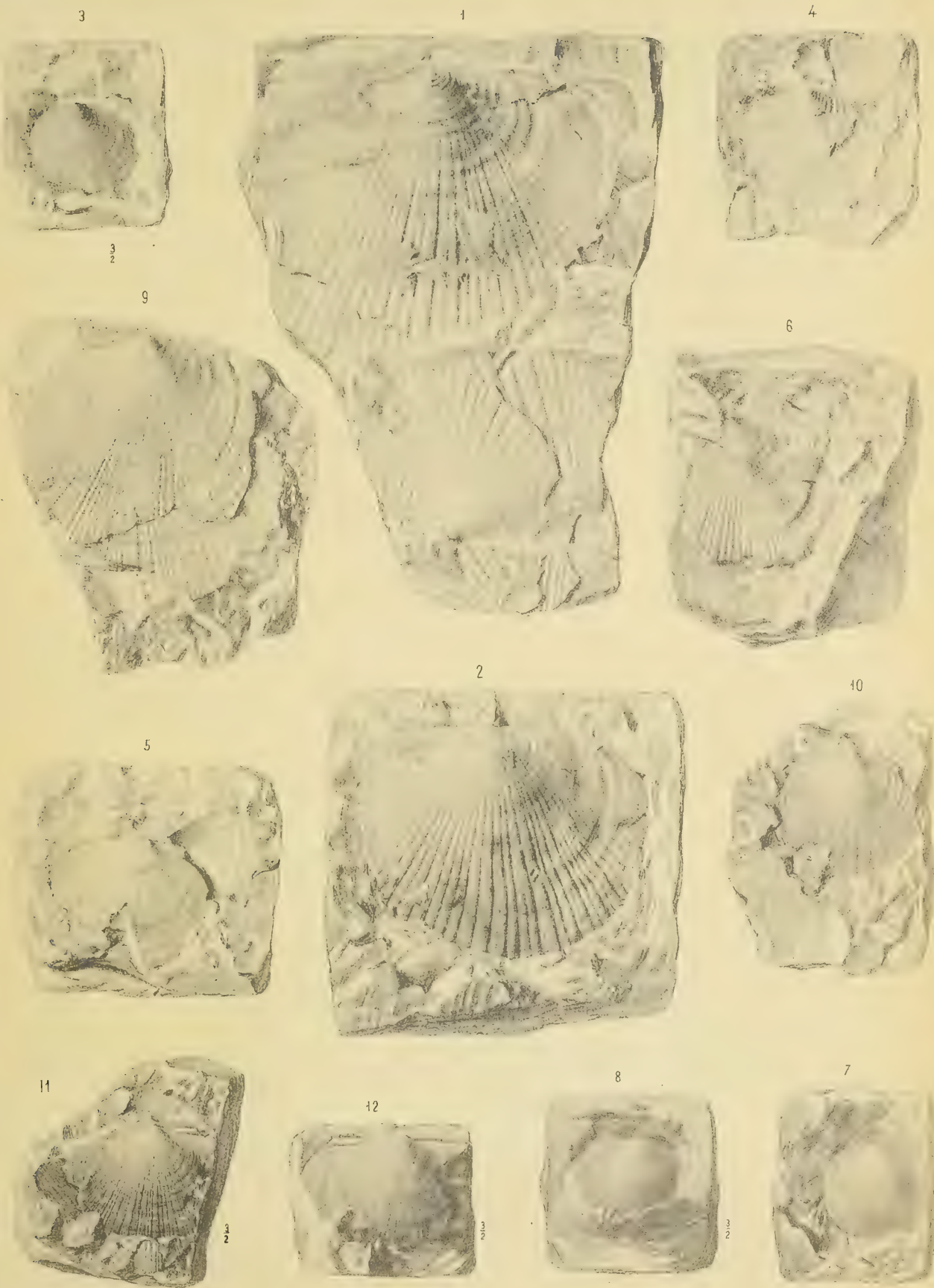
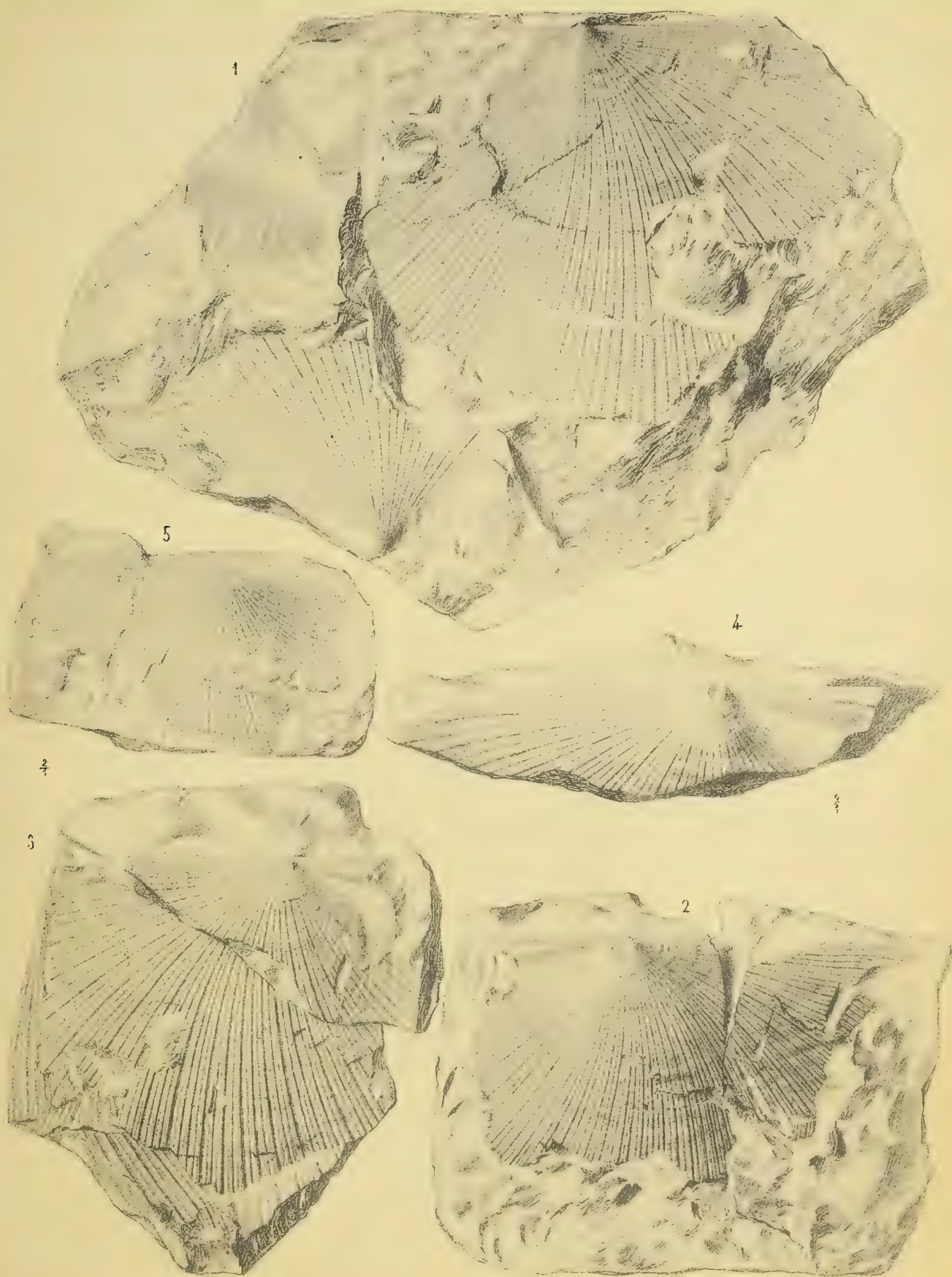
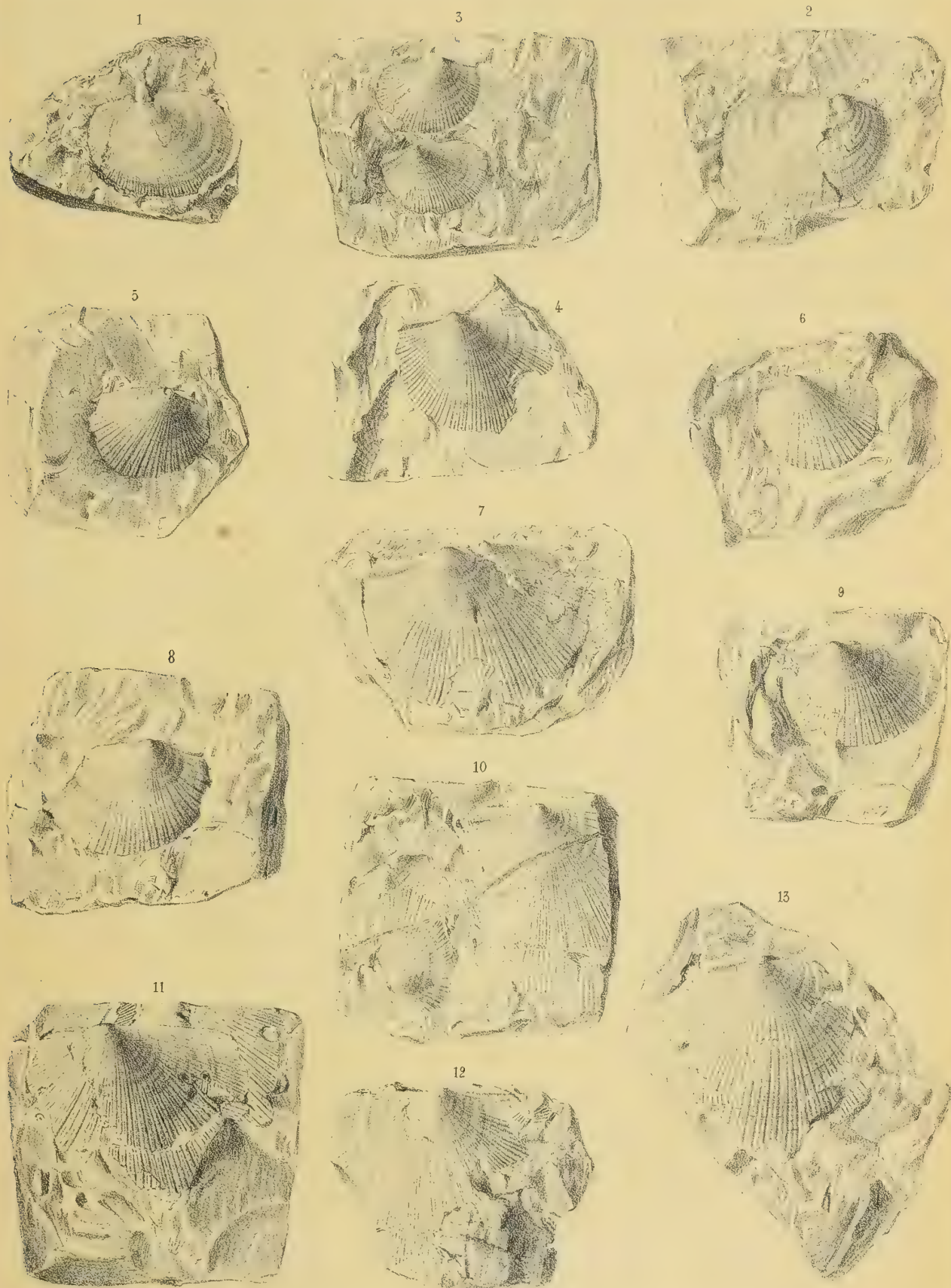
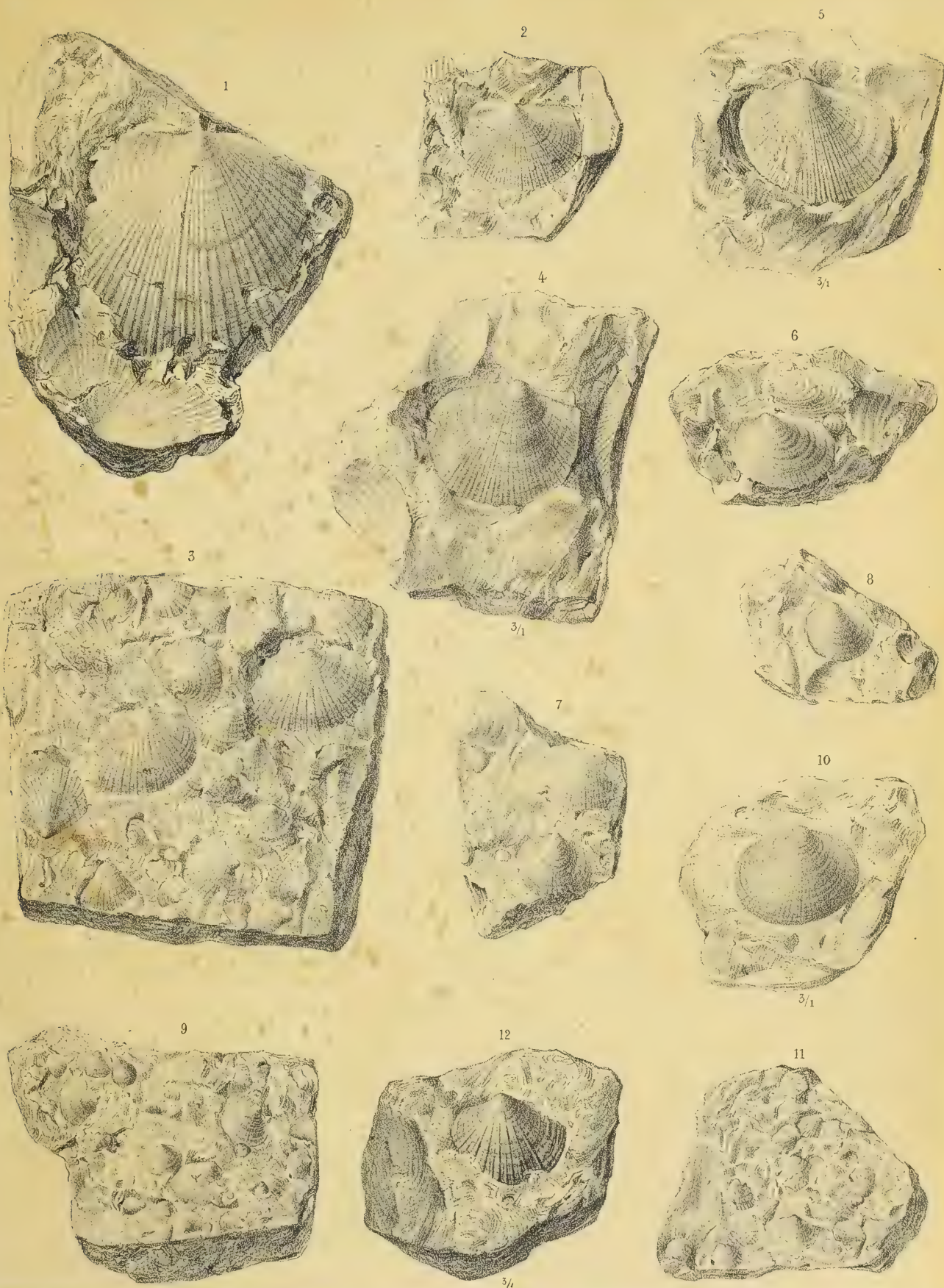
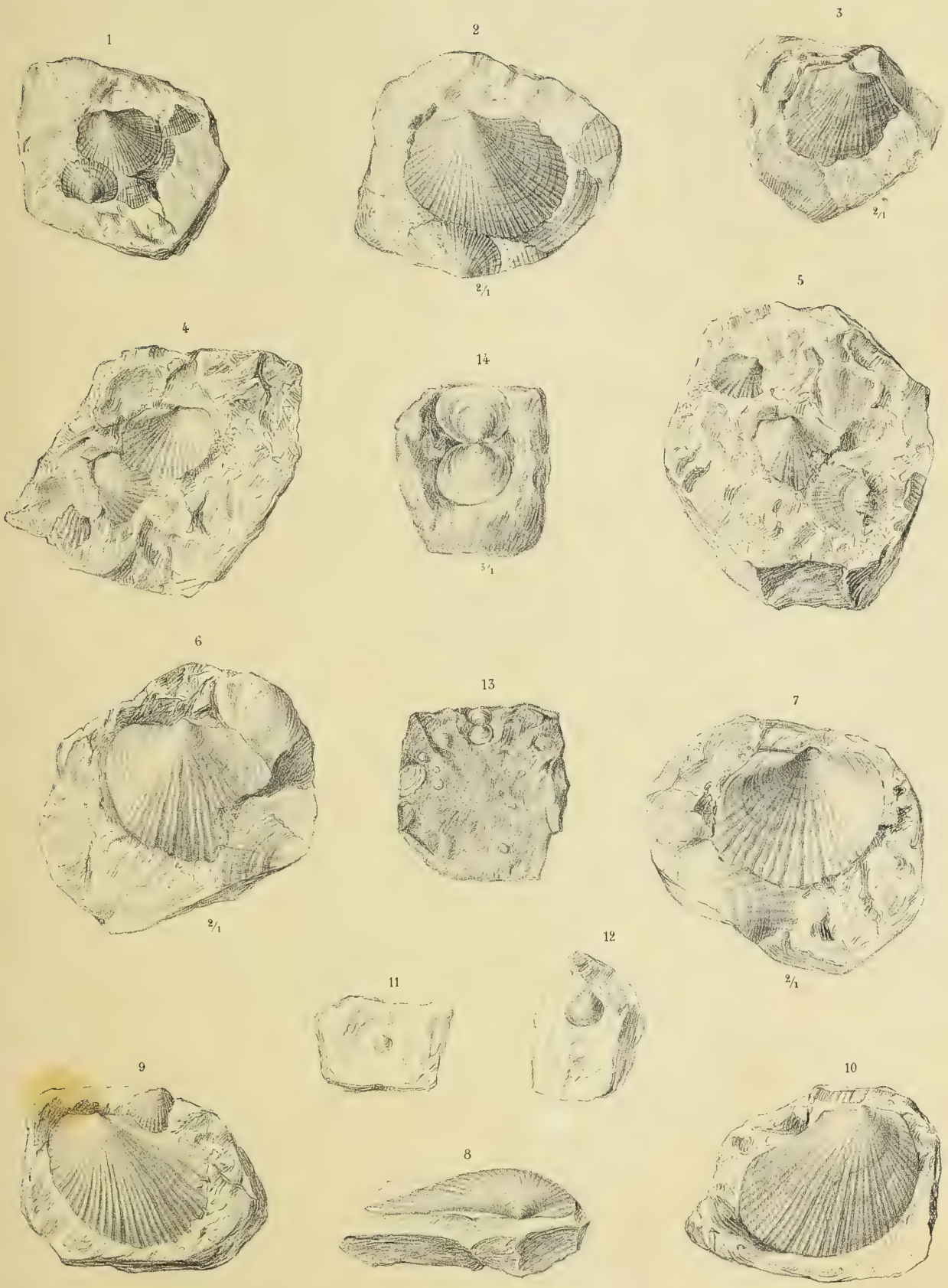
Eliotipia Martelli Roma

G. Tambuscio dis.

Eliotipia Martelli Roma

Lit. Bruno e Salomone Roma

Lit. Bruno e Salomone Roma

LIT. BRUNO E SALOMONE ROMA

Sul magnetismo permanente dell'acciajo a diverse temperature.
Studî sperimentali del dott. GIUSEPPE POLONI.

Sunto di Memoria, approvato per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 17 dicembre 1881.

Memoria premiata al concorso istituito dal Ministero della pubblica istruzione
per gl'insegnanti delle scuole secondarie e tecniche
col r. Decreto dell'8 aprile 1880.

---

1. In una prima Memoria su questo medesimo argomento esposi già [1] alcuni studî preliminari, fatti col metodo delle correnti indotte di Van Rees, su 3 calamite d'acciaio temperato, lunghe met. 0,50; cilindriche, del diametro di circa met. 0,01 che designai con A_n; A_s; (B_n, B_s).

Trovai che l'aumento di calore produce nel magnetismo diminuzioni permanenti e transitorie; che ad ogni temperatura massima a cui fu portata una calamita corrisponde un particolare *stato normale*, nel quale cioè - dopo ripetuti scaldamenti e raffreddamenti della calamita entro i medesimi limiti di temperatura - non si hanno più che variazioni transitorie; che inoltre il massimo coefficiente di decremento transitorio nel magnetismo ha luogo verso i 200°. Infine diedi anche le formule empiriche atte a rappresentare la legge delle variazioni transitorie per alcuni stati normali.

Ivi descrissi il modo di scaldare la calamita permanente, circondando il tubo di rame - entro cui era sospesa verticalmente - con un bagno anulare a olio, pure in rame saldato in argento, fornito di diverse lampade circolari a gas. Accennai come la temperatura si mantenga costante, agitando convenientemente l'olio, ed esposi anche qualche tabella numerica sul tempo richiesto dalla calamita per raggiungere la temperatura voluta.

Indicai inoltre i modi di eseguire speditamente le osservazioni col far giungere rapidamente la linea neutra al centro della spirale indotta, o collo scostarnela pure con rapidità; e come dalle deviazioni di una bussola di Weber desumessi la misura relativa del momento magnetico della sbarra.

2. Continuando l'anno scorso i medesimi studî, cimentai altre sette calamite permanenti, d'acciaio inglese più o meno temperato, lunghe met. 0,50; cilindriche, del diametro da mill. 6,5 a 7, del peso di circa 175 grammi. Munite alle estremità di anelli di ottone fissati a vite, erano sospese verticalmente entro il tubo centrale del bagno, ora col polo nord in basso (e allora le designavo con C_n, D_n, E_n, F_n, H_n, K_n,) ed ora col polo sud in basso (C_s, D_s, E_s, F_s, G_s H_s, K_s).

[1] Vedi *l'Elettricista* Vol. II. Aprile-Maggio 1878, e *Nuovo Cimento* 1878.

Il nuovo bagno anulare ad olio fu costrutto - salvo in qualche parte accessoria - in modo identico a quello descritto e disegnato nella predetta Memoria. Allorchè l'olio sia mantenuto in continua agitazione, la temperatura - come verificai più volte - è identica e nel bagno e nel tubo centrale ove sta la calamita; difatti intorno ad essa erano impediti i moti convettivi dell'aria, giacchè superiormente esso tubo non avea che un piccolo foro per dar passaggio alla funicella che sosteneva la calamita e inferiormente rimaneva chiuso da un leggiero tappo di carta che veniva facilmente rimosso dalla calamita stessa nello scendere.

Il circuito indotto era formato di una spirale, talora di 100 e tale altra di 200 giri di filo isolato ([1]), riunita a un buon galvanometro Weber, a specchio e a sistema astatico, collocato a conveniente distanza dalla calamita. Onde le deviazioni fossero sempre proporzionali alle correnti indotte veniva modificata opportunamente la resistenza del circuito, determinando però ogni volta il rapporto tra le correnti suscitate da una medesima forza elettromotrice. Aggiungasi che a controllo della sensibilità del galvanometro predetto poteano servire le deviazioni d'una bussola di Weber, entro la quale - con un semplice scambio di fili - si poteva far circolare la medesima corrente indotta che in quello.

3. Aveva intrapreso il nuovo studio coll'intento seguito nel primo sulle calamite A, B, di studiare da principio soltanto le variazioni del magnetismo totale, col misurare cioè ogni volta la corrente indotta nella spirale quand'essa veniva attraversata sempre da una metà della calamita. Ma bentosto mi avvidi che lo studio di coteste variazioni doveva essere condotto di pari passo con quello della distribuzione del magnetismo lungo la sbarra. Era perciò necessario che la spirale venisse attraversata anche da frazioni più grandi o più piccole della calamita. A tale intento la sbarra magnetica, calata mediante la funicella a cui era sospesa, veniva arrestata su un piatto orizzontale sostenuto da un anello, il quale, mediante una vite di pressione, veniva fissato - a distanze variabili dal centro della spirale indotta - su un' asta di legno divisa in mezzi centimetri e disposta verticalmente sotto il bagno.

Un solo sperimentatore può in tal guisa fare le osservazioni non soltanto sul magnetismo totale, ma eziandio sulla distribuzione di esso. Raggiunta la temperatura voluta e mantenutala costante per circa 10 minuti, si fissa il piatto a un punto tale che la estremità inferiore della sbarra, che viene ad appoggiarsi su di esso, si trovi a 25 centim. dal centro della spirale indotta (posizione ordinaria della linea neutra nelle sbarre da me cimentate). Ponendo di poi l'occhio al cannocchiale si abbassa la calamita (a circuito aperto) finchè essa incontra il piatto, avendo cura di evitare gli urti troppo forti; si chiude il circuito indotto, si legge la corrente promossa col far salire la calamita a traverso la spirale colla massima velocità; indi si rimette a posto il tappo inferiore del tubo centrale del bagno, stato rimosso dalla calamita nello scendere; si agita l'olio; si osserva il termometro per regolare

([1]) In una coppia di spirali indotte i giri di filo erano più raccolti che nell'altra; cioè l'altezza delle spirali era di 1 centim. nell'una coppia e di 5 centim. nell'altra. Tuttavia le correnti ottenute dall' una e dall' altra, a parità di circostanze, furono identiche.

opportunamente le fiamme, ove la temperatura tendesse a variare; si muta la posizione del piatto; si fa daccapo l'osservazione ecc.

4. Secondo i lavori di Van Rees [1] se m rappresenta il magnetismo libero alla distanza x dall'estremità di una sbarra, l'integrale

$$\int_0^x m dx$$

che rappresenta la quantità di magnetismo libero contenuto nella lunghezza x della sbarra, è altresì proporzionale alla corrente indotta nella spirale che si muove rapidamente dal punto x fino al di là dell'estremità della sbarra medesima; il che fu dallo stesso Van Rees trovato conforme all'esperienza. Vero è che al Van Rees furono mosse alcune obiezioni; ma il sig Blondlot [2] muovendo dalla legge elementare di Neumann sulle correnti indotte ha dimostrato, pel caso di sbarre sufficientemente lunghe, che il predetto integrale è proporzionale al magnetismo totale della calamita che attraversi rapidamente con una sua metà la spirale indotta.

Pel caso mio, ove si tratta di calamite sottili e lunghe 50 cent. la cui distanza polare è di circa 44 centim., il teorema si applica per qualunque valore di x purchè non troppo piccolo.

Prendendo per m la formula di Biot sotto la forma data da Jamin che la confermò recentemente [3]:

$$m = a\,(k^{-x} - k^{-(l-x)}),$$

si ottiene:

$$(\alpha)\quad \mathrm{M} = \int_0^x m dx = \mathrm{A}\,(1 + k^{-l} - k^{-x} - k^{-(l-x)})$$

ove l è la lunghezza della sbarra, a e k due costanti, $\mathrm{A} = \frac{a}{\log k}$.

Le mie esperienze che danno appunto il valore di M per diverse sezioni della calamita concordano con quest'ultima formula per *tutte* le calamite a temperatura non molto elevata e (sotto certe condizioni) per *tutte* le temperature osservate.

Valgano ad esempio le seguenti tabelle che contengono i valori osservati e calcolati per le calamite G_s ed H_u ridotte allo stato normale corrispondente alla temperatura rispettivamente di 180° e di 300°.

[1] Pogg. Ann. Vol. LXX, 1847, e Vol. LXXIV, 1848.
[2] Compt. Rend. de l'Ac. 1° Sem. 1875, pag. 653.
[3] Journal de Phys. d'Almeyda Tomo V. Febbraio 1876.

TABELLA I.

Calamita G. — Stato normale per 180° — *Log. k* = 0,050
Valori di M.

t		A	$x=4$ cent.	7	10	13	16	19	22	25
	oss.	—	39. 5	59. 5	74.25	85.	93.	97. 5	100.	101.
15° circa	calc.	112	41.10	61.50	73.78	85.28	92.34	96.61	98.98	99.73
	diff.		— 1.60	— 2.00	+ 0.47	— 0.28	+ 0.66	+ 0.89	+ 1.02	+ 1.27
	oss.	—	38.05	57.25	72.	81.	89.	93.50	96. 5	96. 5
100°	calc.	108	39.66	59.34	73.08	82.27	89.07	92.19	95.48	96.19
	diff.		— 1.61	— 2.09	— 1.08	— 1.27	— 0.07	+ 1.31	+ 0.02	+ 0.31
	oss.	—	37.	56.	69.	79.	87.	90.	92.	93.
130°	calc.	104	38.18	57,12	70.39	79.20	85.76	89.72	91.91	92.62
	diff.		— 1.18	— 1.12	— 1.39	— 0.20	+ 1.24	+ 0.28	+ 0.09	+ 0.38
	oss.	—	37.	55.	68.	79.	84.	87.	89.	90.
150°	calc.	102	37.43	56.01	69.02	77.67	84.10	87.98	90.14	90.83
	diff.		— 0.43	— 1.01	— 1.02	+ 2.33	— 0.10	— 0.98	— 1.14	— 0.83
	oss.	—	35. 5	52.	65.	74. 5	80.	84.	86.	87.
165°	calc.	98	35,98	53.84	66.33	74.64	80.81	84.55	86.61	87.29
	diff.		— 0.48	— 1.84	— 1.33	— 0.14	— 0.81	— 0.55	— 0.61	— 0.29
	oss.	—	34.	51.	64. 5	73. 5	78. 5	81.	82. 5	83.
180°	calc.	94	34.52	51.64	63.63	71.60	77.52	81.10	83.10	83.73
	diff.		— 0.52	— 0.64	+ 0.87	+ 1.90	+ 0.98	— 0.10	— 0.60	— 0.73

TABELLA II.

Calamita H_n — Stato normale per 300° — Log. $k = 0{,}04$

Valori di M.

t		A	$x = 4$ cent.	7	10	13	16	19	22	25
	oss.	—	54.	78.	97.	115.	126.	183.	136. 5	138.
15° circa	calc.	170	52. 7	79.22	99.79	114.75	125.29	183.43	136.34	137. 7
	diff.		+ 1. 3	— 1.22	- 2.79	+ 0.25	+ 0.71	— 0.43	+ 0.16	+ 0. 3
	oss.	—	50.	70.	91. 5	102.	114.	119.	123.	124.
100°	calc.	153.5	47.55	71.50	90.06	103.58	113.09	119.69	121.87	123. 4
	diff.		+ 2.45	— 1.50	+ 1.44	— 1.58	+ 0.91	— 0.31	+ 1.13	+ 0. 6
	oss.	—	46.	64.	85.	97.	104.	111.	114.	115.
130°	calc.	143.5	44.48	66.87	84.22	96.86	105.75	111.93	113.88	115.43
	diff.		+ 1.52	— 2.87	+ 0.78	+ 0.14	— 1.75	— 0.93	+ 0.12	— 0.43
	oss.	—	45.	63. 5	79. 5	94.	100.	106.	109·50	111.
150°	calc.	137.5	42.58	64.04	80.70	92.81	101.33	107.25	109.08	110.47
	diff.		+ 2.42	— 0.54	— 1. 2	+ 1.19	— 1.33	— 1.25	+ 0.42	+ 0.53
	oss.	—	42.	60, 5	75. 5	85.	96.	100.	102.	103.
165°	calc.	128.5	39.85	50,91	76.44	86.74	94.72	99.65	101.90	103. 2
	diff.		— 2.15	+ 0.59	— 0.94	— 1.74	— 1.28	+ 0.35	+ 0.10	— 0. 2
	oss.	—	39.5	51. 5	68.	77.50	82. 5	86; 5	90.	91.
180°	calc.	113.5	35.15	52.90	67.62	76.60	83.65	88.53	89.88	91.03
	diff.		+ 4.35	— 1.40	+ 0.38	+ 0.90	— 1.15	— 2.03	+ 0.12	— 0.03
	oss.	—	32.	44. 5	56.	66. 5	72.	76.	78.	79.
190°	calc.	97.50	29.18	45.47	57.24	65.85	71.90	75.94	78.25	79.
	diff.		+ 2.82	— 0.97	— 1.24	+ 0.65	+ 0.10	+ 0.06	— 0.25	0 —
	oss.	—	23.	36.	44. 5	49.	55. 5	60. 5	62. 5	62. 5
200°	calc.	77.75	23.27	36.27	45.65	52.61	57.34	60.56	62.40	63.
	diff.		— 0.27	— 0.27	— 1.15	+ 3.61	— 1.84	— 0.06	+ 0.10	— 0. 5
	oss.	—	19. 5	26. 5	33. 5	40.	44. 5	47.	49.	49. 5
210°	calc.	61	18.23	28.12	35.78	41.16	44.96	47.49	48.93	49.40
	diff.		+ 1.27	— 1.92	— 2.28	— 1.16	— 0.46	— 0.49	+ 0.07	+ 0.10
	oss.	—	19.	28. 5	32. 5	36.	39.	42.	43.	43.
230°	calc.	53	16.94	24.70	31.10	35.77	39.07	41.27	42.52	42.93
	diff.		+ 2.06	+ 3.80	+ 1.40	+ 0.23	— 0.07	+ 0.73	+ 0.48	+ 0.07
	oss.	—	17. 5	23. 5	29.	33. 5	36. 5	39.	39.	40.
300°	calc.	50	14.93	23.31	29.34	33.75	36.03	38.93	40.11	40.42
	diff.		+ 2.57	+ 0.19	— 0.34	— 0.25	+ 0.47	+ 0.07	— 1.11	— 0.42

5. Ripeterò qui quel che ho accennato nel primo lavoro, cioè che le correnti indotte sviluppate nelle parti metalliche del bagno, che trovansi in comunicazione col suolo, non influiscono sensibilmente sulla calamita in movimento. Aggiungo però che il circuito indotto vuol essere perfettamente isolato da esse. La Terra poi influisce sulla calamita in movimento in modo da rinforzare o da indebolire la corrente del solenoide che ne terrebbe luogo, secondochè essa tiene rivolto in basso il polo nord ovvero il polo sud. La correzione da farsi però è piccola ed è proporzionale al magnetismo totale posseduto dalla sbarra.

Fin da principio verificai se la corrente indotta era la medesima, a parità di condizioni, a una data temperatura, sia che questa si raggiungesse scaldando oppure raffreddando. Dai numeri ottenuti risulta che nel raffreddamento la sbarra richiede alquanto più tempo per raggiungere lo stato proprio d' una data temperatura che non nel riscaldarsi, purchè essa non abbia più a soffrire pel calore alcuna variazione permanente; a ragione di ciò eseguii sempre in seguito le osservazioni a temperatura crescente, salvo a lasciare il tempo voluto perchè la calamita raggiungesse lo stato corrispondente a quella temperatura. Questo tempo è tanto maggiore quanto maggiore è la diminuzione totale del magnetismo, e va diminuendo coll'avvicinarsi della calamita ad uno stato normale, come avvertii nel primo lavoro. Aggiungo poi qui che il numero dei riscaldamenti successivi necessari per una medesima calamita a raggiungere gli stati normali corrispondenti alle diverse temperature, è sensibilmente proporzionale alla diminuzione permanente sofferta dal magnetismo iniziale, come appare dal seguente quadro:

TABELLA III.

Rapporto tra le perdite di magnetismo e il numero dei riscaldamenti.

Calamita	Stato normale per $t =$	100°	150°	180°	200°	240°	OSSERVAZIONI
C_n	Diminuzione di M N.° dei riscaldamenti	12 3	35 8	— —	62 14	70 18	Era diverso il magnetismo iniziale delle calamite e diversi erano i circuiti indotti per ognuna di esse.
	rapporto	4	4.4	—	4.4	3.9	
D_n	Diminuzione di M N.° dei riscaldamenti	10 4	25 9	— —	55 21	60 24	
	rapporto	2.5	2.8	—	2.6	2.5	
G_s	Diminuzione di M N.° dei riscaldamenti	24 4	68 10	104 15	139 22	— —	
	rapporto	6	6.8	6.9	6.3	—	
A_s	Diminuzione di M N.° dei riscaldamenti	33 6	77 13	— —	— —	— —	Calamita studiata nella 1ª Memoria.
	rapporto	5.5	5.9	—	—	—	

6. Avendo eseguito parecchie migliaia di osservazioni in circa 300 serie di esperienze, mi accadde molte volte che si strappasse la funicella che sosteneva la calamita e questa urtasse fortemente contro il suolo. Ogni urto produce una piccola diminuzione permanente nel magnetismo della sbarra - massime se essa è calda - quando però non abbia per anco raggiunto lo stato normale; ma una volta raggiunto lo stato normale, anche le scosse non hanno più influenza. Insomma queste - al pari del calore - producono diminuzioni permanenti nel magnetismo. Ma dopo ripetute scosse - come dopo ripetuti scaldamenti - non si ottiene più verun effetto duraturo.

Volendo fare della teoria, convien dire che le azioni meccaniche ed il riscaldamento, aumentando la velocità dei magneti elementari che costituiscono la calamita, ne facilitano il disorientamento sotto l'influenza delle forze molecolari che tendono a ricondurli nelle posizioni naturali. Al contrario il riscaldamento e le azioni meccaniche durante la magnetizzazione facilitano il còmpito delle forze orientatrici, nella stessa guisa - come osserva il Wiedemann - che l'attrito durante il movimento richiede, per essere vinto, una forza più piccola che non l'attrito alla partenza.

È adunque da prevedersi che, mentre una sbarra d'acciajo calda sta disposta verticalmente come nelle mie esperienze, la Terra debba orientarne i magneti elementari e suscitarvi un polo nord alla estremità inferiore. Gli è appunto ciò che verificai su tre sbarre [1] che scaldai più volte fino a 300° senza averle prima calamitate. Nel primo scaldamento l'intensità del magnetismo acquistato per influenza della Terra va sempre aumentando continuamente colla temperatura; nel secondo la quantità di magnetismo acquistata è meno grande che nel primo, e si mantiene pressochè costante a temperature superiori a 200°; nei successivi riscaldamenti l'acquisto di magnetismo è sempre meno notevole, anzi si fa sentire qualche diminuzione a temperature elevate. Ma ad ogni raffreddamento [2] vi ha sempre guadagno di magnetismo, notevolmente nel primo, sempre meno nei successivi; finchè, raggiunto un valore massimo, esso magnetismo manifesta una distribuzione rappresentabile ancora colla formula (α), e segue dipoi l'andamento ordinario da me esaminato nelle altre calamite.

È ovvio quindi di ammettere che nella magnetizzazione delle sbarre fissate verticalmente, come di parafulmini o altro, intervengano efficacemente le continue variazioni di temperatura.

Quando però le calamite da me cimentate conservavano sensibilmente la medesima temperatura, ancorchè tenute sospese verticalmente, non risentivano influenza alcuna da parte della Terra. Bensì ne risentivano grandemente scaldandole, segnatamente a temperature superiori a 180°.

Supponiamo di aver raggiunto con ripetuti riscaldamenti un primo stato normale, che chiamerò S'_n per una certa temperatura T in una certa sbarra S_n (polo nord in basso): scaldandola capovolta cioè in posizione S_s, ancora entro i medesimi limiti di temperatura, intervengono diminuzioni permanenti che vanno impicciolendo con riscaldamenti successivi, finchè si raggiunge un nuovo stato normale per la sbarra, che dirò S'_s. Capovolta di nuovo e scaldata sempre fino alla medesima temperatura T, si manifestano aumenti permanenti nel magnetismo, i quali alla loro volta vanno diminuendo in grandezza nei riscaldamenti successivi, finchè si è raggiunto

(1) Una di queste cioè la E si spezzò poi nel ritemprarla.
(2) Nelle mie esperienze la calamita si lasciava sempre raffreddare lentamente entro il bagno.

un nuovo stato normale S''_n, diverso dal primo S'_n. E così via. Dopo varî capovolgimenti e riscaldamenti entro i medesimi limiti di temperatura tende a formarsi uno stato normale *definitivo* per *ciascuna* posizione della calamita.

Cotesti successivi stati normali S'_n, S''_n, S'''_n.... corrispondenti a una stessa posizione della calamita differiscono tra loro in quanto la calamita possiede quantità di magnetismo sempre più piccole. Ma il modo con cui esso varia col crescere della temperatura è analogo in tutti, salvo che variano dall'uno all'altro i parametri della curva che rappresenta il fenomeno. Lo stesso dicasi degli stati normali S'_s, S''_s, S'''_s.... corrispondenti all'altra posizione del magnete: in questi poi le quantità assolute di magnetismo sono anco rispettivamente più piccole che nei precedenti.

7. Per riassumere le cose principali osservate partitamente sulle calamite studiate, dirò dapprima che esse erano tutte poco temperate, e venivano calamitate immergendole completamente entro un'elica di filo grosso, lunga cent. 60 e percorsa da una corrente di 3 elementi Bunsen. Ecco i numeri che rappresentano il relativo magnetismo totale M_0 comunicato inizialmente alle singole sbarre, quale veniva misurato in tutta la metà della sbarra:

Calamita	C	D	F	G	H	K
M_0	135	120	133	128	174	160

I valori di k che secondo la formula (α) rappresentano la legge della distribuzione del magnetismo e, secondo Jamin ('), lo *stato fisico* della sbarra, sono poco differenti: oscillano fra 1,007 e 1,012; onde i poli, la cui posizione, come è noto, si calcola colla formula

$$x = \frac{\int_0^{\frac{1}{2}l} mx\,dx}{\int_0^{\frac{1}{2}l} m\,dx}$$

sono collocati a millim. 31 circa dall' estremità.

Le sbarre C e D col polo nord in basso raggiunsero successivamente con ripetuti scaldamenti gli stati normali corrispondenti alle temperature 100°, 150°, 200°, 240°, 300°; e in seguito vennero ancora studiate a temperatura elevata sia col polo sud, sia col polo nord in basso.

La F invece fu portata a dirittura allo stato normale per 240° e di poi studiata pure alternatamente nelle due posizioni indicate anche fino a 300°.

La G passò successivamente per gli stati normali corrispondenti a 100°, 150° 180°, 200°, 230° sempre col polo sud in basso: poi fu studiata, sempre fino a 230°, anche col polo nord in basso, e più tardi in ambe le posizioni fino a 300°.

Infine le H e K furono spinte a dirittura a 300°, l'una col polo nord in basso, l'altra col polo sud. Ma a differenza delle precedenti, le quali furono magnetizzate avanti di scaldarle, queste due H e K, prima di essere sottoposte all'azione della corrente magnetizzante, furono scaldate ripetutamente a 300°, finchè ebbero acquistato un magnetismo permanente sotto l'influenza della Terra (come ho indicato nel § precedente); e il magnetismo che veniva poi loro comunicato dalla corrente dell'elica era nel medesimo senso di quello suscitato dalla influenza tellurica.

(') Journal de Phys. loc. cit.

Comincierò dall'esporre in poche tabelle numeriche alcuni rapporti tra i numeri osservati pel magnetismo totale nelle diverse serie per ciascuna sbarra, ottenuti cioè col trasportare rapidamente la linea neutra (¹) dal centro della spirale a grande distanza da essa.

Non sarà superfluo ripetere: che scaldando per la prima volta una calamita ad una temperatura non mai da essa raggiunta perde del magnetismo che *in parte riacquista* tornando a temperatura ordinaria; che portandola una seconda volta alla medesima temperatura perde ancora del magnetismo - meno però di prima - che pure in parte riacquista tornando a temperatura ordinaria, e così via: finchè dopo un certo numero di riscaldamenti si raggiunge lo stato normale per quella temperatura massima, nel quale tutto il magnetismo perduto nel riscaldamento vien riacquistato col raffreddamento, nel quale cioè - scomparse le perdite permanenti - non rimangono che le perdite transitorie:

Così nelle seguenti tabelle si leggeranno:

colonna *a*) i rapporti tra il magnetismo M_0 comunicato inizialmente alla calamita e il magnetismo M'_0 posseduto da essa al principio di ogni serie: questi numeri rappresentano l'andamento delle variazioni permanenti.

colonne *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*) i rapporti tra il magnetismo M'_0 posseduto dalla calamita al principio d'ogni serie e quello rimastole alla temperatura di 100°, 150°, 180°, 200°, 240°, 300° rispettivamente: anche questi numeri si rendono costanti quando ci sono soltanto perdite transitorie.

Furono omesse, per brevità, parecchie serie tra uno stato normale e il successivo, nelle quali le perdite permanenti del magnetismo vanno mano mano diminuendo.

Tabella IV.

Rapporti dei valori di M alla linea neutra
Medie delle calamite C_n D_n

Serie	*a* $\frac{M_0}{M'_0}$	*b* $\frac{M'_0}{M_{100}}$	*c* $\frac{M'_0}{M_{150}}$	*e* $\frac{M'_0}{M_{200}}$	*f* $\frac{M'_0}{M_{240}}$	OSSERVAZIONI
1.	1.00	1.13	—	—	—	
2.	1.08	1.08	—	—	—	
3-6.	1.08	1.08	—	—	—	Stato normale 100°
7.	1.17	1.06	1.16	—	—	
.....	...	...	...			
12-16.	1.30	1.06	1.15	—	—	» » 150°
17.	1.40	1.06	1.15	2.12	—	
18.	1.50	1.06	1.16	1.90	—	
.....	...	...	...	...		
26.	1.85	1.06	1.14	1.85	—	» » 200°
27.	2.10	1.06	1.14	1.93	2.25	
.....	...	...	...	...	...	
31-33.	2.16	1.06	1.14	1.92	2.23	» » 240°

(¹) Dirò più sotto come la linea neutra in alcuni casi si spostasse dalla metà della sbarra.

Tabella V.

Rapporti dei valori di M alla linea neutra
Calamite F_n ed H_n

Serie	a $\frac{M_0}{M'_0}$		b $\frac{M'_0}{M_{100}}$	c $\frac{M'_0}{M_{150}}$	e $\frac{M'_0}{M_{200}}$	f $\frac{M'_0}{M_{240}}$	g $\frac{M'_0}{M_{300}}$	OSSERVAZIONI
	H_n	F_n	F	F	F	F	H	
1.	1.00	1.00	1.07	1.17	2.08	2.29	6.15	
2.	2.26	1.41	04	12	1.74	1.90	3.45	
3.	2.41	1.52	04	14	1.80	92	3.25	
4.	2.52	1.60	05	14	82	96	3.25	
5.	2.66	1.75	04	12	75	87	3.22	
6.	2.81	1.77	06	12	73	88	3.31	
7.	2.86	1.83	05	13	71	83	3.30	
8. e segg.	2.90	1.88	1.05	1.13	1.75	1.87	3.30	Stato normale 240°

Tabella VI.

Rapporti dei valori di M alla linea neutra
Calamite G_s K_s

Serie	a t ord.		b 100°	c 150°	d 180°	e 200°	f 230°	g 300°	OSSERVAZIONI
	K	G	G	G	G	G	G	K	
1.	1.	1.00	1.14	—	—	—	—	8	
2.	2.31	1.11	1.06	—	—	—	—	?	
3.	2.88	1.12	1.05	—	—	—	—	10	
4.	3.0	1.14	1.05	—	—	—	—	11.2	
5.	3.4	1.16	1.04	—	—	—	—	11.7	
6.	3.4	1.16	1.04	1.19	—	—	—	12	Stato normale
7.	—	1.29	—	1.15	—	—	—	—	
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .				
10-11.	—	1.36	—	1.11	1.44	—	—	—	» » 150°
12.	—	1.65	—	1.15	1.31	—	—	—	
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .			
15-18.	—	1.86	—	1.12	1.21	2.06	—	—	» » 180°
19.	—	2.06	—	1.16	1.41	1.85	—	—	
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		
25-27.	—	2.52	—	1.21	1.41	2.19	2.76	—	» » 200°
28.	—	2.78	—	1.20	1.40	2.05	2.73	—	
. . . . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .		
31-32.	—	3.00	—	1.18	1.50	2.64	2.97	—	» » 230°

Dal complesso di questi numeri si rileva:

1.° Che l'andamento generale del fenomeno è identico per tutte le calamite cimentate, cioè: variazioni sia transitorie sia permanenti relativamente piccole, ma crescenti, fino a 180°; grandi fra 180° e 200°; massime intorno a 190°; più piccole quindi sopra 200°.

2.° Per le calamite C_n, D_n, F_n, H_n, studiate cioè col polo nord in basso, i rapporti delle colonne *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g* che rappresentano variazioni in gran parte transitorie, si rendono presto costanti e non mutano più anche passando agli stati normali successivi; ancorchè le variazioni permanenti (colonna *a*) si manifestino anche di poi.

3.° Ancora in tutte le predette sbarre, sebbene state trattate in modo diverso, per ogni stato normale successivo le variazioni transitorie sono sensibilmente tanto grandi quanto le perdite permanenti sofferte dal magnetismo totale avanti di raggiungere quel medesimo stato normale. Si ponga perciò mente ai numeri sottosegnati che si trovano su una stessa linea orizzontale nelle tab. IV e V.

4.° Le tre sbarre C_n, D_n, F_n, per giungere allo stato normale 240° perdettero sensibilmente la medesima quantità di magnetismo; tuttavia la F_n che è stata portata a dirittura a questa temperatura ha raggiunto il detto stato normale più presto che non le altre, le quali vi pervennero dopo essere passate successivamente per gli stati normali 100°, 150°, 200°; anche, ben inteso, non tenendo conto delle serie di riscaldamenti ripetuti per questi ultimi a fine di determinarne le leggi.

5.° Le calamite G_s, K_s studiate col polo sud in basso offrono perdite permanenti più rilevanti; non presentano variazioni transitorie costanti, bensì sempre crescenti; infine i numeri sottosegnati in una medesima linea orizzontale nella tab. VI, analoghi a quelli sottosegnati per le sbarre precedenti, non sono eguali.

8. Venendo ora alla distribuzione del magnetismo, cercherò colla maggiore brevità possibile di dare un'idea intorno a fenomeni molto complessi, dei quali non sarà troppo facile rendersi la spiegazione, se non dietro altri nuovi studî.

Dirò dunque dapprima che *finchè non si oltrepassa la temperatura di* 180° regge sempre in una calamita la medesima legge di distribuzione rappresentabile colla ripetuta formula:

$$M = A\ (1 - k^{-x} - k^{-(50-x)} + k^{-50}$$

ove A diminuisce al crescere della temperatura e k è costante, per una medesima sbarra, a tutte le temperature. Valga ad esempio la tabella I già riferita per la calamita G_s, a cui potrei far seguire altre tabelle consimili per altre calamite.

Ma *al di sopra di* 180° il gruppo delle H, K si comporta in modo differente dal gruppo delle C, D, F, G, e rammento che le prime due vennero scaldate più volte sotto l'influenza della Terra avanti di essere calamitate; le altre quattro invece vennero magnetizzate prima di subire i riscaldamenti.

Nella H e nella K, nonostante i ripetuti riscaldamenti, la legge di distribuzione (indicata nella formula dal valore di k) rimane sempre la medesima a tutte le temperature; la linea neutra rimane sempre alla metà della sbarra: il capovolgere la

sbarra in successivi scaldamenti fa bensì mutare di poco il valore di k, ma questo rimane poi costante per tutte le temperature e la linea neutra non si sposta mai.

La tab. II contiene appunto i valori di M osservati nella H'_n (primo stato normale) e calcolati assumendo Log $k = 0,040$. Potrei, se non lo credessi superfluo, far seguire altre tabelle analoghe per gli stati normali H'_s ed H''_n, dalle quali non appare meno soddisfacente l'accordo tra l'osservazione e il calcolo, assumendo Log. $k = 0,030$. Così dicasi per la K_s assumendo Log $k = 0,035$.

Invece in ciascuna delle altre sbarre C, D, F, G scaldate oltre i 180° col polo nord in basso si sposta la linea neutra *verso il polo nord*, diluendosi, per così dire, il magnetismo sud lungo ben due terzi della sbarra; tuttavia il valore di k, che rappresenta la distribuzione del libero magnetismo nord lungo il terzo della sbarra dove fu confinato, si può in generale ritenere costante. Se poi le sbarre sieno state scaldate col polo sud in basso oltre i 180°, allora non solamente si sposta la linea neutra *ancora verso il polo nord*, ma varia altresì il valore di k da una temperatura all'altra.

Esaminando le condizioni sotto le quali vennero cimentate le dette calamite non saprei attribuire ad altro la causa dei fenomeni diversi pei due gruppi che all'avere scaldato a 300° le sbarre H e K avanti di magnetizzarle. Converrà perciò trovar modo di studiare la distribuzione del magnetismo anche ad alta temperatura in una sbarra mantenuta sempre in direzione perpendicolare al meridiano magnetico.

Per porre meglio sott'occhio l'andamento del fenomeno riporto intanto nelle tab. VII e VIII il confronto fra l'osservazione ed il calcolo per gli stati normali F'_n ed F'_s: nella prima di esse si vedrà come il valore $\text{Log}\,k = 0,040$ valga sempre a rappresentare la distribuzione del magnetismo, ma in parti sempre più piccole della sbarra, al crescere della temperatura: dalla seconda si rileverà come il magnetismo sud invada a temperature crescenti più della metà della sbarra e il valore di $\text{Log}\,k$ varii al crescere della temperatura da 0,030 a 0,050.

Tabella VII.

Calamita F_n — Stato normale per 240° — $Log\,k = 0{,}040$

Valori di M

t		A	x = 3 cent.	6.5	10	13.5	17	20.5	24	OSSERVAZIONI
15° circa	oss.	88	30.64	36.82	51.19	61.05	66.87	69.78	70.5	I valori *direttamente osservati* vennero moltiplicati per opportuni coefficienti onde ridurli alla medesima unità di misura.
	calc.		29.93	38.72	51.64	60.40	66.28	69.68	71.18	
	diff.		+ 0.71	— 1.90	— 0.45	+ 0.65	+ 0.59	+ 0.10	— 0.68	
100°	oss.	84	20.80	36.35	49.42	58 52	63.61	66.26	66.8	
	calc.		19.97	37.11	49.29	57.65	63.26	66.52	67.94	
	diff.		+ 0.63	— 0.76	+ 0.13	+ 0.87	+ 0.35	— 0.26	— 1.14	
125°	oss.	81.8	19.75	35.50	48.00	57.72	62.51	64 91	65	
	calc.		19.45	36.06	48.00	56.14	61.61	64.78	66.16	
	diff.		+ 0.30	— 0 56	0.00	+ 1.58	+ 0.90	+ 0.13	— 1.16	
150°	oss.	78	18.56	33.81	46.94	54.62	59.72	61.81	62	
	calc.		18.55	34.46	45.77	53.53	58.74	61.77	63.09	
	diff.		+ 0.01	— 0.65	+ 1.17	+ 1.09	+ 0.98	+ 0.04	— 1.09	
165°	oss.	76	17.94	31.50	44.06	52.19	57.09	58.81	59	
	calc.		18.07	33.57	44.60	52.16	57 24	60.18	61.47	
	diff.		— 0.13	— 2.07	— 0.54	+ 0.03	— 0.15	— 1.37	— 2.47	
180°	oss.	69.2	16.71	29.30	40.58	48.58	52.12	53.52	53.05	
	calc.		16.46	30.58	40.62	47.50	52.12	54.93	55.98	
	diff.		+ 0.25	— 1.28	— 0.04	+ 1.08	0.00	— 1.41	— 2.93	
185°	oss.	68.2	16.62	28.87	39.00	46.75	49.42	50.40	50.54	
	calc.		16.24	30.15	40.04	46.82	51.38	54.63	55.18	
	diff.		+ 0.38	— 1.28	— 1.04	— 0.07	— 1.96	— 4.23	— 4.64	
190°	oss.	63	13.41	26.38	36.57	43.22	46.44	46.85	46.13	
	calc.		14.98	27.83	36.97	43.24	47.45	49.89	50.95	
	diff.		— 1 57	— 1.45	— 0.40	— 0.02	— 1.01	— 3.04	— 4.82	
195°	oss.	60.5	14.18	26.03	35.55	41.55	43.83	43.49	42.30	
	calc.		14.38	26.72	35.50	41.52	45.55	47.91	48.93	
	diff.		— 0.20	— 0.69	+ 0.05	+ 0.03	— 1.72	— 4.42	— 6.63	
200°	oss.	58	13.87	24.31	34.10	40.19	41.94	41.84	40.12	
	calc.		13.81	25.64	34.05	39.83	43.70	45.95	46.93	
	diff.		+ 0.06	— 1.33	+ 0.05	+ 0.36	— 1.76	— 4.11	— 6.81	
210°	oss.	56.3	13.03	22.96	32.78	38.65	39 71	39.28	38	
	calc.		13.37	24.86	33.02	38.62	42.39	44.57	45.52	
	diff.		— 0.34	— 1.90	— 0.24	+ 0.03	— 2.68	— 5.29	— 7.52	
240°	oss.	55	12.53	23.25	31.95	38.15	39.47	38.84	37.75	
	calc.		13.08	24.29	32.27	37.74	41.41	43.55	44.49	
	diff.		— 0.55	— 1.04	— 0.32	+ 0.41	— 1.94	— 4.71	— 6.74	

TABELLA VIII.

Calamita F_8 — Stato normale per 240°

Valori di M.

t		A	Log k	x = 3 cent.	6.5	10	13.5	17	20.5	24	27.5
15° circa	oss.	88.5	0,030	17.51	29.78	40.75	48.83	54.79	58.53	60.72	61.37
	calc.			15.92	30.42	41.35	49.36	54.90	58.29	59.74	
	diff.			+ 1.59	— 0.64	+ 0.60	— 0.53	— 0.11	+ 0.24	+ 0.98	
100°	oss.	84.75	0,030	16.50	29.06	39.03	47.06	52.23	55.81	57.31	58.31
	calc.			15.27	29.18	39.62	47.28	52.59	55.84	57.23	
	diff.			+ 1.23	— 0.12	— 0.59	— 0.22	— 0.36	— 0,03	+ 0.08	
125°	oss.	81.2	0,030	16.00	28.24	38.40	45.52	50.52	53.46	55.15	51.71
	calc.			14.64	27.95	37.98	45.32	50.40	53.51	54.84	
	diff.			+ 1.36	+ 0.29	+ 0.42	+ 0.20	+ 0.12	— 0.05	+ 0.31	
150°	oss.	75.6	0,040	15.00	27.60	36.34	43.04	47.35	49.88	51.13	52.69
	calc.			15 09	27.69	36.82	43.00	47.40	49.86	51.00	
	diff.			- 0.09	— 0.09	— 0,48	+ 0.04	— 0.05	+ 0.02	+ 0.13	
165°	oss.	72.6	0,040	14.50	25.50	31.81	40.47	44.75	47.81	48.90	49.17
	calc.			14.17	25.88	34.55	40.60	44 34	46.73	47 90	
	diff.			+ 0.33	— 0.38	— 2.74	— 0.13	— 0.41	+ 1.08	+ 1.00	
180°	oss.	48	0,050	14.51	24.44	32 32	37.23	39.51	40.87	41.51	42.51
	calc.			14.12	25.16	32.36	37.40	40.52	11.96	42.44	
	diff.			+ 0.39	+ 0.72	— 0.04	— 0.17	— 1.01	— 1.09	— 0.93	
190°	oss.	42.2	0,050	12.70	21.65	28.57	32.90	34.40	35.98	35.48	36.32
	calc.			12.44	22.14	28.64	33.00	35.65	36.91	37.76	
	diff.			+ 0.26	— 0.49	— 0.07	— 0.10	— 1.25	— 0.93	— 2.28	
200°	oss.	39.5	0,050	12.50	21.	27.80	30.57	31.16	31.30	31.40	32.63
	calc.			11.55	20.64	26.76	30.67	33.28	34.46	35.25	
	diff.			+ 0.95	+ 0.36	+ 1.04	— 0.10	— 2.12	— 3.16	— 3.85	
210°	oss.	36.2	0,050	12.00	20.00	25.30	28.00	28.51	28.79	29.35	30.50
	calc.			10.60	18.92	24.35	28.10	30.51	31.59	31.95	
	diff.			— 1.40	+ 1.08	+ 0.95	— 0.10	— 2.00	— 2.80	— 2.60	
240°	oss.	35	0,050	11.87	20.03	24.84	27.09	28.37	28.69	29.28	29.90
	calc.			10.25	18.30	23.72	27.20	29.50	30.55	30.90	
	diff.			+ 1.62	+ 1.73	+ 1.12	— 0.11	— 1.13	— 1.86	— 1.62	

Aggiungerò che lo spingere la calamita oltre i 180° mentr'essa tiene rivolto in basso il polo sud fa sì che il valore di k non riesce più lo stesso di prima, neppure a temperatura ordinaria, ancorchè la linea neutra ritorni alla metà della sbarra. Così ad es. mentre per le sbarre F'_n ed H'_n si aveva $\operatorname{Log} k = 0{,}040$, dopo averle scaldate in posizione F_s ed H_s conviene assumere per F''_n ed H''_n $\operatorname{Log} k = 0{,}030$. Inoltre, mentre dalla tab. I appare che il valore $\operatorname{Log} k = 0{,}050$ valeva per tutte le temperature nella sbarra G_s avanti che avesse oltrepassato i 180°, bastò averla spinta una sola volta fino a 200° perchè a temperatura ordinaria si dovesse assumere $\operatorname{Log} k = 0{,}030$ soltanto.

Vi ha poi talune differenze anche nel modo di comportarsi delle calamite C, D, F, G del secondo gruppo, state magnetizzate prima di subire i riscaldamenti. Così per es. il valore di k cresce colla temperatura per D_s, F_s, G_s e rimane costante per la C_s; tale valore invece è costante per le C_n, D_n, F_n e cresce colla temperatura per la sola G_n.

Segnatamente sulle calamite F e G eseguii ad alte temperature moltissime osservazioni anche al di sopra della metà della sbarra. Così procedendo di sezione in sezione a partire da una medesima estremità della sbarra, colle calamite C, D, F, anche ad alta temperatura mi abbattevo in un solo massimo; colla calamita G invece ne incontravo due.

Ecco per saggio le osservazioni fatte sulla calamita F nei due stati normali F'_s ed F''_n a 240° e quelle fatte sulla calamita G a 230° negli stati normali G'''_s e G''_n.

$t = 240^s$ x =	3 cent.	6.5	10	13.5	17.	20.5	24	27.5
F'_s M =	+ 11.87	20.03	24.84	27.09	28.27	28.69	29.28	29.90
F''_n M =	— 11.32	19.47	26,70	31.32	33.32	32.88	31.95	30.32

$t = 230°$ x =	4 cent.	7	10	13	16	19	22	25	28	31
G'''_s M =	+ 17.4	26.4	33.4	36.4	34 9	29.9	28.9	29.9	31.9	35.4
G''_n M =	— 19.5	29*	36*	41	43	44	41	38	35	39

Il fenomeno si manifesta in tal guisa, come se alla lunga calamita venisse sovrapponendosi in senso contrario una nuova calamita, di circa metà lunghezza, coincidente nella linea neutra; e come se inoltre questa nuova calamita andasse rinforzandosi col crescere della temperatura.

9. Esaminando infine brevemente le variazioni dei valori di A negli stati normali delle diverse calamite, ossia le variazioni dei valori di M osservati alla metà della sbarra finchè la linea neutra non viene spostata, poco avrò da aggiungere a quanto esposi già nella prima Memoria. Riassumo alcune considerazioni desunte dall'ispezione delle tabelle numeriche e delle tavole grafiche costruite sui dati dell'osservazione.

1.° Finchè non si oltrepassano i 180° i valori di A sono rappresentabili con formole empiriche della forma:

$$M = M_0 + \alpha t + \beta t^2$$

in cui M_0 denota il valore a 0° ed α e β sono due costanti per ciascuna calamita e ciascuno stato normale. Per gli stati normali corrispondenti alla temperatura di 300° la curva del fenomeno è rappresentata da due porzioni che si toccano a 190° e sono rappresentabili da due formule:

$$(1) \qquad M = M_0 - t(\alpha + \beta\gamma')$$

$$(2) \qquad M' = M'_0 + (300 - t)(\alpha' + \beta'\gamma'^{(300-t)})$$

valevoli la prima da 0° a 190°, la seconda da 190° a 300°.

2.° Nel passare successivamente agli stati normali 100°, 150°, 180° le curve vanno sempre alzandosi nella parte ove hanno comuni le ascisse (1). Riferisco nella tab. IX, per dare un'idea della grandezza dei decrementi magnetici, le costanti per le calamite C_n, D_n, G_s, prendendo sempre $M_0 = 100$.

TABELLA IX.

Stati normali — $M_0 = 100$. Valori delle costanti.

Calamita	$t = 100°$		$t = 150°$		$t = 180°$		OSSERVAZIONI
	α	β	α	β	α	β	
C_n	— 4,222	+ 0,0395	+ 2,2143	— 0,0704	—	—	
D_n	— 0,7778	— 0,04197	— 0,7143	— 0,04898	—	—	
G_s	— 0,5555	+ 0,03404	+ 0,5833	— 0,04306	+ 1,275	— 0,0484	
A_s	— 0,053	— 0,00056	—	—	—	—	1ª Memoria

3.° Per lo stato normale corrispondente alla temperatura massima 200°, la formula parabolica non regge più, giacchè la curva cangia il senso della concavità a 190°, ove ha luogo il massimo decremento nel magnetismo.

4.° Il senso della concavità cangia per tutte le curve sensibilmente a 190° (2); sia che esse rappresentino i valori di A, oppure semplicemente i valori di M alla metà della sbarra; sia che si riferiscano a calamite col polo nord in basso, oppure col polo sud in basso.

5.° Dividendo, come nel § 8, le calamite in due gruppi, quello delle H, K e quello delle C, D, F, G; tutte le calamite appartenenti a un medesimo gruppo, purchè tengano rivolto in basso il medesimo polo, non solo presentano un andamento analogo, ma danno luogo a curve sensibilmente coincidenti tra loro (3).

6.° Per ciascuno dei due gruppi sono più basse le curve riferite alle calamite col polo sud in basso.

(1) Per la calamita A_s studiata nella prima Memoria la curva pel 150° era invece molto più bassa che quella pel 100.°

(2) Nella prima Memoria avevo assegnato il punto singolare a 200° circa.

(3) Al primo gruppo delle H, K si potrebbe ascrivere la A_n studiata nella prima Memoria. La B_n, B_s sono pel loro andamento da ascriversi piuttosto al 2° gruppo.

7.° Finalmente sono più basse le curve riferite alle calamite del 1° gruppo (H, K) che non quelle del 2.° Riporto nella tab. X le costanti empiriche delle curve medie di ciascun gruppo.

TABELLA X.

Stato normale 300°. *Valori delle costanti.*

Calamita	Formula	M_0	α	Log β	Log γ	OSSERVAZIONI
C_n D_n F_n	1.a	100	—0,01699	$\bar{2}$,41746	0,00399	
	2.a	55	+0,02035	$\bar{4}$,92385	0,01859	
H_n	1.a	100	+0,05124	$\bar{3}$,96306	0,00643	
	2.a	29	+0,01438	$\bar{4}$,38135	0,02782	
A_n	1.a	100	+0,07741	$\bar{3}$,94054	0,00826	1ª Memoria
	2.a	26.2	+0,00798	$\bar{3}$,70495	0,01317	
B_n	1.a	100	+0,04772	$\bar{2}$,23688	0,00599	
	2.a	41.8	+0,00453	$\bar{3}$,75445	0,01327	
B_s	1.a	100	+0,39979	$\bar{2}$,66777	0,00476	
	2.a	26	+0,01023	$\bar{3}$,57215	0,01448	

10. In quanto alla causa delle variazioni transitorie del magnetismo — dietro la coincidenza tra certi rapporti dedotti dalle esperienze di Müller [1] sulla resistenza elettrica del ferro ad alta temperatura ed altri desunti dalle mie esperienze ora riferite — io avea proposto l'ipotesi che coteste variazioni dovute alla temperatura fossero da attribuirsi all'aumento di resistenza elettrica prodotto appunto dall'aumento di temperatura nel circuito delle correnti amperiane della calamita.

Secondo la teoria di Ampère, la polarità che d'ordinario si attribuisce alle molecole di un corpo magnetico, sarebbe dovuta a correnti che percorrono ciascuna di esse in piani perpendicolari ai loro assi; inoltre queste correnti, sotto l'azione di forze orientatrici, si dispongono coi loro piani più o meno prossimi al parallelismo: infine, data una certa orientazione, il magnetismo libero di una calamita è proporzionale all'intensità di queste correnti elementari.

Ciò posto, il sig. Jamin [2] dimostrò che la costante a della formula di Biot

$$m = a\,(k^{-x} - k^{-(l-x)})$$

e per conseguenza anche la costante

$$A = \frac{a}{\log k}$$

della nostra formula integrale dipende soltanto dalla natura chimica dell'acciajo. E noi abbiamo visto che per tutte le calamite studiate il numero A dipende essenzialmente dalla temperatura. Or bene, ponendo

$$A = \frac{E}{R}$$

(1) Wiedemann, Galvanismus vol. I pag. 312 2ª ed. 1874.

(2) Journal de Phys. loc. cit.

nel modo che si suole esprimere la intensità d'una corrente secondo la legge di Ohm, io pensavo che la forza elettromotrice E delle correnti elementari amperiane non dipendesse che dalla natura chimica dell'acciajo e non dalla temperatura; che inoltre la diminuzione di A, dovuta unicamente all'elevazione di temperatura, fosse da attribuirsi all'aumento di resistenza elettrica nel circuito delle dette correnti.

Se non che da alcune esperienze istituite appositamente sulla resistenza al passaggio della corrente in un filo di ferro portato fino a 300° [1] ho concluso « che il decremento nella conducibilità del ferro al crescere della temperatura procede ben altrimenti che quello del magnetismo permanente nell'acciajo. Infatti questo (come s'è visto) diminuisce sempre più rapidamente fin verso i 200°, indi sempre meno rapidamente fino a 300° per rendersi nullo al calor rosso. Laddove la conducibilità elettrica del ferro decresce sempre uniformemente fino a 300° (senza che il fenomeno presenti alcuna singolarità intorno a 200°) e inoltre — secondo le esperienze di Müller — seguita sempre a diminuire, si può dire uniformemente, fino al calor rosso ».

Ecco i rapporti desunti dalla mie esperienze tra i valori a 20° del magnetismo e della conducibilità e quelli alle temperature sottoindicate:

	100°	150°	180°	200°	300°
Magnetismo	1.08	1.11	1.15	2.00	2.69
Conducibilità	1.45	1.73	1.90	2.01	2.57

L'ipotesi adunque da me proposta non può sussistere, o almeno non può sussistere da sola. Soltanto ulteriori esperienze potranno mostrare, se combinandola con altri principii conosciuti, essa possa condurre alla spiegazione delle variazioni transitorie del magnetismo.

(1) Rend. Ist. lombardo serie II vol. XIV luglio 1881.

Sulla tormalina cromica e sui depositi di ferro cromato degli Urali.

Memoria di A. COSSA e A. ARZRUNI

letta nella seduta del 7 maggio 1882.

All'epoca in cui G. Rose pubblicò la sua opera classica sugli Urali ([1]), il numero dei depositi di cromite fino ad allora conosciuti in quella regione era così limitato, che riuscì possibile al dotto autore di numerarli e descriverli quasi completamente. Quantunque sieno ormai trascorsi quarant'anni dall'epoca della descrizione del Rose, tuttavia le indicazioni da lui fornite furono riconosciute esatte anche nei minuti dettagli e tutto al più richiedono di essere completate.

Nel principio dell'anno 1860 sorse un'occasione che fece aumentare di molto le nostre cognizioni sull'estensione dei depositi di ferro cromato negli Urali, giacchè colla presunzione di trovare in questo minerale, come materia prima di preparati di cromo, una nuova fonte di ricco guadagno, si scoprirono e si scavarono numerosi nidi e depositi di ferro cromato. Le speranze concepite intorno a questa intrapresa industriale furono ben presto deluse, ma la scienza ne ricavò vantaggio grandissimo colla scoperta di fatti nuovi ed interessanti. Siccome il minerale di cromo non poteva essere convertito sul luogo in prodotti industriali, così esso veniva esportato allo stato greggio. Ma nella stessa misura che per il difetto di mezzi di comunicazione, le spese di trasporto del minerale specificamente molto pesante aumentavano sproporzionatamente al suo valore, diminuirono pure le speranze di guadagno nella fabbricazione di preparati di cromo. Pertanto ben presto cessò l'esportazione del ferro cromato dagli Urali. Come testimonio di quell'epoca in cui la concorrenza non voleva lasciare sfruttare a vantaggio d'un solo l'inaspettata fonte di guadagno, rimangono ancòra lungo tutta l'estensione degli Urali, da nord a sud e sui due versanti occidentale ed orientale, numerosissime miniere abbandonate di ferro cromato, nelle cui vicinanze riscontrasi accumulato il minerale metallico tagliato a foggia di mattoni accatastati come un muro a secco sui cui orli si trovano parecchi minerali di cromo. Le trincee, che non oltrepassano mai la profondità di tre a quattro metri, offrono al geologo ed al mineralista la possibilità d'instruirsi così sui rapporti di posizione tra gli arnioni metalliferi e le roccie inviluppanti, come sulla genesi dei minerali di cromo.

Come fu già notato da G. Rose ([2]), il ferro cromato negli Urali si trova discretamente disseminato sotto forma di minute granulazioni nella serpentina, ma in alcuni

([1]) *Mineralogisch-geognostische Reise nach dem Ural, dem Altai und dem Kaspischen Meere.* Vol. I, 1837; Vol. II, 1842.

([2]) Luogo citato Vol. II, pag. 476.

punti si concentra in ragguardevoli arnioni ed in depositi sulla di cui potenza non si hanno dati precisi. In alcuni di questi giacimenti i lavori di escavazione sono penetrati a parecchi metri di profondità senza avere ancora raggiunto lo strato limite inferiore, e senza che siasi potuto osservare un ristringimento nel deposito metallifero. La serpentina, che è la matrice del ferro cromato, forma delle intrusioni negli scisti talcosi e cloritici, i quali insieme cogli altri scisti cristallini hanno una grande estensione negli Urali. Tutte le osservazioni fatte nel distretto di Syssert (il quale comincia al 29mo chilometro al sud della città di Jekaterinburg) hanno dimostrato che la direzione degli scisti e della serpentina, che è ad essi subordinata, coincide esattamente con quella dell'asse della catena montuosa. Questa direzione varia entro limiti molto ristretti, cioè tra NO *o.* 22 $\frac{1}{2}$ fino a NE *o.* 1; dal che risulta che la direzione dominante è quella di NO *o.* 23. L'inclinazione degli strati, fatta eccezione di pochi scontorcimenti, è orientale e poco accentuata.

Lo scisto cloritico è a lamine sottili e composto di esilissime squame; ha un colore verde cupo e contiene spesso della magnetite in cristalli ottaedrici semplici oppure geminati. Lo scisto talcoso generalmente ha una potenza minore del cloritico, ma in alcuni punti però sorpassa i 20 metri; esso contiene frequenti e grossi depositi di mesitina e costituisce il rivestimento immediato della serpentina, la quale assai di rado trovasi in contatto diretto collo scisto cloritico e mai col granito. Venne però trovato in vicinanza del porfido uralitico e dei così detti scisti verdi uralitiferi.

I rapporti di posizione della serpentina coll'ultimo gruppo delle roccie ora nominate meritano uno studio più accurato, quantunque non possa più essere messa in dubbio l'origine della serpentina prodotta dalla metamorfosi di roccie pirosseniche e diallagiche. In questa serpentina degli Urali non trovasi nemmeno il più piccolo indizio della preesistenza dell'olivina, mentre al contrario vi si riscontrano prove evidenti del graduale passaggio di roccie prettamente diallagiche (con poco plagioclasio), alla serpentina. L'unico rappresentante legittimo dell'olivina riscontrato negli Urali, è la *glinkite* disseminata in vene nello scisto talcoso al lago Itkul ([1]). Sulla presenza di questo minerale mancano ancora dati precisi; essa però costituisce un fatto troppo isolato per attribuirgli una parte essenziale nella formazione della serpentina, che in quella regione occupa una estensione molto grande. Ancor meno si potrebbe a questo riguardo prendere in considerazione la scoperta molto interessante fatta recentemente da A. Loesch ([2]) della presenza della forsterite nel calcare granulare della miniera di minerali denominata Nikolaje-Maximilian nei monti Nesjam negli Urali del sud. In ogni caso appare più giustificata l'ipotesi che alla formazione della serpentina abbia contribuito non una sola roccia isolata, ma bensì un complesso di svariate roccie pirosseniche, dal diallagio quasi puro agli scisti verdi uralitiferi. In questo modo soltanto si può spiegare la grande estensione della serpentina negli Urali, la quale vi forma in alcuni punti delle serie di colline che si estendono da nord a sud per parecchi chilometri, ed ai cui piedi scorgonsi appena gli scisti

([1]) Kokscharow, *Materialien zur Mineralogie Russlands.* Vol. V, pag. 15 (1866).

([2]) Verhandl. d. kaiserl. russ. mineral. Ges. zu St. Petersburg [2] Vol. XVIII, pag. 306-319, (1882). — Loesch dà l'analisi di questo minerale, le di cui forme cristalline furono determinate da Kokscharow.

talcosi e cloritici ed anche gli scisti verdi che passano gradatamente al porfido uralitico. A proposito della ipotesi da noi formulata sulla genesi della serpentina negli Urali, possiamo aggiungere che essa trova una conferma nello studio chimico e microscopico di alcune roccie del versante italiano delle Alpi retiche, nelle quali uno di noi ha già dimostrato il passaggio del pirosseno, del diallagio ed anche della clorite alla serpentina.

Considerando più minutamente i giacimenti di cromite negli Urali ci si presentano due problemi molto interessanti; cioè quello dell'origine di questi agglomeramenti di cromo e l'altro dell' influenza che essi hanno potuto esercitare sulle roccie inviluppanti.

La grande diffusione di ossido cromico che trovasi in piccola quantità in diversi silicati, e specialmente nella fucsite, nel talco, nello smeraldo, nel diallagio ecc. i quali ne svelano la presenza col loro colore verde caratteristico, autorizza ad ammettere come cosa molto probabile se non come sicura, che l'ossido cromico è la forma originaria o almeno la più antica sotto la quale si presentò il cromo. La combinazione dell'ossido cromico cogli ossidi ferrico e ferroso nella cromite sarebbe un fatto posteriore, che potrebbe spiegarsi colla sostituzione di ossido cromico ad una quantità chimicamente corrispondente di ossido ferrico nella magnetite. Milita a favore di questa ipotesi il fatto notevole della presenza di nidi di magnetite, così negli scisti cloritici e talcosi come nella serpentina, disposti a pochi metri di distanza dai giacimenti di cromite. Anzi la coesistenza a breve intervallo della cromite e della magnetite fu parecchie volte osservata in uno stesso masso di serpentina. Non si potrà avere però una prova sicura della metamorfosi della magnetite in cromite, se non quando si potrà accertare che in uno stesso deposito metallifero esistono accoppiati i due minerali, e che, per esempio, in un masso di cromite esiste un nucleo ancora non modificato di magnetite. Sgraziatamente questa congettura sui rapporti genetici dei due minerali non sorse che più tardi, esaminando le collezioni e le note fatte sul posto da uno di noi. Lontani dalla località percorsa non erano più realizzabili nuove osservazioni, le quali avrebbero potuto contribuire a controllare la nostra supposizione.

Riesce assai più facile la risposta al secondo quesito che ci siamo proposti; giacchè è impossibile disconoscere l'azione simultanea del cromo e degli altri agenti modificatorii, per es. acqua ed acido carbonico, sulle roccie che inviluppano i depositi di ferro cromato. Insieme alla parziale trasformazione del talco e del serpentino in mesitina, brucite, texasite con traccie di nichelio che derivano dal così detto serpentino nobile, si appalesa l'azione del cromo nella formazione per epigenesi di molti silicati cromiferi a spese del serpentino, del talco e della clorite.

Questi minerali cromiferi sono: l'Uwarowite; il granato adamantino di calce e ferro con traccie di cromo (Demantoide); il clinocloro cromifero (Kocubejite); la pennina cromifera (Kämmererite e Rodocromite). La rodocromite si presenta come un aggregato di fibre colorate in rosa violaceo, ed è frequentemente compenetrata da mesitina, il cui angolo romboedrico $10\bar{1}1 . 01\bar{1}\bar{1}$, misurato in un frammento di sfaldatura, si trovò eguale a 106°, 1′. Meritano di essere specialmente considerati due minerali finora non studiati, cioè una mica cromifera di un bel color verde smeraldo ed una tormalina cromifera di colore verde cupo. A dir vero G. Rose aveva già

veduto, raccolto e descritto questa tormalina, ma non ne aveva riconosciuta la composizione. Il prof. Websky osservando questo minerale sospettò subito ch'esso dovesse contenere del cromo, e questa sua supposizione trovò un'ulteriore conferma nel fatto del marcatissimo dicroismo, fino allora soltanto conosciuto nell'alessandrite, e nell'assorbimento di una data porzione dello spettro. Quest'ultima proprietà si rende evidente, esaminando la tormalina con una luce artificiale, p. e. con quella di una lampada a petrolio; perchè in questo caso il minerale si lascia attraversare quasi completamente dai raggi rossi in modo da apparire intensamente colorato in rosso rubino.

La sola notizia che finora abbiamo sulla presenza del cromo nella tormalina si trova in una nota di R. Hermann [1], il quale analizzando una varietà di tormalina che si trova a Tocilnaja Gora nelle druse di una ganga quarzosa, sotto forma di esili aghetti quasi microscopici riuniti in aggruppamenti sferici, vi riscontrò 1,166 per cento di ossido cromico. Lo stesso Hermann trovò pure traccie di cromo in piccoli cristalli egualmente aghiformi di tormalina rinchiusi nel quarzo cistallizzato e compatto di Berjósowsk e dintorni. Però finora in nessuna località il cromo si è trovato nei cristalli *ben distinti* di tormalina.

Le ricerche eseguite da uno di noi sulla mica cromifera furono già pubblicate [2]. In questa Memoria esponiamo i risultati delle ricerche chimiche e cristallografiche che abbiamo eseguito sulla tormalina cromica.

La tormalina fu trovata da uno di noi in una miniera di ferro cromato situata a 4 chilometri di distanza al NO del casolare di Syssert, sulla riva sinistra della Kámenka, che è un piccolo affluente del fiume Syssert. Questo minerale vi si trova in piccola quantità sotto forma di prismi quasi neri e che a primo aspetto sembrano anfibolo; esso è associato alla mica cromifera, e non è accompagnato da altri minerali di cromo, i quali, come la kämmererite e la rodocromite, sono frequenti nelle miniere di ferro cromato. La stessa cromite in questa località ha un colore grigio nerastro non splendente; presenta molte incavature le cui pareti, sulle quali si sono formate la mica e la tormalina, appaiono colorate in bruno da spalmature d'ossido ferrico. La cromite percossa col martello si scinde in croste, in frammenti poliedrici, in granuli che non si possono riferire ad alcuna determinata forma cristallina. La cromite non alterata è fragile, ma presenta un colore nero lucente e sulla superficie di frattura si riconoscono facilmente le facce di sfaldatura dell'ottaedro; anzi non raramente dalla sua massa granulare sporgono degli angoli solidi proprî di questa forma cristallina. Nei punti di contatto del minerale metallico collo scisto talcoso si trovano delle piccole masse cristalline di mesitina [3]. La serpentina ha un colore grigio perlaceo, è molto compatta, ha una struttura granulare e colla percussione si divide in frammenti poliedrici.

Mentre la mica verde venne trovata appena in questa località, la tormalina cromica si riscontra in parecchi altri luoghi. Essa si trova in cristalli molto più belli

(1) Journ. für prakt. Chem. Vol. XXXV, pag. 244 (1845).

(2) Bull. de la Soc. minér. de France. Seduta del 13 aprile 1882.

(3) Sopra un cristallo di sfaldatura l'angolo del romboedro fu trovato: $11\bar{0}\bar{1}.\,0\bar{1}\bar{1}1 = 106°, 15'$ (media di cinque misure pochissimo discordanti).

di quelli poch'anzi citati, lunghi più centimetri e dello spessore di circa un centimetro, presso il villaggio Sabry conosciuto per la sua vicinanza alla famosa cava di rodonite al sud-ovest di Jekaterinburg. Si trova pure la tormalina in bei cristalli nelle fattorie della fonderia di Nizne-Issetsk immediatamente al confine nord-ovest del distretto di Syssert alle sorgenti del fiume Kämenka. Da queste due località derivano i cristalli di tormalina che formano oggetto delle nostre ricerche.

Con quanto abbiamo accennato non è punto esaurita l'enumerazione delle località dove si trova la tormalina cromica. Esaminando nel museo mineralogico di Berlino la collezione di tormaline degli Urali raccolte per la massima parte da G. Rose, se ne trovano parecchie le quali, quantunque derivanti da luoghi diversi, sono così simili alle nostre, che potrebbero benissimo essere ascritte all'istessa provenienza.

Negli esemplari di Nizne-Issetsk e di Sabry i cristalli di tormalina, di un colore che varia dal verde al nero, sono in contatto immediato, oppure sono compenetrati nella cromite, che quì ha una tessitura compatta o finamente granulare. L'interstizio tra i singoli cristalli è riempito da un talco compatto di colore verde chiaro, il che prova come la formazione della tormalina sia avvenuta immediamente nei punti di contatto tra il minerale metallico e lo scisto talcoso inviluppante. La tormalina inchiude qualche volta della cromite dalla quale è assai difficile il separarla meccanicamente.

L'abito dei cristalli è come di solito prismatico; quelli compenetrati nella cromite non sono terminati e vi sono irregolarmente disseminati; però nei cristalli più sottili si riscontra un aggruppamento raggiato intorno ad un centro comune, e disposti o in un piano oppure nello spazio nelle cavità della cromite. I cristalli impiantati nella cromite hanno l'estremità libera ben terminata ma non ricca di facce. In questi cristalli si osservarono: tre prismi, la base, due romboedri positivi e due negativi, due scalenoedri positivi ed uno negativo; in tutto undici forme diverse.

Nella zona del prisma vennero determinati con sicurezza: $(11\bar{2}0)$, $(10\bar{1}0)$ e $(12.1.\overline{13}.0)$. Indubbiamente il numero dei prismi ditrigonali non è limitato ad uno, come si può desumere dalla striatura dei prismi di primo ordine e dai valori oscillanti che si ottengono nella misura degli angoli. Però non si possono con sicurezza simbolizzare la maggior parte di questi prismi. La terminazione dei cristalli è limitata dalle forme: $(10\bar{1}1)$, $(\bar{2}021)$ delle quali prevale ora l'una ora l'altra; inoltre si notano: $(\bar{1}012)$, $(10\bar{1}4)$, (0001), due scalenoedri positivi $(4.3.\bar{7}.10)$ e $(15.14.\overline{29}.1)$ appartenenti ambedue alla zona $[10\bar{1}1.01\bar{1}2]$; finalmente uno scalenoedro negativo $(\overline{26}.\bar{1}.27.14)$ situato nella zona $[11\bar{2}0.1101]$. Delle forme enumerate i due ultimi scalenoedri ed il prisma $(12.1.\overline{13}.0)$ sono nuove. Anche lo scalenoedro $(4.3.7.10)$ non è citato in alcun luogo; tuttavia nel *Syst of. Min.* del Dana alla fig. 335 si trova rappresentato uno scalenoedro, il quale secondo la sua posizione tra $(10\bar{1}1)$ e $(01\bar{1}2)$ e nella stessa zona con ambedue, potrebbe benissimo essere identico a $(4.3,\bar{7}.10)$ Ma questa è una semplice supposizione, perchè il Dana non dà di questa forma nè un angolo nè il simbolo. Nella stessa figura 335 si trova rappresentato con $^1/_8$ il romboedro $(10\bar{1}4)$, ma solamente come una troncatura dello spigolo $(01\bar{1}2.1102)$, giacchè non si trova alcuna misura di questa forma nè nell'opera citata nè altrove. Qui non si deve tacere che degli scalenoedri e dei prismi ditrigonali conosciuti

nemmeno uno venne osservato nella tormalina cromica. Per quanto si riferisce alle proprietà delle facce, quelle del romboedro sono estremamente liscie e splendenti e danno tutte senza eccezione immagini semplici e ben marcate. Dei prismi quello di secondo ordine è per lo più liscio, il che venne già notato da Rose come proprietà caratteristica delle tormaline verdi degli Urali (¹). Il prisma di primo ordine si presenta spesso col numero completo di facce: le faccette più piccole collocate sotto ai romboedri negativi sono per lo più piane, e pertanto i prismi ditrigonali sembrano limitati esclusivamente a quei tre sestanti in cui sono collocati i romboedri positivi. Il fatto frequentemente osservato nella tormalina che un cristallo apparentemente unico risulta composto da parecchi individui riuniti non affatto parallelamente, si verifica anche nella tormalina cromica e si palesa specialmente nella zona del prisma con una variazione nell'angolo di 180° di due facce che dovrebbero essere parallele. Anche le numerose strie di riflessione incrocicchiantesi sotto angoli diversi, che appariscono nel campo del cannocchiale quando si esamina una stessa faccia, dipendono dal non completo parallelismo degli elementi della faccia (²).

Per le misure degli angoli sonsi adoperati esclusivamente i cristalli di Sabry, perchè quelli provenienti dal distretto di Nizne-Issetsk, come abbiamo già accennato, non sono terminati ed inoltre sono troppo grandi per poter servire a determinazioni goniometriche esatte.

Nella seguente tabella sono compresi i risultati delle determinazioni goniometriche intraprese sopra dodici cristalli.

(¹) Rose (l. cit. Vol. II, pag. 500) designa come *nere* queste tormaline, ma gli esemplari che secondo le etichette scritte di sua mano, provengono da Gornoschit, hanno un colore verde cupo simile a quello delle tormaline descritte in questa Memoria.

(²) In una monografia sulla tormalina pubblicata in russo e perciò poco conosciuta (Memorie dell' imp. Società russa di Mineralogia. Serie 2ª, Vol. VI, pag. 80-342. Pietroburgo 1871) M. W. Jerofejew fa notare l' aggruppamento non esattamente parallelo dei cristalli di tormalina, ed appoggiandosi a numerose ed accurate misure, conchiude che la riunione avviene secondo determinate facce, in modo che i singoli cristalli sono rispettivamente spostati o girati di un piccolo angolo, il che produce una variazione nei valori angolari che impropriamente si suole riferire ad una variazione nella composizione chimica.

Faccie	Numero degli angoli misurati	Valori estremi	Valore medio	Valore calcolato
0001 : $10\bar{1}1$	3	27° 32′ 1/2 — 27° 52′ 1/2	27° 39′ 1/2	27° 32′
$10\bar{1}1$: $10\bar{1}0$	5	62 27 — 62 35	62 31	62 28
$10\bar{1}1$: $\bar{1}012$	1	——	42 14	42 8 1/2
$\bar{1}012$: $\bar{2}021$	3	31 18 — 31 37 1/2	31 31	31 35 1/2
0001 : $\bar{1}012$	3	14 22 1/2 — 14 38 1/2	14 33	14 36 1/2
$10\bar{1}1$: $10\bar{1}4$	1	——	20 11	20 6 1/2
$\bar{1}010$: $\bar{2}021$	3	43 42 1/2 — 43 45 1/2	43 44	43 48
$2\bar{1}\bar{1}0$: $10\bar{1}1$	19	66 2 1/2 — 66 34	66 24	66 24
$10\bar{1}1$: $01\bar{1}2$	9	23 22 1/2 — 23 40	23 35	23 36
$10\bar{1}1$: $\bar{1}101$	7	47 5 1/2 — 47 16 1/2	47 12	47 12
$10\bar{1}1$: $4.3.\bar{7}.10$	2	13 16 1/2 — 13 53 1/2	13 53	13 41 1/2
$01\bar{1}2$: $4.3.\bar{7}.10$	2	9 44 1/2 — 10 35	10 20	10 5 1/2
$2\bar{1}\bar{1}0$: $29.\overline{15}.\overline{14}.1$	1	——	4 39 1/2	4 30 2/4
$10\bar{1}1$: $29.\overline{15}.\overline{14}.1$	1	——	61 28 1/2	61 53 1/2
$\bar{2}110$: $\bar{2}021$	10	51 2 — 51 24	51 15 1/2	51 19
$\bar{2}021$: 0111	12	38 35 — 38 49	38 44	38 41
$2\bar{1}\bar{1}0$: $26.\overline{27}.1.14$	1	——	36 1	36 38
$0\bar{1}11$: $26.\overline{27}.1.14$	1	——	53 43 1/2	53 22
$2\bar{1}\bar{1}0$: $11\bar{2}0$	12	59 36 1/2 — 60 7 1/2	59 58 2/3	60 0
$2\bar{1}\bar{1}0$: $10\bar{1}0$	10	29 41 — 30 20	30 1 1/4	30 0
$2\bar{1}\bar{1}0$: $13.\overline{12}.\bar{1}.0$	4	35 38 — 26 31 1/2	26 7 1/2	26 2
$13.\overline{12}.\bar{1}.0$: $12.1.\overline{13}.0$	1	——	7 38	7 46

Per la determinazione del rapporto degli assi si prese come base del calcolo l'angolo $2\bar{1}\bar{1}0 : 10\bar{1}1 = 66°, 24'$ siccome quello che risultò dal maggior numero di misure con variazioni relativamente assai piccole (1). Il calcolo conduce al seguente rapporto: $a : c = 1 : 0{,}45149.$

L'asse c ha pertanto un valore più grande di quelli finora calcolati per la tormalina. Infatti i valori di c sarebbero: secondo Des-Cloizeaux, Miller e Dana $= 0{,}447675$; secondo Jerofejew (2) $= 0{,}448051$; secondo Seligmann (3) $= 0{,}451300$.

(1) Dei diecinove valori trovati, dodici sono compresi tra 66°, 21′ 1/2 e 66°, 29′ 1/2; gli altri sette più discosti dal valore medio furono: 66°, 3′ 1/2; 4′ 1/2; 8′; 18′; 31′ 1/2; 33′ e 34′.

(2) Luogo citato.

(3) Groth's, Zeitschrift für Krystallographie. Vol. VI (1882) pag. 220.

L'ultimo di questi numeri, che si avvicina assai a quello calcolato per la tormalina cromica, si riferisce ai cristalli incolori e ricchi di facce di Dekalb, St. Lawrence Co., New-York.

La tormalina cromica degli Urali si distingue dalle altre varietà di tormalina finora conosciute non solo per il valore de' suoi angoli, ma ancora e molto più per le sue proprietà ottiche. La tormalina cromica è dotata di un forte dicroismo. Osservata alla luce del giorno, il colore dei raggi che vibrano parallelamente all'asse ottico è bruno giallognolo, mentre quello dei raggi che vibrano normalmente alla direzione dell'asse ottico è verde bleuastro ([1]).

Adoperando una luce artificiale e specialmente quella di una lampada a petrolio, il raggio straordinario invece di apparire bruno giallastro assume una colorazione che varia dal bruno rossastro al rosso rubino; mentre il raggio ordinario, eccetto un debole colore verde, è quasi intieramente assorbito. Questa proprietà di essere di colore verde alla luce del sole e di colore rosso intenso con una illuminazione artificiale finora venne riscontrata appena in quella varietà cromica di crisoberillo, che è conosciuta col nome di Alessandrite e che proviene dalle cave di smeraldo alla Tokowâja ed al Reft. Pertanto nella nuova varietà di tormalina noi abbiamo un perfetto riscontro colla Alessandrite. Nella tormalina cromica il carattere della doppia rifrazione è negativo come in tutte le tormaline finora conosciute, e nelle lamine tagliate normalmente all'asse ottico si osserva completamente inalterata la croce caratteristica dei cristalli uniassi.

Con un prisma di tormalina, il cui spigolo rinfrangente fu tagliato quasi esattamente parallelo all'asse ottico, si poterono determinare anche gli indici di rifrazione, però non per gli stessi colori, dei due raggi ordinario e straordinario. Ambedue gli spettri sono costituiti da alcune strie colorate, ma inegualmente distribuite e separate da larghe fascie nere. Lo spettro straordinario mostra quasi unicamente quella parte del rosso che corrisponde presso a poco alla linea del litio; il giallo ed il verde appaiono molto indeboliti, e gli altri raggi di maggiore rinfrangibilità sono totalmente assorbiti. Lo spettro ordinario invece consta di una linea assai debole nel rosso e di alcune linee egualmente deboli nel verde, di cui la più forte potè essere determinata approssimativamente. Però nè il rosso nè il verde del raggio ordinario si possono paragonare coi colori corrispondenti del raggio straordinario; essi giacciono in altre parti dello spettro; infatti i raggi luminosi delle fiamme del litio e del tallio che vibrano normalmente all'asse ottico non attraversano il prisma.

Con un prisma di tormalina cromica che aveva un angolo rinfrangente $= 46° \, 9 \frac{1}{2}'$ si osservarono le seguenti deviazioni per il raggio straordinario ($\delta\varepsilon$), esperimentando colla luce del litio, del sodio, del tallio e colle fiamme luminose del gaz e di una lampada a petrolio.

([1]) Il colore giallo bruno, nelle lamine più sottili appare giallo e corrisponde esattamente al colore 12, *r* della scala cromatica internazionale di Radde; il colore verde bluastro si avvicina assai alla tinta 16, *n*. — Nelle lamine più grosse le tinte corrispondono rispettivamente ai colori 12, *k-m* e 15, *i* della scala di Radde.

ROSSO			GIALLO		VERDE	
Li	Gaz	Petrolio	Na	Petrolio	Tl	Petrolio
$\delta\varepsilon = 32°55\frac{1}{2}'$	$33°2'$	$33°6\frac{1}{2}'$	$33°42'$	$33°47\frac{1}{2}'$	$33°54'$	$33°55\frac{1}{2}'$

Da queste deviazioni si calcolano per l'indice di rifrazione del raggio straordinario (ε) i valori seguenti:

$$\varepsilon = 1{,}62407 \quad 1{,}62596 \quad 1{,}62722 \quad 1{,}63733 \quad 1{,}63890 \quad 1{,}64075 \quad 1{,}64117$$

I valori corrispondenti per il raggio ordinario (deviazione $= \delta\omega$, indice di rifrazione $= \omega$), come si è già accennato, poterono essere determinati solamente per due colori della fiamma del petrolio. Ma a motivo della debole intensità delle linee si fu costretti ad anteporre alla fessura del collimatore una lente concentratrice. Pertanto i seguenti valori si devono ritenere come appena approssimativi.

	Rosso	Verde
$\delta\omega =$	$34°54\frac{1}{2}'$	$36°38\frac{1}{2}'$
$\omega =$	1,65787	1,68701

I valori di ε e di ω sono notevolmente più elevati di quelli finora ottenuti per altre varietà di tormalina; pertanto anche per il potere rinfrangente si distingue dalle altre la tormalina cromica degli Urali.

La determinazione del peso specifico della tormalina cromica degli Urali, eseguita col picnometro alla temperatura di 15° c. gradi e su piccoli frammenti del minerale, diede i risultati seguenti:

I	3,111
II	3,124
III	3,125
Media	3,120

Il minerale ridotto in scheggie sottili e riscaldato al cannello si fonde piuttosto facilmente in un globulo opaco di colore bianco grigiastro, a superficie liscia e non scoriacea. Col borace produce una perla perfettamente trasparente e di colore verde smeraldo intenso. Col sale di fosforo la perla riesce egualmente colorata in verde, e nel suo interno notasi uno scheletro di silice insolubile. La polvere del minerale mescolata con carbonato sodico e nitrato potassico e riscaldata fortemente, forma una massa fusa di colore giallo carico. Questa massa fusa ripresa con acqua fornisce una soluzione gialla, la quale inacidita con acido acetico e filtrata dal deposito di silice ed allumina, trattata con acetato neutro di piombo produce un precipitato di colore giallo, solubile in un eccesso di idrato potassico. Nel residuo della massa fusa insolubile nell'acqua, trattato con acido cloridrico, si trovarono: allumina, ossido di ferro, magnesia e piccole quantità di calce. La polvere del minerale mescolata con fluoruro calcico e bisolfato di potassio colora la fiamma intensamente in verde. L'esame spettroscopico di questa fiamma ci dimostrò che il coloramento verde è prodotto dall'acido borico. Il minerale ridotto in polvere finissima non è intaccato dagli acidi ordinarî ed assai difficilmente ed incompletamente dall'acido fluoridrico.

Invece il minerale fuso e finissimamente polverizzato è scomposto dall'acido solforico e più facilmente dall'acido fluoridrico. L'esame del prodotto della decomposizione di questo ultimo acido ha provato che la tormalina contiene soda e traccie di potassa. Nemmeno coll'esame spettroscopico si riuscì di rintracciare in questo minerale la presenza della litina. Il minerale ridotto in polvere e riscaldato anche per parecchie ore alla temperatura di una ordinaria lampada di Bunsen non diminuisce sensibilmente di peso. Invece alla temperatura d'una fiamma a gaz alimentata da aria compressa soffre una diminuzione di peso del 3,068 per cento (media di due determinazioni), svolgendo dell'acqua e fluoruro di silicio. Il ferro è accompagnato da piccole traccie di ossido di manganese ed è contenuto in questo minerale allo stato di ossido ferroso. Tutte le volte che abbiamo calcinato la silice separata dagli altri componenti del minerale, ci è occorso d'osservare sul fondo del crogiuolo di platino una lieve macchia bruna che scompariva colla massima facilità per l'azione del carbonato sodico [1]. Ciò ci fa sospettare la presenza di traccie di un corpo che ha funzione acida, ma che non sappiamo a quale sostanza precisamente attribuire; del resto la piccola quantità del materiale che avevamo a nostra disposizione per le analisi ci ha impedito di tentare a questo riguardo ulteriori ricerche.

Le difficoltà che ordinariamente si riscontrano nell'analisi quantitativa delle tormaline, nel caso nostro erano accresciute per diverse circostanze. Innanzi tutto la presenza di quantità relativamente considerevoli di ossido cromico rese più laboriosi i soliti metodi di separazione della silice e della allumina. Riuscì pur malagevole, specialmente per la scarsità del materiale destinato all'analisi, la scelta di cristalli affatto privi di materie straniere. Osservando al microscopio la polvere ottenuta con frammenti di cristalli che ad un esame superficiale sembravano puri, vi abbiamo ritrovato qualche volta delle particelle di cromite. Inoltre anche i frammenti di cristalli affatto privi di materie eterogenee esaminate sotto uno stesso spessore presentavano delle tinte diversamente cariche, il che, come ci siamo accertati, proviene dal variare della proporzione centesimale di ossido di cromo che è maggiore nei cristalli più intensamente colorati in verde. L'analisi di cui noi riportiamo più sotto i risultati si riferisce ad un materiale scelto colla massima cura e che presentava la maggior possibile omogeneità di colorazione.

Per separare completamente l'ossido cromico dalla silice abbiamo aggiunto al carbonato sodico potassico, adoperato per la scomposizione del minerale, un poco di nitrato potassico. Con questa precauzione abbiamo ottenuto direttamente, senza ricorrere ad un ulteriore trattamento, della silice affatto priva di ogni traccia di cromo. Nella soluzione acida, privata dalla silice, tutto il cromo venne ridotto allo stato di ossido mediante acido cloridrico ed alcool. Si precipitarono ripetutamente gli ossidi di alluminio, di ferro e di cromo per separarli completamente dalla magnesia. Questi ossidi furono in seguito trattati in soluzione alcalina con acqua di bromo; e così si potè isolare completamente il cromo dagli ossidi di ferro e di allumina che furono tra loro separati mediante trattamento colla potassa. Il cromo fu di nuovo ridotto per poterlo dosare allo stato di ossido, ottenendosi così risultati più esatti di quelli

[1] La silice calcinata era perfettamente bianca e completamente lavata.

che si possono conseguire col dosamento sotto forma di cromato di piombo. In un'altra porzione di minerale si determinò direttamente il fluorio sotto forma di fluoruro di calcio usando delle solite cautele. Il risultato di questa determinazione ci servì per stabilire col calcolo la quantità di silice da aggiungersi a quella ritrovata nella operazione antecedente, nella quale abbiamo ritenuto che era sfuggita una piccola quantità di silice sotto forma di fluoruro di silicio in una proporzione che si suppose corrispondente alla quantità ritrovata di fluorio.

L'anidride borica fu ripetutamente dosata sotto forma di fluoboruro di potassio col metodo di Stromeyer, e fummo fortunati di ottenere in due determinazioni risultati molto vicini (9.28 — 9.74 per cento); la cui media si approssima assai a quella calcolata per differenza. Diciamo che fummo in ciò fortunati, perchè il metodo di Stromeyer, che è l'unico conosciuto per la determinazione diretta dell'anidride borica nei silicati, presenta tali difficoltà ed incertezze, che noi più che alla nostra abilità ascriviamo a fortuna la concordanza soddisfacentissima dei risultati ottenuti.

L'acqua fu calcolata dalla perdita per calcinazione sottraendovi una quantità di fluoruro di silicio corrispondente alla quantità di fluoro determinata direttamente.

Riassumendo i risultati delle nostre ricerche la tormalina cromica degli Urali presenterebbe la seguente composizione centesimale:

Fluoro	0. 65
Anidride silicica	36. 79
Anidride borica	9. 51
Allumina	30. 56
Ossido cromico	10. 86
Ossido ferroso con traccie di ossido di manganese	2. 91
Magnesia	4. 47
Calce	0. 72
Soda con traccie di potassa	1. 36
Acqua	2. 25
	100. 08

Ritenendo che l'ossido cromico sostituisca in parte l'allumina, la tormalina cromica degli Urali da noi analizzata dovrebbe essere classificata nel terzo dei gruppi adottati dal Rammelsberg nel suo classico lavoro sulla composizione chimica delle tormaline [1].

Come contributo alla conoscenza dei rapporti che passano tra i diversi composti naturali di cromo, crediamo cosa non fuor di luogo l'esporre qui alcune idee sulla loro diffusione. Riesce molto interessante l'osservare che si può stabilire un limite ben distinto tra due categorie di giacimenti di minerali di cromo; una comprende i giacimenti che contengono esclusivamente combinazioni di ossido cromico, l'altra abbraccia quei depositi in cui il cromo è allo stato di acido cromico, e solamente per eccezione e soltanto in piccolissima quantità trovasi associato a combinazioni ossidate povere di cromo. Si può pure osservare che in nessun luogo (e potremmo scegliere per esempio: gli Urali, il Brasile, l'isola di Luzon, o l'Ungheria) si sono trovati degli

[1] *Handbuch der Mineral-Chemie.* 2.ª Auflage, pag. 544.

arnioni o giacimenti di ferro cromato in immediata vicinanza dei depositi di cromati. Si potrebbe forse cercare la causa di questo fenomeno in un anteriore processo di inoltrata ossidazione che lasciò nessuna traccia di composti di cromo allo stato di sesquiossido. È però probabile che i cromati debbano la loro origine non al ferro cromato ma, come quest'ultimo minerale, abbiano attinto il cromo a quelle combinazioni (silicati) che contenevano questo elemento in piccola quantità, ed in uno stato tale che per la sua fina suddivisione abbia potuto sentire l'influenza di qualche energica azione ossidante. Devesi pur considerare che i cromati (Crocoite, Melanocroite, Vauquelinite, Laxmannite, Fosfocromite, Jossaite) si trovano associati ai solfati che derivano dall'ossidazione dei solfuri, ed ai carbonati che sono il prodotto di una inoltrata scomposizione; e che inoltre le combinazioni di sesquiossido di cromo, esclusivamente silicati, vi si trovano associati in quantità affatto piccole, e sono da ritenersi o come sorgenti primitive di cromo, o forse come prodotti di epigenesi, come sono a cagion d'esempio i cristallini di tormalina inchiusi nel quarzo della Tocilnaja Gora e dei dintorni di Berjósowsk.

I fatti che abbiamo riferito non spiegano il meccanismo della formazione dei cromati, giacchè rimane ancora da risolvere il problema sulla natura dell'agente che ha potuto produrre fenomeni di una così energica ossidazione.

Senza abbandonarci ad ulteriori ipotesi ci sembra cosa non superflua il ricordare che il cloruro d'oro deve essere considerato come uno dei più energici agenti d'ossidazione, e che, come venne dimostrato da St. Meunier [1] e da uno di noi [2] esso può ossidare i solfuri con separazione d'oro metallico e di zolfo. Si può pure ricordare che la più grande diffusione di cromati negli Urali si trova in quella stessa località di Berjosówsk dove si riconobbero le prime ed anche più grandi quantità d'oro tanto nelle alluvioni come nelle roccie in posto. Ivi si trova di frequente galena rivestita d'oro [3], e non manca nemmeno lo zolfo isolato sotto quella forma di sottili rivestimenti e di granuli, chè accade di osservare quando si sottopongono i solfuri ad una celere ed energica ossidazione.

I cromati si trovano negli scisti talcosi e cloritici, dei quali i primi contengono della fucsite povera di cromo. È molto interessante a questo riguardo una varietà di scisto talcoso il quale racchiude dei frammenti spatici di mesitina e si distingue per il colore verde vivo del suo talco. I minatori di Berjósowsk chiamano questa roccia col nome di litwjanite che le fu conservato da G. Rose. In questa roccia tipica insieme alla pirite marziale trovasi disseminato un altro minerale in grani neri che non è cromite, ma bensì magnetite, ciò che conferma le nostre supposizioni. Il cromato più abbondante negli Urali è la crocoite, che vi è conosciuta in tre punti differenti, nei quali tutti Rose osservò anche la litwjanite facendo rimarcare espressamente tale associazione.

[1] Comptes rend. de l'Ac. des Sciences. Paris 2 Avril 1877. Tome LXXXIV, pag. 638.

[2] Cossa, R. Acad. dei Lincei. Transunti 3 giugno 1877 e *Ricerche chimiche e microscopiche su roccie e minerali d'Italia*. Torino 1881, pag. 72.

[3] Barbot de Marny, Verh. d. k. russ. mineral. Gesellsch. St. Petersburg, 1855-1856, pag. 203. Söchting, ibid. 1862, pag. 131. — Un esemplare di tale galena trovasi anche nel Museo Mineralogico di Berlino.

Dei principali risultati che si deducono dalla Statistica idrometrica del fiume Tevere nel sessantennio dal 1 gennaio 1822 a tutto il 31 dicembre 1881.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

letta nella seduta del 25 giugno 1882.

(Con una tavola)

Col giorno 31 dicembre del decorso anno 1881 compì il sessantennio delle osservazioni quotidiane dell'altezza del pelo d'acqua del Tevere misurata a mezzodì all'idrometro di Ripetta; idrometro che a consiglio di quell'insigne idraulico che fu Giuseppe Venturoli fu messo in opera nell'anno 1821.

Queste osservazioni fecero già oggetto di studi e di pubblicazioni successive dello stesso Venturoli, di Cavalieri S. Bertolo e di me che vi parlo. Io più fortunato degli altri miei colleghi, perchè ad essi posteriore, ho avuta più larga messe di osservazioni a mia disposizione, ed oltre l'effemeride annuale che ho seguitato a pubblicare in prosecuzione di quelle del Venturoli e del Cavalieri, ho potuto già presentare i risultati della statistica idrometrica del quarantennio 1822-1861 del cinquantennio 1822-1871, ed ora ho in pronto la statistica idrometrica dell'intero sessantennio 1822-1881, che sarà pubblicata dal Ministero dei lavori pubblici, come parte della suppellettile di osservazioni e di rilievi che serva a mettere in evidenza l'indole di questo nostro fiume metropolitano.

Mi permetto di accennare qui per sommi capi alcune delle principali conseguenze cui mi ha condotto lo studio ed il confronto di queste 21915 misure od osservazioni, che tante se ne contano dal 1 gennaio 1822 a tutto il 31 dicembre 1881.

Dirò pertanto in primo luogo come considerando il Tevere *in stato di magra* fino che l'altezza del pelo d'acqua all'idrometro di Ripetta non supera i 6 metri; *in stato di acque ordinarie* quando detta altezza è compresa fra i 6 e gli 8 metri; *in stato d'intumescenza* quando oscilla fra gli 8 ed i 12 metri; e finalmente *in stato di vera e minacciosa piena* quando supera i metri 12, se si divide il sessantennio in parola in periodi decennali si trova che il numero dei giorni nei quali in ciascun decennio si verificò pel Tevere o l'uno o l'altro degli stati sopraindicati è dato dalla seguente:

Decennio	Statistica dei giorni *nei quali il Tevere si è trovato in stato di*				Totale
	magra	acque ordinarie	intumescenza	piena	
I decennio (1822-1831)	giorni 1765	giorni 1625	giorni 246	giorni 16	giorni 3652
II decennio (1832-1841)	1437	1864	327	25	3653
III decennio (1342-1851)	1173	2084	348	47	3652
IV decennio (1352-1861)	573	2509	527	44	3653
V decennio (1862-1871)	1155	2124	344	29	3652
VI decennio (1372-1881)	906	2242	473	32	3653
Totale (sessantennio 1822-1881)	giorni 7009	giorni 12448	giorni 2265	giorni 193	giorni 21915

E raggruppando i decennî successivi si ottiene che il Tevere ha corso in stato di acque magre, ordinarie, intumescenti od in piena nel

	magra	stato ordinario	intumescenza	piena	Totale
decennio (1822-1831)	giorni 1765	giorni 1625	giorni 246	giorni 16	giorni 3652
ventennio (1822-1841)	3202	3482	573	41	7305
trentennio (1822-1851)	4375	5573	921	88	10957
quarantennio (1822-1861)	4948	8082	1448	132	14610
cinquantennio (1822-1871)	6103	10206	1792	161	18262
sessantennio (1822-1881)	7009	12448	2265	193	21915

Dai quali due prospetti si deduce facilmente il *numero medio* dei giorni in cui in ciascun anno sia dei singoli decennî successivi, sia dei decennî successivi raggruppati nel modo sopra esposto, le acque del Tevere furono o magre, o ordinarie, o intumescenti od in piena, e cioè nel

	magra	stato ordinario	intumescenza	piena	Totale
I decennio (1822-1831)	giorni 176,50	giorni 162,50	giorni 24,60	giorni 1,60	giorni 365,20
II decennio (1832-1841)	143,70	186,40	32,70	2,50	365,30
III decennio (1342-1851)	117,30	208,40	34,80	4,70	365,20
IV decennio (1852-1861)	57,30	250,90	52,70	4,40	365,30
V decennio (1362-1371)	115,50	212,40	34,40	2,90	365,20
VI decennio (1872-1881)	90,60	224,20	47,30	3,20	365,30
decennio (1822-1831)	giorni 176,50	giorni 162,50	giorni 24,60	giorni 1,60	giorni 365,20
ventennio (1822-1841)	160,10	174,45	28,65	2,05	365,25
trentennio (1822-1851)	145,83	185,76	30 70	2,93	365,22
quarantennio (1822-1861)	123,70	202,05	36,20	3,30	365,25
cinquantennio (1822-1871)	122,06	204,12	35,85	3,22	365,25
sessantennio (1822-1881)	116,82	207,46	37,75	3,22	365,25

Quindi ne consegue che nei sei decenni compresi dal 1 gennaio 1822 a tutto il 31 dicembre 1881 il numero dei giorni in cui il Tevere ha corso in magra ha oscillato fra un *minimum* di giorni 573, verificatosi nel IV decennio (1852-1861), ed un *maximum* di giorni 1765, verificatosi nel I decennio (1822-1831).

Che del pari il numero dei giorni in cui il Tevere si è mantenuto in stato ordinario ha oscillato fra un *minimum* di giorni 1625, verificatosi nel I decennio (1822-1831), ed un *maximum* di giorni 2509 che ha avuto luogo nel IV decennio (1852-1861).

Così pure, che il numero dei giorni in cui il Tevere fu intumescente ha oscillato fra un *minimum* di giorni 246 che si riscontrò nel I decennio (1822-1831), ed un *maximum* di giorni 527 verificatosi nel IV decennio (1852-1861).

E finalmente che il numero dei giorni di vera e minacciosa piena del Tevere oscillò fra un *minimum* di giorni 16 verificatosi nel I decennio (1822-1831) ed un *maximum* di giorni 47 presentato dal III decennio (1842-1851).

Fu dunque il IV decennio quello in cui il Tevere presentò il minimo numero complessivo di giorni di magra; il I decennio quello in cui si verificò il minimo numero complessivo di giorni in cui il Tevere corse in stato ordinario, e similmente

quello in cui il Tevere si presentò intumescente, od anche in stato di vera e minacciosa piena pel minimo numero complessivo di giorni.

Viceversa il II decennio fu quello in cui si verificò il massimo numero complessivo di giorni di magra; il IV decennio quello in cui si verificò il massimo numero complessivo di giorni in cui il Tevere corse in stato ordinario, e quello in cui si verificò del pari il massimo numero complessivo di giorni d'intumescenza: E finalmente il III decennio quello in cui si avverò il massimo numero complessivo di giorni in cui il Tevere presentò vere e minacciose piene.

In altri termini il I decennio è stato quello del massimo numero di giorni di magra e del minimo numero di giorni di stato ordinario, d'intumescenza e di piena. Il IV decennio è stato il decennio del massimo numero di giorni di stato ordinario e d'intumescenza, del minimo numero di giorni di magra. Finalmente il III decennio è stato quello del massimo numero di giorni di piena.

Ed ora ordinati i singoli anni secondo il numero progrediente dei giorni in cui il Tevere corse in magra, in stato ordinario, intumescente ed in piena, si ottiene il seguente;

Prospetto degli anni classificati

secondo il numero dei giorni nei quali il Tevere ha corso in stato

di magra		ordinario		d'intumescenza		di piena	
anni	giorni	anni	giorni	anni	giorni	anni	giorni
1853	6	1834	56	1834	2	1822	—
1855	11	1825	65	1825	5	1824	—
1879	12	1822	106	1828	7	1825	—
1838	19	1830	127	1832	12	1828	—
1860	19	1849	127	1824	13	1831	—
1847	28	1869	139	1852	16	1832	—
1859	35	1866	148	1831	17	1834	—
1827	51	1845	155	1835	17	1840	—
1837	52	1823	156	1840	17	1842	—
1842	62	1835	159	1850	18	1852	—
1857	64	1832	160	1866	20	1854	—
1875	66	1831	162	1868	20	1862	—
1856	68	1824	168	1833	21	1868	—
1858	70	1851	168	1849	22	1833	1
1864	70	1826	183	1867	23	1835	1
1862	71	1833	183	1826	25	1849	1
1881	74	1843	185	1839	25	1861	1
1846	77	1840	186	1822	26	1865	1
1848	81	1878	186	1880	29	1826	2
1870	85	1829	187	1829	30	1837	2
1863	87	1844	187	1842	30	1839	2
1876	90	1867	193	1846	31	1841	2
1868	91	1828	201	1854	32	1847	2
1852	93	1836	202	1877	32	1857	2
1872	95	1871	202	1861	35	1864	2
1874	96	1877	204	1844	36	1866	2
1873	99	1841	207	1851	36	1867	2
1861	102	1839	208	1871	36	1876	2
1854	105	1850	211	1848	37	1877	2
1865	105	1880	214	1863	37	1079	2
1836	107	1865	219	1873	37	1880	2
1841	117	1872	222	1870	38	1881	2
1880	121	1873	224	1841	39	1823	3
1871	124	1874	225	1862	39	1827	3

anni	giorni	anni	giorni	anni	giorni	anni	giorni
1878	126	1861	227	1830	40	1829	3
1877	127	1876	227	1865	40	1848	3
1839	130	1854	228	1869	40	1850	3
1843	131	1870	233	1827	41	1851	3
1850	133	1863	237	1857	41	1871	3
1844	136	1881	240	1874	41	1872	3
1829	145	1864	243	1823	42	1874	3
1867	147	1846	244	1858	42	1858	4
1845	152	1848	245	1843	44	1860	4
1826	155	1875	245	1859	45	1863	4
1828	158	1856	247	1847	46	1830	5
1851	158	1853	248	1856	46	1843	5
1833	160	1859	249	1872	46	1856	5
1840	163	1838	250	1876	47	1873	5
1823	164	1837	253	1878	47	1875	5
1869	180	1855	255	1845	48	1869	6
1824	185	1862	255	1875	49	1878	6
1831	186	1868	255	1881	49	1836	7
1835	188	1879	255	1836	50	1844	7
1830	193	1852	257	1864	51	1833	8
1832	194	1857	258	1837	58	1859	8
1866	195	1860	263	1860	80	1870	9
1849	215	1827	270	1838	86	1838	10
1822	233	1842	273	1855	87	1845	10
1825	295	1859	277	1879	96	1855	12
1834	307	1847	289	1853	103	1846	13

Dal quale prospetto si rileva come l' anno 1853 fosse quello in cui si verificò il minimo numero dei giorni di magra (e cioè 6 giorni); l'anno 1834 fu quello in cui si verificò il minimo numero di giorni in cui il Tevere corse in stato ordinario (giorni 56); l'anno 1834 fu quello in cui i giorni d'intumescenza furono i minori (2 soli giorni). E finalmente come negli anni 1822, 1824, 1825, 1828, 1831, 1832, 1834, 1840, 1842, 1852, 1854, 1862, 1868 non si verificò alcun giorno di vera e minacciosa piena.

Per converso poi l'anno 1834 fu quello che presentò il massimo numero di giorni di magra (307 giorni). L'anno 1847 fu quello che presentò il massimo numero di giorni in cui il Tevere corse in stato ordinario (giorni 289); nell'anno 1853 si verificò il massimo numero di giorni in cui il Tevere corse intumescente (giorni 103); e finalmente l'anno 1846 presentò il massimo numero di giorni di piena (giorni 13).

Si rileva del pari dall'esame della tabella sovraesposta qualmente risultando che il numero medio dei giorni in cui nel sessantennio il Tevere corse in magra fu di 117, e come essendosi ciò verificato appunto nell'anno 1841 che è il 32mo della serie degli anni disposti in ordine progressivo dei giorni di magra; così per 31 anni il Tevere ebbe un numero di giorni di magra inferiore al numero medio verificatosi nel sessantennio, e per 28 anni ne ebbe un numero maggiore.

Similmente essendosi verificato pel sessantennio, che il numero medio dei giorni in cui il Tevere corse in stato di acque ordinarie fu 207; l'anno 1841 fu nuovamente quello in cui si verificò appunto il detto numero di giorni di acque ordinarie. E siccome detto anno nella tabella ordinata secondo il numero progrediente dei giorni di acque ordinarie è il 27mo; così ne discende che per 26 anni il Tevere ebbe un numero di giorni di acque medie inferiore al medio del sessantennio, e per 33 ne ebbe un numero superiore.

Analogamente il numero medio dei giorni in cui nel sessantennio il Tevere

si mostrò intumescente essendo 38, e ciò essendosi verificato nell'anno 1870 che è il 32mo della rispettiva serie, ne consegue che dei 60 anni presi ad esame, per 31 anni si verificò un numero di giorni d'intumescenza inferiore alla media del sessantennio, e per 28 anni un numero di giorni superiore.

Finalmente il numero medio dei giorni nei quali durante il sessantennio il Tevere si presentò in stato di vera e minacciosa piena essendo 3; 9 anni (1823, 1827, 1829, 1848, 1850, 1851, 1871, 1872 e 1874) presentarono appunto un numero di giorni di piena eguale al medio, mentre 13 anni non presentarono verun giorno di vera piena; 19 un numero di giorni di piena inferiore al numero medio generale del sessantennio e 19 un numero di giorni superiore al suddetto.

Si rileva del pari dai detti prospetti come l'anno 1841 fu quello in cui quasi esattamente si verificò il regime medio del fiume dedotto dalle osservazioni idrometriche del sessantennio 1822-1881.

Infatti ebbe giorni 117 di magra, che è appunto il numero medio dei giorni di magra verificatosi nel sessantennio. Ebbe 207 giorni di stato ordinario che è anch'esso il numero medio dei giorni di stato ordinario verificatosi nel sessantennio. Ebbe 39 giorni d'intumescenza che differisce di un solo giorno in più dal numero medio dei giorni d'intumescenza verificatosi nel sessantennio. Ed ebbe soli 2 giorni di vera e minacciosa piena che differisce di un solo giorno in meno dal numero medio di giorni di piena verificatosi nel sessantennio.

Ed ora volendo in secondo luogo accennare alcuno dei risultati ottenuti relativamente alle altezze medie del Tevere nei singoli decenni, mi limiterò ad accennare che esse furono le seguenti

Altezza media.

I	decennio	1822-1831	metri	6.3853
II	decennio	1832-1841	»	6.5024
III	decennio	1842-1851	»	6.8058
IV	decennio	1852-1861	»	7.0051
V	decennio	1862-1871	»	6.6634
VI	decennio	1672-1881	»	6.8299

Che raggruppate per decenni successivi divengono:

Decennio	1822-1831	metri	6.30530
Ventennio	1822-1841	»	6.44385
Trentennio	1822-1851	»	6.56450
Quarantennio	1822-1861	»	6.67465
Cinquantennio	1822-1871	»	6.67240
Sessantennio	1822-1881	»	6.69865

o più semplicemente metri 6.70.

Dall' esame di questi prospetti si rileva come l'altezza media decennale del Tevere all'idrometro di Ripetta oscillò fra un *minimum* di metri 6.3853 verificatosi nel I decennio (1822-1831) ed un *maximum* di metri 7.0051 verificatosi nel IV

decennio (1852-1861). Che raggruppati gli anni di osservazione per decennio, ventennio, trentennio ecc., salvo piccolissima oscillazione dal quarantennio al cinquantennio, l'altezza media complessiva, estesa ad un periodo crescente di 10 in 10 anni, andò sempre gradatamente aumentando fino a raggiungere il limite di metri 6.70, che è l'altezza media generale verificatasi col sessantennio. Che il limite entro il quale ha oscillato la detta altezza media è così poco esteso da confermare l'indole perenne, ed il regime regolare di questo, se non il più importante, certo il più celebrato fiume d'Italia.

Che se si dispongano gli anni del sessantennio secondo l' ordine progressivo delle rispettive altezze medie annuali si ha il seguente prospetto:

Anno	Altezza media	Anno	Altezza media	Anno	Altezza media
1834	metri 5,694	1851	metri 6,558	1857	metri 6,862
1825	5,899	1830	6,584	1848	6,886
1832	6,014	1854	6,594	1881	6,890
1828	6,130	1877	6,600	1836	6,894
1822	6,176	1869	6,609	1876	6,901
1835	6,202	1841	6,643	1856	6.932
1831	6.224	1871	6,663	1870	6.940
1824	6,245	1823	6.670	1864	6,970
1840	6,267	1861	6,676	1847	6,971
1849	6,274	1874	6,701	1846	6,975
1833	6,329	1865	6,711	1827	6,990
1866	6,334	1878	6,730	1859	7,009
1867	6,442	1863	6,740	1875	7,026
1829	6,446	1843	6,750	1837	7,036
1868	6,461	1842	6,754	1879	7,377
1850	6,478	1862	6,764	1860	7,407
1826	6.489	1872	6,768	1838	7,449
1852	6,492	1844	6,774	1853	7,601
1839	6,496	1873	6,785	1855	7,629
1880	6,521	1858	6.849	1844	7,638

Dal quale prospetto si rileva come essendo di metri 6.69865 (o più semplicemente di metri 6.70) l'altezza media generale del sessantennio, dessa corrisponde con grandissima approssimazione all' altezza media verificatasi nell' anno 1874 che è il 30mo, nella scala graduatoria sopra espressa. Si può quindi ritenere che dei 60 anni ai quali le osservazioni prese ad esame si riferiscono, 29 hanno presentata una altezza media inferiore alla media generale del sessantennio, uno ha presentata quasi esattamente la media generale e 30 hanno avuta una altezza media superiore a quella generale del sessantennio.

Inoltre come la differenza fra la media generale (6.69) e la minima fra le altezze medie annuali (5.69), ossia la differenza in meno fra la minima altezza media annuale e la media generale del sessantennio sia stata di metri 1.00; mentre la differenza fra la media massima annuale (7.638) e la media generale (6,698) ossia la differenza in più, è stata di metri 0.94. Che è quanto dire che le differenze in più ed in meno sono state pressochè eguali fra loro, e non guari diverse da 1 metro.

Finalmente compilando la consueta *effemeride* o registro giornaliero dell' altezza del pelo di acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta, non più colle

altezze ottenute dalle osservazioni fatte al mezzodì di ciascun giorno di un dato anno, ma sibbene colle altezze medie dedotte da quelle osservate *in ciascun giorno omonimo* dell'intero sessantennio si ha la seguente effemeride che chiamerò

EFFEMERIDE DEL REGIME MEDIO DEL TEVERE NEL SESSANTENNIO 1822-1881

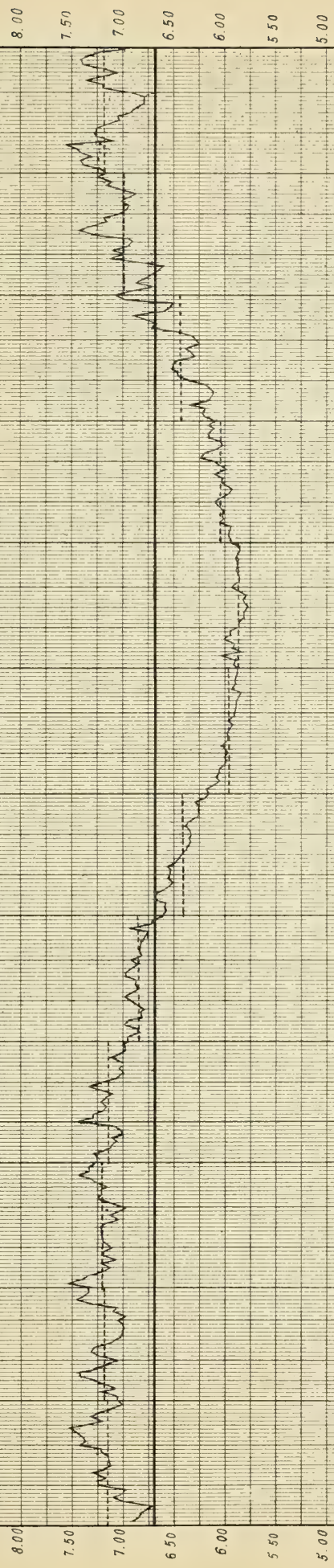
dedotto dalle altezze del pelo d'acqua osservato all'Idrometro di Ripetta al mezzodì di ciaschedun giorno omonimo del sessantennio sudetto.

	Genn.	Febbr.	Marzo	Aprile	Magg.	Giugn.	Luglio	Agosto	Sett.	Ottob.	Nov.	Dic.
1	6,93	7,05	7,52	7,25	6,94	6,57	6,17	5,90	5,86	6,18	6,90	7,22
2	6,89	7,18	7,38	7,28	6.85	6,59	6,12	5,88	5,87	6,21	6,69	7,38
3	6.85	7,07	7,34	7,19	6,85	6.58	6,07	6,05	5,88	6,19	6,86	7,40
4	6,76	7,22	7,18	7.10	6,98	6,71	6,09	5,88	5,86	6,33	6,78	7,31
5	6,71	7,27	7,14	7,06	6,94	6,69	6,07	5,94	6,07	6,16	6,73	7,39
6	6,98	7,36	7,20	7,09	6,83	6,61	6,07	5,91	6,02	6,13	6,65	7,44
7	7,08	7,39	7,07	7,00	6,83	6,56	6,02	6,00	6,03	6,11	6,59	7,16
8	7,01	7,25	7,18	7,02	6,79	6,51	5,99	5,95	6,01	6,14	6,76	7,07
9	6,98	7,13	7,17	7,08	6,85	6,57	6,00	5,94	6,04	6,17	7,14	7,25
10	7,24	7,05	7,12	7,40	6,92	6,56	5,97	5,86	6,07	6,34	6,99	7,27
11	7,25	7,25	7,10	7,30	6,98	6,55	6,00	5,86	6,03	6,46	7,09	7,26
12	7,17	7,32	7,18	7,29	6,89	6,56	6,02	5,82	5,96	6,47	6,92	7,12
13	7,28	7,28	7,18	7,18	6,84	6,49	5,98	5,81	5,93	6,52	6,90	7,04
14	7,18	7,16	7,20	7,15	6,87	6,46	5,97	5,81	5,96	6,51	6,94	7,05
15	7,11	7,08	7,21	7,21	6,86	6,42	5,99	5,78	6,08	6,45	7,29	6,90
16	7,13	6,99	7,17	7,17	6,98	6,37	5,93	5,79	6,03	6,29	7,42	6,86
17	7,14	7,01	7,03	7,10	6,98	6,36	5,91	5,81	6,10	6,33	7,30	6,79
18	7,18	6,99	7,11	7,21	6,89	6,34	5,94	5,80	5,98	6.38	7,14	6,79
19	7,23	7,00	7,04	7,33	6,86	6,35	5,92	5,86	6,04	6,24	7,17	6,79
20	7,41	7,06	6,96	7,20	6,91	6,32	5,92	5,93	6,10	6,29	7,04	6,89
21	7,35	6,96	7,10	7,04	6,82	6,34	5,90	5,87	6,24	6,33	6,95	7,20
22	7,39	7,18	7,24	7,01	6,84	6,38	5,90	5,86	6,21	6,46	6,92	7,19
23	7,37	7,15	7,22	7,01	6,85	6,36	5,89	5,86	6,09	6,72	7,00	7,35
24	7,52	7,31	7,22	7,03	6,84	6,28	5,88	5,87	6,23	6,69	6,91	7,22
25	7,40	7,43	7,16	6,99	6,83	6,25	5,87	5,88	6.24	6,75	6,88	7,08
26	7.23	7,38	7,26	7,08	6,78	6,26	5,92	5,88	6,15	6,78	7,02	7,18
27	7,30	7,36	7,31	7,02	6,75	6,25	5,90	5,89	6,15	6,60	7,14	7,38
28	7,24	7,35	7,42	6,95	6,90	6,29	5,91	5,87	6,11	6,55	7,11	7,40
29	7,11		7,32	6,98	6,71	6,18	5,91	5,85	6,15	6,50	7,26	7,36
30	7.02		7,31	6,95	6,71	6,16	5,90	5,85	6,09	6,95	7,16	7,23
31	7.05		7,27		6,61		5,89	5,92		7,11		6,99
Somme	221,49	201,23	223,31	213,67	212,48	192,92	185,02	182,18	181,58	199,34	209,65	221,96
Altezza media dei mesi omonimi del sessantennio	7,145	7,187	7,204	7,122	6,854	6,431	5,968	5,877	6,053	6,430	6,988	7,160

Altezza media generale del sessantennio met. 6.701.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA

del regime medio del Tevere nel sessantennio 1822-1881

dedotto dalle altezze del pelo d'acqua osservate all'idrometro di Ripetta al mezzodì di ciascun giorno omonimo del detto sessantennio

Lit. Martelli, Roma

Effemeridi e statistica del fiume Tevere prima e dopo la confluenza dell'Aniene e dello stesso fiume Aniene durante l'anno 1881.

Memoria del Socio ALESSANDRO BETOCCHI

letta nella seduta del 18 giugno 1882.

(Con una tavola)

Ho l'onore di presentare, come di consueto, a questa r. Accademia l'effemeride e la relativa statistica idrometrica del Tevere durante il decorso anno 1881; effemeride che è la sessantesima che viene per tal modo resa di pubblica ragione.

Conformemente al sistema adottato negli anni antecedenti, l'effemeride che ora presento contiene il registro delle altezze del pelo d'acqua del fiume Tevere misurate al mezzodì di ciaschedun giorno del decorso anno 1881 all'idrometro di Orte ed a quello di Ripetta; ossia prima e dopo la confluenza dell'Aniene.

Contemporaneamente presento l'effemeride o registro dell'altezza del pelo di acqua di detto fiume Aniene misurata all'idrometro posto alla origine dei cunicoli del monte Catillo presso Tivoli. In questo registro mancano le osservazioni del mese di maggio e dei primi 6 giorni di giugno, causa l'infermità e conseguente decesso di quell'osservatore che venne rimpiazzato soltanto il giorno 7 giugno.

Come di consueto questi registri o prospetti numerici vengono accompagnati dalle rispettive rappresentazioni grafiche o diagrammi.

Dall'esame di detti registri è facile rilevare come ritenendo che il limite della magra del Tevere corrisponda a metri 6,00 della scala idrometrica di Ripetta; che lo stato di acque ordinario sia compreso dai 6 agli 8 metri; quello d'intumescenza dagli 8 ai 12; e quello di vera e minacciosa piena dai 12 metri in poi, il Tevere nell'anno 1881 corse in magra durante 74 giorni ossia per circa $^1/_5$ dell'anno; in stato ordinario per giorni 240 ossia per circa $^4/_6$ dell'anno; in stato d'intumescenza per giorni 49 che corrispondono a circa $^1/_8$ dell'anno, e per due sole volte (e cioè nei giorni 31 gennaio e 30 ottobre) presentò i sintomi di vera e minacciosa piena.

Di queste piene la prima, la quale segnò metri 12,54 al mezzodì del 31 gennaio, era già nello stadio di decrescenza, avendo raggiunto il colmo alle ore 6 antimeridiane del giorno stesso, toccando l'altezza massima di metri 12,62 alla quale si mantenne stazionaria per ore 2. La seconda invece ebbe appunto il suo colmo all'altezza di metri 12,10 segnata al mezzodì del 30 ottobre; alla quale altezza si mantenne stazionaria dalle ore 11 antimeridiane all'una pomeridiana del detto dì. Come si vede pertanto queste piene furono e di breve durata e di piccola importanza.

Ed ora compulsando i registri della statistica idrometrica del Tevere a partire dal 1° gennaio 1822, in cui ebbe principio la serie regolare delle osservazioni idrometriche quotidiane, si rileva come l'anno 1881, sebbene non possa annoverarsi fra quelli in cui lo stato di piena fu preponderante, pure non deve neppure annoverarsi fra quelli in cui il Tevere scorse povero di acque.

Infatti ordinati i singoli anni del sessantennio secondo il numero crescente di giorni in cui il Tevere corse in magra, l'anno 1881 occupa il 17mo posto. E quindi 16 anni soltanto ebbero un minor numero di giorni di magra, e ben 43 anni ne ebbero invece un numero maggiore.

Similmente ordinati i singoli anni del sessantennio secondo il numero progressivo dei giorni in cui le acque del Tevere si contennero nello stato ordinario, il posto occupato dall'anno 1881 è il 40mo. E per conseguenza ben 39 anni ebbero un numero di giorni di acque ordinarie minore del 1881 e soli 20 ne ebbero un numero maggiore.

Analogamente ordinati i detti anni secondo il numero ascendente dei giorni d'intumescenza, l'anno che si considera si trova essere il 52mo. E quindi superato soltanto da 8 anni; mentre esso invece, eguagliato soltanto sotto questo rapporto dal 1875, è superiore ad altri 50 anni.

E finalmente pei giorni di vera e minacciosa piena può considerarsi fra quelli che ne presentarono il minor numore, e di minore importanza.

Per ciò che risguarda poi l'altezza media verificatasi nell'anno 1881, essa risulta superiore a quella di ben 42 anni, ed inferiore soltanto a quella di anni 17.

Ma di questi e di altri molti particolari mi riservo di tener parola in altra adunanza nella quale esporrò i risultati della statistica idrometrica del Tevere nel sessantennio dal 1° gennaio 1822 a tutto il 31 dicembre 1881.

PIENA DEL 31 GENNAIO 1881.

REGISTRO DELLE ALTEZZE DEL PELO D'ACQUA DEL FIUME TEVERE

Giorno	Ora	*Idrometri* di Ripetta	di Ripagrande
27 Gennaio	ore 12 mer.	8,48	
	» 3 pom.	8,50	
28 »	» 6 ant.	9,55	
	» 7 »	9,70	
	» 8 »	9,75	
	» 9 »	9,81	
	» 10 »	10,00	
	» 11 »	10,20	
	» 12 mer.	10,32	4,15
	» 1 pom.	10,45	
	» 2 »	10,55	
	» 3 »	10,60	4,58
	» 4 »	10,67	
	» 5 »	10,75	
	» 6 »	10,80	4,73
29 »	» 6 ant.	11,40	5,25
	» 7 »	11,45	
	» 8 »	11.55	
	» 9 »	11,64	5.50
	» 10 »	11,72	
	» 11 »	11,77	
	» 12 mer.	11,80	5.66
	» 1 pom.	11.80	
	» 2 »	11,79	
	» 3 »	11,78	5,65
	» 4 »	11,77	
	» 5 »	11,75	
	» 6 »	11,73	5,62
30 »	» 6 ant.	11,45	5,37
	» 7 »	11,43	
	» 8 »	11,41	
	» 9 »	11,39	5,34
	» 10 »	11,44	
	» 11 »	11,49	
	» 12 mer.	11,52	5,45
	» 1 pom.	11,57	
	» 2 »	11,64	
	» 3 »	11,75	5,64
	» 4 »	11.90	

Giorno	Ora	*Idrometri* di Ripetta	di Ripagrande
30 Gennaio	ore 5 pom.	12.00	
	» 6 »	12,10	5,93
	» 7 »	12,22	
	» 8 »	12,30	
	» 9 »	12,34	6,15
	» 10 »	12,38	6,17
	» 11 »	12,41	6,19
	» 12 »	12,43	6,28
31 »	» 1 ant.	12,46	6,26
	» 2 »	12,48	6,28
	» 3 »	12,50	6,31
	» 4 »	12,54	6,33
	» 5 »	12,58	6,35
	» 6 »	12,62	6,36
	» 7 »	12,62	6,35
	» 8 »	12,60	6,35
	» 9 »	12,60	6,35
	» 10 »	10,59	6.35
	» 11 »	12,58	6,35
	» 12 mer.	12,54	6,34
	» 1 pom.	12,52	6,31
	» 2 »	12,48	6,28
	» 3 »	12,45	6,26
	» 4 »	12,41	6,24
	» 5 »	12,39	6,21
	» 6 »	12,35	6,18
	» 7 »	12,31	6,14
	» 8 »	12.25	6,10
	» 9 »	12,20	6,06
	» 10 »	12,14	6,01
	» 11 »	12,08	5,95
	» 12 »	12,02	5,89
1 Febbraio	» 1 ant.	11.94	
	» 2 »	11.86	
	» 3 »	11.78	5.70
	» 4 »	11,70	
	» 5 »	11,62	
	» 6 »	11,54	5,48
	» 7 »	11,40	

		Idrometri di Ripetta	Idrometri di Ripagrande
1 Febbraio	ore 8 ant.	11,30	
	» 9 »	11,23	5,26
	» 10 »	11,14	
	» 11 »	11,04	
	» 12 mer.	10,96	5.04
	» 1 pom.	10,85	
	» 2 »	10,76	
	» 3 »	10,70	4,75
	» 4 »	10,60	
	» 5 »	10,53	
	» 6 »	10,46	4,56
	» 9 »	10,22	4,37
	» 12 »	10,05	4,17
2 »	» 3 ant.	9,88	
	» 6 »	9,72	
	» 7 »	9,70	
	» 8 »	9,66	
	» 9 »	9,63	
	» 10 »	9,60	
	» 11 »	9,57	
	» 12 mer.	9,53	
	» 1 pom.	9,49	
	» 2 »	9,46	
2 Febbraio	ore 3 pom.	9,43	
	» 4 »	9,41	
3 »	» 8 ant.	8,98	
	» 9 »	8,95	
	» 10 »	8,93	
	» 11 »	8,91	
	» 12 mer.	8,91	
	» 1 pom.	8,89	
	» 2 »	8,87	
	» 3 »	8,86	
	» 4 »	8,83	
	» 5 »	8,80	
4 »	» 7 ant.	8,56	
	» 8 »	8,54	
	» 9 »	8,52	
	» 10 »	8,51	
	» 11 »	8,50	
	» 12 mer.	8,50	
	» 1 pom.	8,48	
	» 2 »	8,46	
	» 3 »	8,44	
	» 4 »	8,44	

PIENA DEL 30 OTTOBRE 1881

		Idrometri di Ripetta	Idrometri di Ripagrande
29 Ottobre	ore 9 ant.	7,69	
	» 12 mer.	7,84	
	» 3 pom.	8,11	
30 »	» 6 ant.	11,56	5,35
	» 9 »	11,98	5,74
	» 10 »	12,03	
	» 11 »	12,10	
	» 12 mer.	12,10	5,94
	» 1 pom.	12,10	
	» 2 »	12,09	
	» 3 »	12,05	5,87
	» 6 »	11,85	5,76
	» 9 »	11,61	5,49
	» 12 »	11,40	5,26
31 »	» 3 ant.	11,23	5,14
	» 6 »	11,25	5,15
	» 7 »	11,30	
	» 8 »	11,30	
	» 9 »	11,30	5,17
	» 10 »	11,25	
	» 11 »	11,19	
31 Ottobre	ore 12 mer.	11,18	5,10
	» 1 pom.	11,15	
	» 2 »	11,14	
	» 3 »	11,15	5,02
	» 6 »	11,07	4,96
	» 9 »	11,06	4,90
	» 12 »	10,92	4,83
1 Novembre	» 3 ant.	10,73	4,72
	» 6 »	10,58	4,57
	» 9 »	10,48	4,48
	» 12 mer.	10,44	4,44
	» 3 pom.	10,38	4,38
	» 6 »	10,32	4,35
	» 9 »	10,21	4,28
	» 12 »	10,08	4,16
2 »	» 3 ant.	10,00	4,08
	» 6 »	9,60	3,70
	» 9 »	9,36	3,71
	» 12 mer.	9,21	3,30
	» 6 pom.	9,01	
	» 12 mer.	8,29	

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell'altezza del pelo d'acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Orte al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1881.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	2,27	3,12	1,76	2,37	2,03	1,60	1,62	1,26	1,21	1,84	3,11	1,49
2	2,51	2,77	2,77	2,24	1,99	1,60	1,52	1,25	1,38	1,79	2,47	2,51
3	2,20	2,58	2,21	2,27	1,97	1,56	1,45	1,25	1,59	1,64	2,12	2,00
4	2,12	2,43	2,00	2,01	2,71	1,53	1,43	1,25	1,53	1,56	2,00	1,78
5	2,71	2,35	1,90	1,97	2,96	1,52	1,40	1,24	1,39	1,51	1,90	1,65
6	3,59	2,27	1,88	1,96	3,31	1,51	1,39	1,24	1,37	1,45	1,84	1,58
7	3,14	2,17	1,86	1,97	2,47	1,58	1,36	1,24	1,30	1,41	1,77	1,55
8	2,40	2,11	1,84	2,05	2,28	2,43	1,35	2,23	1,29	1,40	1,70	1,52
9	2,21	2,09	1,82	2,15	2,02	2,91	1,35	1,22	1,50	1,64	1,69	1,51
10	2,04	2,08	1,82	2,07	1,98	2,34	1,34	1,23	1,38	2,46	1,66	1,50
11	1,97	2,05	1,81	2,05	2,24	2,27	1,34	1,23	1,33	1,90	1,64	1,83
12	2,96	2,02	1,81	2,29	2,11	2,01	1,33	1,22	1,36	1,69	1,62	2,57
13	2,39	2,05	1,78	2,00	2,02	1,72	1,32	1,21	1,61	1,48	1,60	1,92
14	3,00	2,02	1,75	1,97	1,98	1,68	1,31	1,21	1,42	1,42	1,59	1,73
15	3,77	1,98	1,72	1,93	1,97	1,70	1,31	1,22	1,36	1,41	1,57	1,67
16	3,33	1,97	1,70	1,89	1,93	1,66	1,31	1,23	1,34	1,40	1,55	1,65
17	2,72	1,93	1,68	1,84	1,90	1,64	1,31	1,39	1,35	1,40	1,53	1,63
18	2,53	1,89	1,67	1,84	1,87	1,62	1,31	1,29	1,34	1,51	1,50	1,61
19	3,78	1 87	1,66	1,81	1,83	1,60	1,30	1,26	1,35	1,46	1,49	1,48
20	5,03	1,85	1,66	1,80	1,88	1,57	1,29	1,25	1,35	1,47	1,49	1,51
21	3,08	1,84	1,66	1,84	1,83	1,54	1,36	1,25	1,35	2,09	1,48	1,53
22	2,69	1,81	1,65	2,46	1,81	1,52	1,29	1,24	1,34	3,12	1,48	1,87
23	2,83	1,79	1,65	2,71	1,77	1,50	1,31	1,23	1,33	2,08	1,47	2,04
24	2,60	1,79	1,65	2,43	1,82	1,47	1,28	1,23	1,33	1,81	1,47	2,71
25	2,41	1,78	1,65	2,10	1,76	1,46	1,28	1,22	1,32	3,25	1,46	2,08
26	2,27	1,77	1,90	2,00	1,82	1,44	1,27	1,22	1,31	2,71	1,45	1,94
27	2,62	1,77	1,99	1,98	1,71	1,44	1,26	1.22	1,29	2,44	1,45	1,80
28	3,58	1,70	2,22	3.51	1,78	1,85	1,26	1,22	1,29	2,18	1,45	1,72
29	4,50		2,29	2,44	1,93	1,53	1,25	1,21	1,29	2,35	1,46	1,67
30	3,86		2,01	2,16	1,72	2,03	1,27	1,21	1,38	4,06	1,45	1,65
31	4,10		2,39		1,65		1,26	1,21		3,45		1,64
Sommata	89,17	57,85	58,16	64,11	63,05	51,89	41,43	38,38	40,98	61,38	50,46	55,34
Media	2,88	2,07	1,88	2,14	2,03	1,73	1,34	1,24	1,37	1,98	1,68	1,79
Massima	5,03	3.12	2,77	3,51	3,31	2,91	1,62	1,39	1,61	4,06	3,11	2,71
Minima	1,97	1,70	1,65	1,80	1,65	1,44	1.25	1,21	1,21	1,40	1,45	1,48
Differenza	3,06	1,42	1,12	1,71	1,66	1,47	0,37	0,18	0,40	2,66	1,66	1,23

Effemeride del Tevere,
ossia Registro giornaliero dell' altezza del pelo d' acqua del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1881.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	6,35	10,96	6,50	8,20	7,42	6,52	6,53	5,87	5,81	6,05	10,44	6,13
2	6,82	9,53	6,62	8,07	7,15	6,49	6,37	5,87	5,83	6,55	9,21	7,73
3	7,40	8,91	8,27	7,60	7,03	6,43	6,19	5,87	5,86	6.58	8,29	7,65
4	7,13	8,50	7,17	7,42	6,96	6,40	6,15	5,88	5,97	6,34	7,80	6,74
5	6,97	8,21	6,83	7,15	8,74	6,38	6,12	5,88	6,16	6,23	7,45	6,42
6	9,52	7,94	6,70	7,00	8,93	6,38	6.10	5,88	5,97	6,10	7,22	6,29
7	9,36	7,76	6,66	6,89	8,81	6,55	6,07	5,88	5,97	6,14	7,09	6,28
8	8,47	7,57	6,60	6,95	7,85	7,09	6,06	5,84	5,91	6,08	6,90	6,20
9	7,53	7,40	6,57	7,98	7,48	7,85	6,04	5,84	5,88	6.24	6,79	6,18
10	7,16	7,31	6,54	7,19	7,26	8,74	6,04	5,84	5,98	8,35	6,70	6,17
11	6,91	7,31	6,52	7,13	7,33	8,05	6,02	5.85	5,94	7,74	6.62	6,17
12	7,07	7,23	6,47	7,21	7,44	7,68	6,00	5.84	6,01	6,68	6,55	8,24
13	8,55	7,25	6.46	7,55	7,22	7,18	5,98	5.84	6,16	6,36	6.48	7,47
14	8,20	7,28	6,43	6.93	7,13	7,04	5,97	5,84	6,30	6,20	6,44	6,85
15	8,78	7,07	6,41	6,93	7,10	6,84	5,96	5,85	6,04	6,11	6,40	6,60
16	11,29	6,95	6,38	6,80	6,99	6,80	5,94	5,85	5,94	6,09	6,35	6.47
17	9,66	6,88	6,34	6,79	6,89	6,71	5,96	5,95	6,09	6,02	6,33	6,39
18	8,75	6,83	6,32	6,68	6,79	6,62	5,96	5,98	5,94	6,00	6,29	6,35
19	8,60	6,80	6,30	6,65	6,79	6,54	5,94	5,93	5,93	6,13	6,28	6,34
20	11,47	6,75	6,30	6,58	6,78	6,55	5,93	5,89	5.92	6,04	6,25	6,48
21	11,62	6,70	6,30	6,56	6,67	6,46	5,94	5,86	5,89	6,06	6,24	6,50
22	9,22	6,67	6,30	6,85	6,60	6,40	6,10	5,86	5.88	6,90	6,20	6,56
23	8,68	6,65	6,29	8,41	6,62	6,37	5,99	5.84	5,84	8,73	6,19	7,75
24	8,68	6,61	6,27	8,58	6,61	6,31	5,98	5,83	5,83	7,13	6,16	9,40
25	8,21	6.57	6,27	7,70	6,73	6,28	5,94	5,82	5,86	7,80	6,16	8,04
26	8,17	6,56	6,26	7,20	6.66	6,25	5.92	5,79	5,82	9,12	6,14	7,27
27	8,48	6,57	6,73	7,05	6,65	6,22	5,90	5,79	5,82	8,84	6,13	7,07
28	10,32	6,51	6,67	7,95	6,53	6,20	5,90	5,79	5,82	8,02	6,11	6,85
29	11,80		7,91	9,13	6,63	6,47	5,87	5,79	5,82	7,84	6,11	6,69
30	11,52		7,33	7,72	6,94	6,26	5,87	5,81	5,92	12,10	6,10	6,64
31	12,54		7,40		6,72		5,87	5,81		11,18		6,55
Sommata	273,23	207,28	206,12	220,85	221,45	202,06	186,61	181.46	178,11	221.75	203,42	212,47
Media	8,91	7,40	6,65	7,36	7,14	6,74	6,02	5,85	5,94	7,15	6,78	6,85
Massima	12,54	10,96	8,27	9,13	8,93	8,74	6.53	5,98	6,30	12,10	10,44	9,40
Minima	6,35	6,51	6,26	6,56	6,53	6,20	5,87	5.79	5,81	6,00	6,10	6,13
Differenza	6,19	4,45	2,01	2,57	2,40	2,54	0,66	0,19	0,49	6,10	4,34	3,27

Effemeride dell'Aniene, ossia Registro giornaliero dell' altezza del pelo d' acqua del Fiume Aniene all'idrometro esistente all' imbocco del cunicolo sinistro presso Tivoli, al mezzodì di ciascun giorno dell'anno 1881.

GIORNI del mese	Gennaio Altezza osservata Met. lin.	Febbraio Altezza osservata Met. lin.	Marzo Altezza osservata Met. lin.	Aprile Altezza osservata Met. lin.	Maggio Altezza osservata Met. lin.	Giugno Altezza osservata Met. lin.	Luglio Altezza osservata Met. lin.	Agosto Altezza osservata Met. lin.	Settembre Altezza osservata Met. lin.	Ottobre Altezza osservata Met. lin.	Novembre Altezza osservata Met. lin.	Dicembre Altezza osservata Met. lin.
1	1,20	1,70	1,40	2,00			1,50	1,40	1,55	1,64	1,95	1,35
2	1,20	1,50	1,60	2,00			1,50	1,40	1,50	1,72	1,90	1,40
3	1,30	1,50	1,50	1,70			1,40	1,40	1,65	1,74	1,80	1,40
4	1,40	1,50	1,50	1,60			1,50	1,40	1,63	1,65	1,70	1,35
5	2,20	1,90	1,50	1,60			1,50	1,40	1,60	1,73	1,45	1,35
6	1,50	1,60	1,40	1,60			1,50	1,40	1,63	1,75	1,40	1,35
7	2,20	1,40	1,40	1,60		2,40	1,50	1,40	1,61	1,80	1,30	1,35
8	1,50	1,60	1,40	1,60		1,90	1,50	1,50	1,58	1,71	1,30	1,35
9	1,30	1,80	1,40	1,50		1,90	1,50	1,50	1,60	1,90	1,30	1,35
10	1,30	1,60	1,40	1,50		1,90	1,50	1,50	1,58	1,82	1,35	1,40
11	1,30	1,60	1,40	1,50		1,70	1,50	1,40	1,55	1,65	1,30	1,45
12	1,30	1,70	1,40	1,50		1,70	1,50	1,40	1,63	1,62	1,30	1,45
13	1,50	1,50	1,40	1,80		1,50	1,40	1,50	1,65	1,60	1,30	1,40
14	2,20	1,50	1,40	1,60		1,50	1,40	1,50	1,63	1,65	1,30	1,45
15	2,40	1,50	1,40	1,60		1,50	1,40	1,50	1,60	1,65	1,35	1,40
16	2,40	1,50	1,40	1,50		1,70	1,40	1,50	1,62	1,64	1,40	1,35
17	2,20	1,50	1,40	1,50		1,60	1,40	1,50	1,68	1,60	1,35	1,30
18	2,20	1,50	1,35	1,50		1,60	1,40	1,50	1,65	1,58	1,30	1,30
19	2,00	1,40	1,35	1,50		1,60	1,40	1,50	1,63	1,56	1,30	1,40
20	1,90	1,40	1,35	1,50		1,60	1,40	1,50	1,60	1,64	1,30	1,35
21	1,80	1,40	1,35	1,50		1,50	1,40	1,50	1,58	1,82	1,30	1,30
22	1,80	1,40	1,35	1,50		1,50	1,40	1,50	1,60	1,80	1,30	1,30
23	1,90	1,40	1,35	1,50		1,50	1,40	1,65	1,63	1,70	1,30	1,40
24	1,70	1,40	1,35	2,00		1,50	1,40	1,65	1,65	2,53	1,30	1,40
25	1,70	1,40	1,35	1,80		1,50	1,40	1,65	1,64	2,15	1,30	1,35
26	2,30	1,40	1,40	1,70		1,50	1,40	1,65	1,62	1,90	1,30	1,35
27	2,10	1,40	1,40	1,60		1,50	1,40	1,65	1,60	1,65	1,30	1,35
28	3,00	1,40	1,40	1,60		1,50	1,40	1,65	1,55	1,90	1,30	1,35
29	2,60		1,40	1,60		1,50	1,40	1,63	1,53	1,70	1,40	1,35
30	2,60		1,50	1,80		1,50	1,40	1,63	1,65	2,15	1,40	1,35
31	3,00		2,90				1,40	1,60		2,42		1,35
Sommata	59,00	42,40	45,10	48,80		39,10	44,50	46,86	48,22	55,57	41,85	42,35
Media	1,90	1,51	1,45	1,63		1,63	1,44	1,51	1,61	1,79	1,39	1,37
Massima	3,00	1,90	2,90	2,00		2,40	1,50	1,65	1,68	2,53	1,95	1,45
Minima	1,20	1,40	1,35	1,50		1,50	1,40	1,40	1,50	1,56	1,30	1,30
Differenza	1,80	0,50	1,55	0,50		0,90	0,10	0,25	0,18	0,97	0,65	0,15

Anno 1881.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI ORTE OSSIA INNANZI LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	89,17	2,88	5,03	1,97	3,06
Febbraio	57,85	2,07	3,12	1,70	1,42
Marzo	58,16	1,88	2,77	1,65	1,12
Aprile	64,11	2,14	3,51	1,80	1,71
Maggio	63,05	2,03	3,31	1,65	1,66
Giugno	51,89	1,73	2,91	1,44	1,47
Luglio	41,43	1,34	1,62	1,25	0,37
Agosto	38,38	1,24	1,39	1,21	0,18
Settembre	40,98	1,37	1,61	1,21	0,40
Ottobre	61,38	1,98	4,06	1,40	2,66
Novembre	50,46	1,68	3,11	1,45	1,66
Dicembre	55,34	1,79	2,71	1,48	1,23
	672,20				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{672,20}{365} = 1,842$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 5,03 }
» minima » » 1,21 } differenza massima 3,82.

Anno 1881.

STATISTICA DEL FIUME TEVERE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO DI RIPETTA OSSIA DOPO LA CONFLUENZA DELL'ANIENE.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata Met. lin.	Media Met. lin.	Massima Met. lin.	Minima Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	273,23	8,91	12,54	6,35	6,19
Febbraio	207,28	7,40	10,96	6,51	4,45
Marzo	206,12	6,65	8,27	6,26	2,01
Aprile	220,85	7,36	9,13	6,56	2,57
Maggio	221,45	7,14	8,93	6,53	2,40
Giugno	202,06	6,74	8,74	6,20	2,54
Luglio	186,61	6,02	6,53	5,87	0,66
Agosto	181,46	5,85	5,98	5,79	0,19
Settembre	178,11	5,94	6,30	5,81	0,49
Ottobre	221,75	7,15	12,10	6,00	6,10
Novembre	203,42	6,78	10,44	6,10	4,34
Dicembre	212,47	6,85	9,40	6,13	3,27
	2514,81				

Altezza media generale dell'anno met. lin. $\frac{2514,81}{365} = 6,890$.

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 12,54 }
» minima » » 5,79 } differenza massima 6,75.

Anno 1881.

STATISTICA DEL FIUME ANIENE

OSSERVATO ALL'IDROMETRO COLLOCATO ALL'IMBOCCO DEL CUNICOLO SINISTRO PRESSO TIVOLI.

MESI	ALTEZZA MENSILE		ALTEZZA		DIFFERENZE
	Sommata	Media	Massima	Minima	
	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.	Met. lin.
Gennaio	59,00	1,90	3,00	1,20	1,80
Febbraio	42,40	1,51	1,90	1,40	0,50
Marzo	45,10	1,45	2,90	1,35	1,55
Aprile	48,80	1,63	2,00	1,50	0,50
Maggio	(¹)				
Giugno	(²) 39,10	1,63	2,40	1,50	0,90
Luglio	44,50	1,44	1,50	1,40	0,10
Agosto	46,86	1,51	1,65	1,40	0,25
Settembre	48,22	1,61	1,68	1,50	0,18
Ottobre	55,57	1,79	2,53	1,58	0,95
Novembre	41,85	1,39	1,95	1,30	0,65
Dicembre	42,35	1,37	1,45	1,30	0,15
	513,75				

Altezza media generale dell'anno (³) met. lin. $\frac{513,75}{328} = 1,566.$

Altezza massima dell'intero anno met. lin. 3,00 } differenza massima 1,80.
» minima » » 1,20 }

(¹) Mancano le osservazioni del mese di maggio a causa della malattia e susseguente decesso dell'incaricato della esecuzione di dette osservazioni.

(²) Mancano per la sopradetta ragione le osservazioni dei primi sei giorni del mese di giugno.

(³) O più esattamente dei 328 giorni di cui si hanno le osservazioni.

RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Aniene all'imbocco dei Cunicoli a Tivoli
durante l'anno 1881
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Tevere all'idrometro di Orte
durante l'anno 1881
RAPPRESENTAZIONE GRAFICA
delle altezze giornaliere del Fiume Tevere all'idrometro di Ripetta
durante l'anno 1881
GENNAJO
FEBBRAJO
MARZO
APRILE
MAGGIO
GIUGNO
LUGLIO
AGOSTO
SETTEMBRE
OTTOBRE
NOVEMBRE
DECEMBRE

Sopra alcuni derivati del Carbazolo.

Memoria di G. L. CIAMICIAN e P. SILBER

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 25 giugno 1882.

Acido carbazolico.

In seguito ad alcune ricerche sul comportamento del composto potassico del pirrolo verso l'anidride carbonica a temperatura elevata, l'uno di noi accennò circa due anni fa, alla possibilità d'ottenere per la stessa via un nuovo acido dal composto potassico del carbazolo ([1]).

Noi abbiamo ora ripreso queste ricerche con più grandi quantità di materia e siamo in grado di descrivere dettagliatamente la reazione.

Si riscalda il composto potassico del carbazolo, ottenuto secondo le prescrizioni di Graebe ([2]), fondendo il carbazol con potassa, in una piccola storta tubulata a 270° in un bagno di una lega metallica, e si fa passare nella storta mediante un tubo che pesca nella massa fusa, una corrente di anidride carbonica perfettamente secca. Il composto potassico che fonde in sul principio va man mano solidificandosi mentre sublima una parte di carbazolo. L'operazione dura circa due ore. Le quantità da noi impiegate erano di 15 gr. di composto potassico per volta.

Il contenuto della storta viene trattato con acqua che scioglie il sale potassico del nuovo acido lasciando indietro il carbazol ripristinato che riveste le pareti superiori della storta che stavano fuori del bagno. Il carbazol che si riottiene può servire ad un' altra operazione. — Si filtra; i liquidi giallo-oscuri provenienti dalle singole operazioni (è vantaggioso di non impiegare più di 15 gr. di composto potassico per volta) vengono concentrati e poi acidificati con acido solforico diluito. Si ottiene l'acido in forma di un abbondante precipitato biancastro, fioccoso che sciolto in carbonato potassico, e bollita con carbone animale la soluzione, viene nuovamente precipitato con acido solforico. L'acido greggio che ne risulta, dopo essere stato lavato con acqua e seccato nel vuoto sull'acido solforico, ha l'aspetto di una polvere giallo-grigia.

Il rendimento è di 10 $^0/_0$ della quantità di carbazolo impiegato.

La purificazione di questa sostanza offre grandissime difficoltà e richiede una lunga serie di operazioni; perciò anche partendo da una grande quantità di materia greggia non si ottengono che pochi grammi di sostanza pura.

([1]) Monatshefte für Chemie I. 628.

([2]) Liebig's Annalen 202, 20.

La seguente via è quella che ci è sembrata la migliore. Si stempera la massa in una quantità di alcool insufficiente a sciogliera completamente, riscaldando di quando in quando a b. m. Dopo completo raffreddamento si filtra coll'aiuto di una tromba aspirante e si ripete col residuo questo trattamento per 10 o 15 volte. Si riesce così ad ottenere una polvere quasi bianca che viene sciolta nell' etere per togliere alcune traccie di materie estranee.

L'acido così ottenuto (circa 25 % della quantità primitiva) non è però ancor puro, (l'analisi diede 71,42 % di carbonio e 4,29 % di idrogeno; calcolato 72,93 e 4,26) ma si può ora facilmente renderlo tale sublimandolo a bassa temperatura, mentre che l'acido greggio non è sublimabile, scomponendosi quasi totalmente. La sublimazione deve esser fatta ad una temperatura di circa 150°-160°, per evitare la formazione di carbazolo che altrimenti ha luogo per parziale scomposizione dell'acido. — Si ottengono in tal modo delle pagliette incolore che hanno una fluorescenza azzurra, ma che contengono sempre tracce di carbazolo. Per levare quest'ultimo si scioglie in carbonato potassico, ed il filtrato acidificato ed estratto con etere dà l'acido in forma di una polvere quasi bianca che viene cristallizzata dall' alcool bollente. Per lento raffreddamento si ottengono squamette incolore di splendore madreperlaceo.

Le analisi diedero i numeri seguenti:

I) 0,1700 gr. di materia diedero 0,4635 gr. di CO_2 e 0,0740 gr. di OH_2.

II) 0,1987 gr. di materia dettero 0,5334 gr. di CO_2 e 0,0814 gr. di OH_2.

III) 0,2226 gr. di materia dettero 0,6040 gr. di CO_2 e 0,1010 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato		
	I.	II.	III.
C	74,35	73,11	73,99
H	4,83	4,55	5,06 (¹)

	Calcolato per la formola $C_{13}H_9NO_2$	trovato in media
C	73,93	73,82
H	4,26	4,69

Il nuovo acido forma delle squame o dei prismi appiattiti incolori di splendore madreperlaceo, leggermente fluorescenti in azzurro che fondono a 271°—272°. Esso è quasi insolubile nell'acqua tanto fredda che bollente, poco solubile nell'alcool freddo, più notevolmente in quello bollente; facilmente si scioglie nell'etere.

Esso non dà la reazione del carbazol coll'acido nitrico. È sublimabile ma riscaldato repentinamente si scinde in carbazolo ed anidride carbonica; ciò avviene ancora più facilmente riscaldandolo colla calce.

Noi chiameremo questo corpo *acido carbazolcarbonico*, o più brevemente *acido carbazolico*, e crediamo che la sua sintesi dal composto potassico del carbazolo ed anidride carbonica, possa venire espressa dall'equazione seguente:

$$2C_{12}H_8NK + CO_2 = C_{12}H_9N + C_{12}H_7.COOK.NK.$$

(¹) La determinazione dell'idrogeno riuscì accidentalmente più grande di quello che avrebbe dovuto essere, di questa non venne perciò tenuto conto nel calcolo per trovare il valore medio delle analisi.

La formola $C_{13}H_9O_2N$ venne pure confermata dalle analisi dei sali argentico e baritico.

Sale argentico [$C_{13}H_8AgO_2N$]. Si ottiene questo sale in forma di un precipitato bianco, trattando una soluzione del sale ammoniacale, avuto per svaporamento nel vuoto sull'acido solforico di una soluzione dell'acido in ammoniaca, con una soluzione di nitrato argentico. Esso forma una polvere bianchissima poco solubile nell'acqua.

0,2475 gr. di carbazolato d'argento diedero per calcinazione 0,0845 gr. di argento.

In 100 parti:

trovato	calcolato per $C_{13}H_8AgNO_2$
Ag 34,14	33,96

Sale baritico [$(C_{13}H_8O_2N)_2Ba$]. Una soluzione acquosa del sale ammonico dà con cloruro baritico un precipitato di pagliette bianche quasi insolubili nell'acqua, d'uno splendore madreperlaceo.

0,3595 di carbazolato baritico seccato a 105° diede 0,1494 gr. di Ba SO_4.

In 100 parti:

trovato	calcolato per $(C_{13}H_8O_2N)_2Ba$
Ba 24,37	24,59

Noi abbiamo infruttuosamente tentato di ottenere un acido carbazolico per altre vie. Il sale potassico del solfoacido che si ottiene tanto facilmente non diede nè col cianuro potassico o col ferrocianuropotassico, nè col formiato potassico il risultato desiderato. Nella maggior parte dei casi si riottiene il carbazolo.

Fondendo il solfosale potassico con potassa o soda caustica sembra che si formino tracce d'una sostanza fenica.

Il tentativo di trasformare il bromocarbazolo in metilcarbazolo e di ottenere per questa via un acido carbazolcarbonico, ci diede pure risultati negativi. Impiegando il metodo di Fittig, si ottenne dal bromoacetilcarbazolo, sodio e joduro metilico il metilcarbazol di Graebe, cioè quello nel quale il residuo alcoolico è attaccato all'azoto.

Azione del bromo sull'acetil-carbazolo.

Facendo agire il bromo sulla soluzione del carbazol in solfuro di carbonio si ottengono dei prodotti grigio-azzurri che male si prestano alla purificazione. Più facilmente si riesce ad ottenere sostanze ben definite partendo dal composto acetilico.

L'acetil-carbazol venne preparato secondo le prescrizioni di Graebe ed ottenuto in aghi fondenti a 69°. — Noi abbiamo trattato la soluzione del composto acetilico in solfuro di carbonio con una quantità di bromo corrispondente ad una molecola. Si riscalda il liquido per qualche tempo a b. m. in un apparecchio a ricadere, e poi si distilla il solfuro di carbonio. Il residuo, una massa gialla e cristallina, venne sciolto nell'alcool bollente, e purificato facendolo cristallizzare più volte da questo solvente.

Così ottenuto il « *Monobromo-acetil-carbazol* » forma lamelle incolori fondenti a 128°, che sono molto solubili nell'alcool e nel toluene bollenti, precipitando completamente per raffreddamento. Nell'etere si scioglie difficilmente.

La seguente determinazione di bromo svelò la composizione di questo corpo.

0,4125 gr. di materia dettero 0,2750 gr. di AgBr.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_7BrNC_2H_3O$
Br	28,07	27,77

La potassa acquosa non serve a scomporre il bromo-acetil-carbazolo, bollendolo però con potassa alcoolica si ottiene il « *Monobromo carbazolo* ».

Per preparare questo corpo si scalda il composto acetilico con un eccesso di potassa alcoolica a b. m. per qualche ora e si distilla l'alcool. Il residuo viene lavato con acqua fino a reazione neutra e poi fatto cristallizzare dall'alcool.

Forma delle grandi lamelle rombiche, di forte splendore vitreo, che si sciolgono facilmente nell'alcool bollente, dal quale si riottengono completamente per raffreddamento. Fondono a 199°.

Una determinazione di bromo diede il risultato seguente:

0,2635 gr. di materia dettero 0,1945 gr. di AgBr.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_8BrN$
Br	32,52	31,96

Azione dell'acido nitrico sull'acetil-carbazolo.

Graebe e Glaser fanno cenno nella loro Memoria sul carbazolo [1] dell'azione dell'acido nitrico sopra questo composto. Graebe [2] ottenne più tardi facendo agire l'acido nitrico concentrato sul carbazol un tetranitro-composto. — Noi abbiamo studiato l'azione di questo reattivo sull'acetil-carbazolo, ottenendo i seguenti risultati.

Introducendo 25 gr. di composto acetilico in circa 300 gr. di acido nitrico fumante, si produce una viva reazione con sviluppo di vapori nitrosi e riscaldamento del liquido. Finita la reazione spontanea si continua a riscaldare a b. m. fino che cessa lo sviluppo di vapori rossi. Il liquido che da principio prende un colore verde bruno, diventa a poco a poco di un rosso bruno più chiaro e depone per raffreddamento una polvere gialla, cristallina che viene separata dal liquido, e seccata sulla calce. Da quest'ultimo si ottiene per precipitazione con acqua una sostanza gialla che si pose pure a seccare sulla calce, dopo averla lavata ripetutamente con acqua.

Si ottenne in questo modo da circa 25 gr. di acetil-carbazolo, 21 gr. di composto cristallino, e 20 gr. di sostanza precipitata.

Da queste due frazioni noi abbiamo potuto isolare per ripetute cristallizzazioni frazionate dall'acido acetico glaciale quattro differenti *tetranitrocomposti isomeri*.

Tutte queste sostanze sono pressochè insolubili nei solventi ordinari, ma si sciolgono abbastanza facilmente nell'acido acetico glaciale bollente.

α) *Tetranitro-carbazol*. Impiegando molto acido acetico glac. si riesce a sciogliere la maggior parte del precipitato cristallino deposto spontaneamente dalla soluzione nitrica, e non resta indietro che una piccola frazione in forma di piccoli aghi colorati debolmente in giallo, che sono insolubili affatto. Si ottengono in questo modo

[1] Liebigs Annalen 163, 343.
[2] Liebigs Annalen 202, 26.

direttamente allo stato di sufficiente purezza come lo dimostra la seguente analisi.

0,1955 gr. di materia seccata a 105° dettero 0,2985 gr. di CO_2 e 0,0405 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_5(NO_2)_4N$
C	41,63	41.50
H	2,30	1,44

Essi fondono scomponendosi a circa 308°. Si mantengono inalterati stando esposti all'aria, o stando nel vuoto, e non perdono di peso se vengono scaldati a 110°. Trattati con potassa si colorano in giallo intenso, dopo molto tempo prendono una tinta rossa.

β) *Tetranitrocarbazol.* La soluzione acetica separata per filtrazione della parte insolubile or descritta depone per raffreddamento dopo circa 24 ore dei cristalli in forma di tavole esagonali, tinte lievemente in giallo. Esse perdono però all'aria la loro lucentezza e trasparenza prendendo un colore più chiaro. Hanno pure la composizione d'un tetranitrocarbazolo come lo dimostra la seguente analisi.

0,3350 gr. di materia seccata a 105° diedero 0,5080 gr. di CO_2 e 0,0485 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_5(NO_2)_4N$
C	41,37	41,50
H	1,61	1,44

La sostanza seccata a 105° non fonde ancora a 320° e trattata con potassa si colora quasi subito in rosso vivo.

γ) *Tetranitro-carbazol.* La soluzione che in principio diede le tavole esagonali depone distillando una parte dell'acido acetico degli altri cristalli che si presentano costantemente in forma di tavole rombiche, d'un coloro giallo sbiadito. Stando esposte all'aria perdono di peso e diventano opache. Esse fondono scomponendosi a circa 285°. Trattati con potassa questi cristalli si colorano momentaneamente in rosso vivo.

I cristalli del *β* e *γ* tetranitro-carbazolo contengono probabilmente acido acetico che perdono spontaneamente stando esposti all'aria.

L'analisi diede i risultati seguenti:

0,2495 gr. di sostanza seccata a 105° dettero 0,3780 gr. di CO_2 e 0,0390 di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_5(NO_2)_4N$
C	41,32	41,50
H	1,72	1,44

δ) *Tetranitro-carbazol.* La parte del nitrocomposto che fu ottenuta precipitando la soluzione acida con acqua si scioglie completamente nell'acido acetico glaciale bollente e per raffreddamento si ottengono assieme ad una piccola quantità di cristalli del *γ* tetranitro-carbazolo, che sono meno solubili, dei piccoli prismi a base quadrata d'un colore giallo carico.

Essi non si alterano nè all'aria, nè scaldati a 110° e si scompongono totalmente prima di fondere.

Trattati con potassa restano inalterati e soltanto per ebollizione prendono un colore rossastro.

L'analisi dimostra che anche questa sostanza è un tetranitro-carbazolo.

0,4200 gr. di materia dettero 0,6355 gr. di CO_2 e 0,0670 gr. di OH_2.

In 100 parti:

	trovato	calcolato per $C_{12}H_5(NO_2)_4N$
C	41,26	41,50
H	1,76	1,44

Per azione dell'acido nitrico fumante sul composto acetilico del carbazolo si ottengono dunque direttamente quattro diversi *tetranitro-carbazoli* isomeri. Fra questi predominarono il δ tetranitro-composto che è il più solubile nell'acido acetico glaciale e nell' acido nitrico. Il meno solubile, l' α tetranitro-composto si ottiene in quantità piccolissime. — Gli isomeri segnati con β) e γ) si colorano a freddo prontamente in rosso se vengono trattati con potassa, formando probabilmente un composto potassico che è stato pure accennato da Graebe. Questo composto è solubile nell'acqua e nell'alcool con coloramento giallo intenso. Dall' alcool cristallizza in piccoli aghetti rossi aggruppati.

Fondamenti di una Teoria generale delle forme algebriche.

Memoria di ALFREDO CAPELLI

approvata per la stampa negli Atti dell'Accademia
nella seduta del 5 marzo 1882.

PRELIMINARE

Generalizzando una nota formola del *Gordan* per le forme binarie, abbiamo dimostrato in altro luogo (¹) che una funzione razionale intera f di tre serie di variabili ternarie $x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3; z_1, z_2\, z_3$ può sempre esprimersi come una funzione intera del determinante (xyz) e di covarianti di funzioni φ che contengono due sole serie di variabili; tali funzioni φ erano poi alla lor volta covarianti di f. L'aver accertato tale proprietà della funzione di tre serie di variabili ci ha fatto senz'altro ritenere come sommamente probabile che valesse la proprietà analoga per funzioni di quattro serie di variabili ecc., e precisamente che ogni funzione di $\rho + 1$ serie di variabili $x, y, .., u, v$, di specie ρ, potesse esprimersi identicamente come una somma di termini del tipo (²)

$$(xy \ldots uv)^{\mu} \,.\, \Delta\varphi(x, y, .., u)$$

dove Δ fosse un'operazione invariantiva composta con un aggregato di operazioni del tipo

$$p_1 \frac{\partial}{dq_1} + p_2 \frac{\partial}{dq_2} + \ldots + p_{\sigma+1} \frac{\partial}{dq_{\sigma+1}}, \; p, q = x, y, z, \ldots.$$

(¹) *Sopra le forme algebriche ternarie a più serie di variabili.* Giornale di Matematiche Vol. XVIII.

(²) Ciò ha per conseguenza che la forma $f(x, y, \ldots, u, v)$ è *equivalente* al sistema delle forme $\varphi(x, y, \ldots, u)$, nel senso che ogni covariante di questo sistema è un covariante di f e reciprocamente. In ciò non deve scorgersi un disaccordo colla teoria stabilita da Clebsch nella sua Memoria, *Ueber eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie* (Abhandlungen der k. Gesellschaft d. Wiss. zu Göttingen Bd. 17. 1872) secondo la quale una funzione di $\sigma + 1$ serie di variabili *cogredienti* equivale a un sistema di forme che contengono una sola delle primitive serie di variabili e di più altre $\sigma - 1$ serie di variabili *digredienti* dalle primitive, anzi ciascuna di una certa natura sua propria; però il passaggio da questo sistema al nostro richiede l'uso di formole di riduzione che col crescere del numero σ diventano sempre più complicate. Ed invero il nostro sistema si ottiene immediatamente dalla forma simbolica di f (v. § V. formole 10 ed 11) nel mentre che l'altro richiede l'uso ripetuto della formola di Gordan interpretata nel campo di specie σ. Così p. e. per la forma ternaria a tre serie di variabili $a^2_x\, b^2_y\, c^2_z$ il nostro sistema si compone delle 5 forme con due serie *cogredienti* y, z:

$$a_y^2\, b_y^2\, c_z^2, \quad a_y\, a_z\, b_y^2\, c_z^2, \quad a_z^2\, b_y^2\, c_z^2, \quad (abc)\, a_y\, b_y\, c_z, \quad (abc)\, a_z\, b_y\, c_z,$$

e dell'invariante $(abc)^2$, nel mentre che il sistema formato colla serie x_1, x_2, x_3, ed una serie *controgrediente* u_1, u_2, u_3 si compone di forme meno semplici composte di fattori del tipo (abu) e di fattori del tipo a_x, quali sarebbero: $(abu)^2 c^2_x$, $(abu)(bcu)(cau)$, $(abu)\, a_x\, b_x\, c^2_x$, etc. (Vedi le *Vorlesungen* von. A. Clebsch pubblicate da Lindemann. VII. Abtheilung I.).

poichè allora $\Delta\varphi$ è necessariamente un covariante di φ. Di più affinchè la φ si presentasse come un covariante di f si era condotti ad ammettere che essa fosse della forma $\Delta'.\Omega^{\nu}f$ essendo Δ' una nuova operazione invariantiva della stessa specie della precedente ed Ω l'operazione introdotta dal *Cayley* definita dal simbolo

$$\Sigma \pm \frac{\partial}{dx_1}\frac{\partial}{dy_2}\cdots\frac{\partial}{dv_{\sigma+1}}$$

che è permutabile colle operazioni Δ. La formola di sviluppo sarebbe così

$$f = \Sigma\,(xy\ldots uv)^{\mu}.\,\Delta\Delta'\Omega^{\mu}f = \Sigma\,(xy\ldots uv)^{\mu}\Omega^{\mu}.\Delta\Delta'f$$

e dipenderebbe da operazioni di due tipi eterogenei. Noi però dimostreremo che esiste una certa operazione H della stessa natura di Δ tale che, qualunque sia la funzione F $(x,y,\ldots,u,v)$ su cui si opera, si ha identicamente

$$\text{H.F} = (xy\ldots uv).\Omega\text{F}.$$

Questo fatto ci fece avvertire che l'operazione Ω non è veramente essenziale per la teoria delle forme e che il nostro sviluppo poteva farsi dipendere dalle sole operazioni Δ. Di qui l'origine ed insieme il piano del presente lavoro: stabilire una teoria rigorosa delle operazioni Δ e da questa dedurre senza bisogno di artifizi lo sviluppo in discorso; finalmente come naturale applicazione stabilire la teoria dei covarianti di forme di specie qualunque in base a queste sole operazioni le cui proprietà principali sono *indipendenti dalla specie* delle variabili. L'aver potuto stabilire alcuni teoremi fondamentali che dimostriamo nel 1° § ci ha permesso di ridurre ai minimi termini la grande arbitrarietà inerente al tipo generale dell'operazione Δ e valutare alcuni numeri caratteristici per mezzo di funzioni numeriche che sono una generalizzazione diretta delle funzioni già in uso nella teoria delle forme binarie pel calcolo del numero dei covarianti di grado dato.

Nel § VI abbiamo ripreso fin dal principio la teoria dei covarianti dimostrandone rapidamente e colla massima generalità le proprietà più importanti finora conosciute, e nel § VII abbiamo dedotto la loro forma simbolica (secondo Aronhold e Clebsch) come conseguenza delle equazioni differenziali dei covarianti e del sopradetto sviluppo di una funzione di più serie di variabili.

All'ultimo § abbiamo riservato la difficile questione sul numero dei covarianti di grado dato nelle variabili e nei coefficienti delle forme fondamentali. Dopo aver fatto dipendere i covarianti di un sistema di forme di specie σ da sole σ equazioni differenziali ed aver dimostrato in modo diretto ed assolutamente rigoroso che le condizioni lineari date da ogni singola equazione differenziale sono fra loro indipendenti, abbiamo disgraziatamente dovuto accertarci che le condizioni date da una seconda equazione differenziale sono in parte conseguenza di quelle date già dalla prima. Così la questione resta risolta completamente pel solo caso delle forme binarie ($\sigma = 1$) e precisamente nel modo altre volte stato contestato ma ormai già stato messo fuori di dubbio da una Memoria di Sylvester (*Proof of the hiterto undemonstrated Fundamental Theorem of Invariants.* Philosophical Magazin. Marzo 1878, pg. 178). Così il numero che si presenterebbe naturalmente come generalizzazione immediata del numero relativo al caso di $\sigma = 1$ non rappresenta che un limite inferiore del numero cercato, il che tuttavia non toglie la speranza che questo possa ancora esprimersi colle analoghe funzioni numeriche, quand' anche in modo meno semplice.

§ I. *Teoria delle operazioni invariantive* (¹).

1. Nella presente Memoria chiameremo *serie di variabili di specie* σ o, più brevemente, *variabile di specie* σ l'insieme di $\sigma+1$ variabili $z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma+1}$ che entrino omogeneamente in tutte le funzioni razionali intere che dovremo considerare, e la rappresenteremo consegnatamente con un'unica lettera z, salvo indicare, ove sia necessario, il numero di variabili che essa rappresenta; il che del resto accadrà raramente essendoci noi proposti di stabilire in ciò che segue un ordine di considerazioni applicabili indifferentemente a forme di qualsivoglia specie. Come simbolo generale di una funzione razionale intera delle serie di variabili *indipendenti*

$$z \equiv z_1, z_2, \ldots, z_{\sigma+1}, \; z' \equiv z'_1, z'_2, \ldots, z'_{\sigma+1}, \; z'' \equiv z''_1 z''_2, \ldots, z''_{\sigma+1}, \ldots\ldots$$

potrà valere il solito $f(z, z', z'', \ldots)$, ovvero $f\left(\begin{matrix} m & m' & m'' \\ z, & z', & z'', \ldots \end{matrix}\right)$ ove importi mettere ove importi mettere in evidenza che ogni termine della funzione contiene le variabili della serie z alla dimensione m, quelle della serie z' alla dimensione m' ecc. I numeri $m, m', m'', \ldots$ si diranno i *gradi* della f nelle $z, z', z'', \ldots$ risp.

Se i è uno qualunque degli indici $1, 2, \ldots, \sigma+1$, la funzione $f\,(z, z', z'', \ldots)$ non si suppone necessariamente omogenea nelle variabili $z_i, z'_i, z''_i, \ldots$ Se k è la dimensione di queste variabili in un dato termine della funzione noi diremo che quel termine è del *grado k nell' indice i.*

2. Se z e ζ sono variabili di qualsivoglia specie, noi designeremo con $D_{z\zeta}$ l'operazione *elementare.*

$$\zeta_1 \frac{\partial}{dz_1} + \zeta_2 \frac{\partial}{dz_2} + \ldots + \zeta_{\sigma+1} \frac{\partial}{dz_{\sigma+1}}$$

cosicchè, se f è una funzione di gradi qualunque, anche nulli, delle variabili $z, \zeta, \ldots$, riterremo:

$$D_{z\zeta} f = \zeta_1 \frac{\partial f}{dz_1} + \zeta_2 \frac{\partial f}{dz_2} + \ldots + \zeta_{\sigma+1} \frac{\partial f}{dz_{\sigma+1}}$$

Distingueremo le operazioni $D_{z\zeta}$ in *proprie* ed *improprie* secondochè le variabili z e ζ sono indipendenti o sono una stessa variabile $(z_i = \zeta_i)$. Per un noto teorema di Eulero $D_{zz}.f$ è uguale ad f moltiplicata pel suo grado nella serie z. Se la funzione f non contiene z si ha evidentemente $D_{z\zeta}.f = 0$. Fra k serie di variabili $x, y, z, \ldots$ si hanno k^2 operazioni elementari, cioè le k $(k\text{-}1)$ operazioni proprie $D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, \ldots$, e le k improprie $D_{xx}, D_{yy}, D_{zz}, \ldots$

3. Il tipo più generale di un' operazione eseguibile fra k serie di variabili sarà per noi rappresentato da un aggregato razionale ed intero, a coefficienti costanti arbitrari, delle k^2 operazioni elementari che si possono formare con esse; i termini di questo aggregato si diranno i *termini* dell' operazione che distingueremo in *monomia* e *polinomia* secondochè si comporrà di un solo termine o di più.

Il tipo generale di un' operazione monomia sarà dunque

$$\alpha.\, \delta_\lambda \,.\, \delta_{\lambda-1} \ldots \delta_2 \,.\, \delta_1$$

(¹) Abbiamo anticipato questa denominazione che si riferisce ad una proprietà di queste operazioni (Cayley, fourth Memoir upon Quantics. Phil. Tr. 148) alla quale si deve il loro uso nella teoria dei covarianti. Vedi più in giù § VI, art. 73.

dove le $\delta_1, \ldots \delta_\lambda$ sono operazioni elementari non necessariamente distinte le une dalle altre, ed α è una costante arbitraria. Con

$$\alpha . \delta_\lambda, \delta_{\lambda-1} \ldots . \delta_2 . \delta_1 . f$$

noi intenderemo ciò che si ottiene eseguendo successivamente sopra f le operazioni $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_\lambda$ nell'ordine di scrittura e moltiplicando il risultato per α. Essendo α una costante assoluta od una funzione di variabili indipendenti da quelle fra cui operano le $\delta_1, \ldots \delta_2, \ldots \delta_\lambda$ si ha evidentemente:

$$\alpha . \delta_\lambda \, \delta_{\lambda-1} \ldots \delta_2 \, \delta_1 \, , f = \delta_\lambda \, \delta_{\lambda-1} \ldots \delta_2 \, \delta_1 . \alpha f$$

Il numero delle operazioni monomie così costruibili è *illimitato* poichè ammettiamo che nel prodotto $\delta_\lambda \, \delta_{\lambda-1} \ldots \delta_2 \, \delta_1$ letto da destra verso sinistra possa una stessa operazione elementare presentarsi *di seguito o ad intervalli* un numero qualunque di volte come fattore.

Un aggregato qualunque di operazioni elementari sarà designato in generale colla lettera Δ e con $\Delta \, f$ si intenderà la somma dei risultati che si ottengono operando su f coi singoli termini di cui si compone Δ. Chiameremo talora l'operazione Δ *propria* od *impropria* secondochè si compone di sole operazioni elementari proprie oppure no (art. 2).

Con δ^k intenderemo brevemente l'operazione δ ripetuta k volte di seguito o, come suol dirsi, la potenza k^{esima} della operazione δ.

Con la parola operazione, non accompagnata da ulteriori specificazioni, intenderemo sempre le operazioni ora definite come le sole *essenzialmente necessarie* alla teoria delle forme.

4. In ogni operazione monomia chiameremo *grado di derivazione rispetto* ad una variabile x il numero di operazioni del tipo D_{xp} che essa contiene come fattori, e semplicemente *grado* il numero totale di operazioni elementari di cui essa è il prodotto, o, che è lo stesso, la somma dei gradi di derivazione rispetto alle singole variabili. Così l'operazione $D^2_{yz} \, D^3_{xy} \, D_{xz} \, D^4_{zx} \, D^2_{yy} \, D^2_{xy} \, D^3_{yz}$ ha nelle x, y, z risp. i gradi di derivazione 6, 7, 4 e il grado totale 17.

Similmente potremo chiamare *grado di moltiplicazione rispetto ad* x il numero di operazioni del tipo D_{px} che essa contiene come fattori. Affinchè il grado a cui una variabile x entra in una funzione f si conservi il medesimo dopo aver eseguito su f un'operazione monomia è necessario e sufficiente che in questa siano eguali fra loro i gradi di derivazione e di moltiplicazione rispetto ad x.

5. Come fondamento e quasi perno di tutto il lavoro cominceremo dal dimostrare il seguente.

Teorema. Se Δ è un'operazione qualunque fra k serie di variabili $x, y, z, \ldots$, e si indichino con $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$ le k^2 operazioni elementari D_{xx}, D_{xy}, D_{yx}, $D_{xz}, \ldots$ scritte in un ordine a piacere, si possono sempre determinare delle costanti $\alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k^2}}$ (combinazioni lineari a coefficienti interi delle costanti di Δ) tali da avere identicamente

$$\Delta = \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots} \alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k^2}} . D_{k^2}^{\mu_{k^2}} . D_{k^2-1}^{\mu_{k^2-1}} \ldots . D_2^{\mu_2} . D_1^{\mu_1}$$

dove agli esponenti $\mu_1, \mu_2, \ldots$ non si devono dare che quei sistemi di valori per i quali la loro somma $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{k^2}$ non superi il massimo grado dei termini di Δ.

Così, ad esempio, all'operazione:

$$D^3_{xz}\ D^4_{zx}\ D_{xy}\ D_{yz}\ D^3_{zx}\ D_{yz}\ D^2_{zx}\ D_{xz}\ D_{zx}$$

prodotto di 17 operazioni elementari fra 3 serie di variabili x, y, z deve potersi sostituire una somma di operazioni del tipo

$$\alpha \,.\, D^{\mu_9}_{xx}\ D^{\mu_8}_{yy}\ D^{\mu_7}_{xy}\ D^{\mu_6}_{xz}\ D^{\mu_5}_{yx}\ D^{\mu_4}_{yz}\ D^{\mu_3}_{zx}\ D^{\mu_2}_{zy}\ D^{\mu_1}_{zz}$$

dove le α sono dei numeri interi e la variabilità degli esponenti μ è limitata dalla condizione $\Sigma\ \mu \overline{\lesseqgtr} 17$.

Evidentemente basterà dimostrare il teorema pel caso in cui Δ sia un'operazione monomia. A tale scopo ci appoggiamo sopra le quattro identità seguenti che hanno luogo per tre serie *distinte* di variabili p, q, r indipendentemente dalla loro specie comune:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & D_{rq}\ D_{pr} - D_{pr}\ D_{rq} = D_{pq} \\ \text{II.} & D_{pp}\ D_{qp} - D_{qp}\ D_{pp} = D_{qp} \\ \text{III.} & D_{pq}\ D_{pp} - D_{pp}\ D_{pq} = D_{pq} \\ \text{IV.} & D_{qp}\ D_{pq} - D_{pq}\ D_{qp} = D_{pp} - D_{qq} \end{array} \qquad (A)\ [1]$$

Il teorema sarebbe evidente se due operazioni qualunque D_{pq} e D_{rs} fossero permutabili, qualora cioè $D_{pq} . D_{rs}$ fosse sempre equivalente a $D_{rs} . D_{pq}$. Ora ciò ha luogo solamente nei tre seguenti casi:

1° Quando p, q, r, s sono quattro variabili distinte.

2° Quando le variabili p ed r sono identiche.

3° Quando sono identiche le variabili q ed s.

come è chiaro pel principio che il risultato delle differenziazioni successive rispetto a più variabili è indipendente dall'ordine con cui si eseguiscono le singole differenziazioni. Negli altri casi non si può fare la permutazione senza alterare in generale il valore del risultato come si vede dalle formole (A).

In generale i fattori $D_1, D_2, \ldots, D_{k^2}$ si presenteranno in Δ con un ordine che rispetto all'ordine prefissato presenterà un certo numero di *inversioni ;* se diciamo

---

[1] Queste formole si verificano con grande facilità esprimendo la funzione generale delle serie di variabili p, q, r su cui si opera colla notazione simbolica $a_p^{\lambda}\ b_q^{\mu}\ c_r^{\nu}$. Vedi il § II. (art. 24). Così si troverà:

$$D_{rq} . D_{pr} . f = \lambda . \nu . a_p^{\lambda-1}\ a_r\ b_q^{\mu}\ c_r^{\nu-1}\ c_q + \lambda . a_p^{\lambda-1}\ a_q\ b_q^{\mu}\ c_r^{\nu}$$

$$D_{pr} . D_{rq} . f = \lambda . \nu . a_p^{\lambda-1}\ a_r\ b_q^{\mu}\ c_r^{\nu-1}\ c_q$$

$$D_{pq} . f = \lambda . \quad a_p^{\lambda-1}\ a_q\ b_q^{\mu}\ c_r^{\nu}$$

onde:

$$D_{rq}\ D_{pr}\ f - D_{pr}\ D_{rq}\ f = D_{pq}\ f \text{ ecc.}$$

aver luogo una inversione ogniqualvolta un'operazione D_i è preceduta a destra, immediatamente o ad intervallo, da un' operazione D_j di indice più elevato. Ora si potrà sempre scrivere Δ come segue:

$$\Delta = \Delta'' . D_i . D_j . \Delta'$$

dove $D_j \Delta'$ abbraccia soltanto operazioni D che si seguono già nell' ordine voluto e D_i è la prima operazione elementare, che si incontra percorrendo il prodotto da destra verso sinistra, in cui ha luogo una inversione cosicchè $i < j$, Δ'' poi rappresenta l'insieme di tutte le operazioni che rimangono ad eseguirsi dopo D_i. Ciò posto, se D_i e D_j sono di quelle operazioni permutabili di cui si è parlato sopra, potremo anche scrivere:

$$\Delta'' . D_i . D_j . \Delta' = \Delta'' . D_j . D_i . \Delta'$$

con che si sarà diminuito di un'unità il numero delle inversioni di indici. Negli altri casi si potrà eseguire la permutazione secondo le formole (A), cioè, a seconda dei casi ancora possibili per D_i e D_j, si potrà porre:

$$\Delta'' . D_i . D_j . \Delta' = \Delta'' . D_j . D_i . \Delta' + \Delta'' . D_{pq} . \Delta'$$

ovvero

$$\Delta'' . D_i . D_j . \Delta' = \Delta'' . D_j . D_i . \Delta' + \Delta'' . D_{pp} . \Delta' - \Delta . D_{qq} . \Delta'$$

dove p e q sono due delle variabili $x, y, z, \ldots$

In ogni caso si potrà sostituire a Δ una somma di operazioni monomie, ciascuna delle quali sarà più semplice di Δ, perchè o il numero delle inversioni o il numero dei fattori sarà diminuito *almeno* di un'unità. E ciò basta perchè resti induttivamente stabilita la verità del teorema, poichè il numero delle inversioni e il numero dei fattori di Δ sono entrambi *finiti* e per conseguenza potranno con un numero *finito* di tali riduzioni diminuirsi opportunamente finchè o l'uno o l'altro riesca nullo in ciascuno dei termini di cui si compone il risultato. Nel primo caso si avranno termini in cui le operazioni si succedono nell'ordine prefissato, nel secondo si avrebbe un semplice coefficiente numerico intero. Del resto questo secondo caso non si presenterà poichè dalle formole di permutazione scritte sopra si vede che il numero dei fattori non verrà mai abbassato al disotto dell'unità.

In tal modo l'operazione Δ prenderà appunto la forma indicata dal teorema, poichè i coefficienti dei singoli termini riusciranno evidentemente numeri interi ([1]).

6. Se si conoscono i gradi $n_1, n_2, \ldots, n_k$ che la funzione f, su cui si opera, ha risp. nelle $x, y, z, \ldots$, l'ultima formola di permutazione di cui ci siamo serviti potrà semplificarsi ponendo in luogo di D_{pp} e D_{qq} risp. il grado della funzione $\Delta' f$ nelle variabili p e q; e precisamente se d_p, d_q, m_p, m_q sono i gradi di derivazione e di moltiplicazione (art. 4) dell'operazione Δ' rispetto alle p e q si avrà;

$$\begin{aligned}\Delta'' D_i D_j \Delta' f &= \Delta'' D_j D_i \Delta' . f + \{(\alpha + m_p - d_p) - (\beta + m_q - d_q)\} \Delta'' \Delta' . f \\ &= \Delta'' D_j D_i \Delta' . f + \{\alpha - \beta + h\} . \Delta'' \Delta' . f\end{aligned}$$

([1]) Fra operazioni monomie $D_{k}^{\mu_{k}^{2}} \ldots D_2^{\mu_2} . D_1^{\mu_1}$ formate con serie *distinte* di esponenti non possono più aver luogo relazioni lineari che siano soddisfatte *identicamente* cioè qualunque sia la funzione su cui si opera e la specie delle k serie di variabili. Ciò risulta facilmente da quanto si dimostrerà nel seguito di questo stesso §.

dove α e β indicano risp. il grado di f nella p e nella q ed h è un numero intero *che dipende solo dalla forma di* Δ.

Pertanto il teorema dell'art. prec. si può anche tradurre in quello che segue:

Se Δ è un'operazione qualunque fra k serie di variabili $x, y, z, \ldots$, e si indichino con $D_1, D_2, \ldots, D_{k(k-1)}$ le $k(k-1)$ operazioni elementari proprie $D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, \ldots$ scritte in un ordine a piacere, si possono sempre determinare delle costanti $\alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k(k-1)}}$ tali da avere identicamente

$$\Delta . f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \\ x, & y, & \ldots \end{pmatrix} = \sum_{\mu_1, \mu_2, \ldots} \alpha_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k(k-1)}} . D_{k(k-1)}^{\mu_{k(k-1)}} \ldots D_2^{\mu_2} D_1^{\mu_1} f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & \\ x, & y, & \ldots \end{pmatrix}$$

dove la variabilità degli esponenti $\mu_1, \mu_2, \ldots$ resta limitata come nel teorema precedente. Le $\alpha_{\mu_1, \mu_2}, \ldots$ sono funzioni lineari delle costanti di Δ, aventi per coefficienti delle funzioni razionali intere, a coefficienti numerici interi, dei numeri $n_1, n_2, \ldots n_k$.

7. Dal teorema dell'art. 5 discendono come corollari due teoremi che ci saranno in seguito molti utili.

1° Se le serie di variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ non sono contenute in f che è soltanto funzione di altre serie di variabili $x, y, z, \ldots$, ogni funzione deducibile da f con un aggregato delle operazioni elementari $D_{xy}, D_{x\xi}, D_{\xi x}, \ldots$ formate comunque colle variabili dei due gruppi si può anche dedurre con quelle sole operazioni elementari che hanno per primo indice le variabili $x, y, z, \ldots$.

Infatti le operazioni D_{pq} formabili colle variabili dei due gruppi si possono dividere in due classi riunendo in una prima classe quelle in cui p è una delle variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ ed in una seconda quelle in cui p è una delle $x, y, z, \ldots$; e pel teorema dimostrato all'art. 5, si potrà trasformare ogni operazione Δ fra le variabili dei due gruppi in una somma di termini della forma $\Delta'' . \Delta'$ dove Δ' e Δ'' sono prodotti di fattori risp. della prima e della seconda classe. Ma la f è annullata dalle operazioni della prima classe, poichè per ipotesi essa non contiene le variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; quindi $\Delta'' . \Delta' f$ sarà identicamente nullo semprechè qualcuno degli esponenti delle operazioni elementari contenute in Δ sia diverso da zero. Così $\Delta . f$ sarà ridotto ad una somma di soli termini del tipo $\Delta'' . f$, *c . d . d .* In particolare si ha inoltre che:

2° Se con operazioni fra le variabili dei due gruppi $x, y, z, \ldots$ e $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ si deduca da $f(x, y, z, \ldots)$ una funzione $f'(x, y, z, \ldots)$ che al pari di f contenga solamente le variabili $x, y, z, \ldots$, essa può anche ottenersi direttamente con sole operazioni fra le $x, y, z, \ldots$

Infatti i soli fattori di Δ'' che contengono le variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, le contengono come secondo indice, epperò, se il loro esponente non è nullo, essi aggiungono ad f' dei termini in cui almeno una delle $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ entrerà ad un grado maggiore di zero; tali termini dovranno dunque distruggersi con altri ad essi omogenei giacchè f' contiene le $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ al grado zero.

Tutte le cose dette finquì si applicano indifferentemente a variabili di qualsivoglia specie.

8. *Siano:*

$$\begin{array}{l} x \equiv x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{\sigma+1} \\ y \equiv y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{\sigma+1} \\ z \equiv z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_{\sigma+1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ v \equiv v_1,\ v_1,\ \ldots,\ v_{\sigma+1} \end{array}$$

$\sigma+1$ variabili indipendenti di specie σ; ogni funzione di queste ed altre variabili della stessa specie che sia omogenea e di grado m_i nell'indice i, (v. art. 1), per $i=1, 2, \ldots, \sigma+1$, può derivarsi per mezzo di operazioni dall'unico termine

$$x_1^{m_1}\ y_2^{m_2}\ z_3^{m_3}\ \ldots\ v_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}}\ .$$

Basterà dimostrar ciò per il termine generale della funzione che è della forma $A_1 . A_2 \ldots A_{\sigma+1}$ dove

$$A_1 = x_1^{\alpha_1} y_1^{\beta_1} \ldots v_1^{\lambda_1} \xi_1^{\mu_1} \eta_1^{\nu_1} \ldots \omega_1^{\rho_1} \qquad \alpha_1+\beta_1+\ldots+\rho_1 = m_1$$

$$A_2 = x_2^{\alpha_2} y_2^{\beta_2} \ldots v_2^{\lambda_2} \xi_2^{\mu_2} \eta_2^{\nu_2} \ldots \omega_2^{\beta_2} \qquad \text{ed} \qquad \alpha_2+\beta_2+\ldots+\rho_2 = m_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$

$$A_{\sigma+1} = x_{\sigma+1}^{\alpha_{\sigma+1}} y_{\sigma+1}^{\beta_{\sigma+1}} \ldots v_{\sigma+1}^{\lambda_{\sigma+1}} \xi_{\sigma+1}^{\mu_{\sigma+1}} \eta_{\sigma+1}^{\nu_{\sigma+1}} \ldots \omega_{\sigma+1}^{\rho_{\sigma+1}} \qquad \alpha_{\sigma+1}+\beta_{\sigma+1}+\ldots+\rho_{\sigma+1} = m_{\sigma+1}$$

In corrispondenza alle variabili $x, y, \ldots, v$ introduciamo altrettante variabili *ausiliarie* indipendenti da queste che designeremo con $x', y', \ldots, v'$. Se poniamo:

$$D_{x'x}^{\alpha_1}\ D_{x'y}^{\beta_1}\ \ldots\ D_{x'v}^{\lambda_1}\ D_{x'\xi}^{\mu_1}\ D_{x'\eta}^{\nu_1}\ \ldots\ D_{x'\omega}^{\rho_1} = \Delta_1$$

$$D_{y'x}^{\alpha_2}\ D_{y'y}^{\beta_2}\ \ldots\ D_{y'v}^{\lambda_2}\ D_{y'\xi}^{\mu_3}\ D_{y'\eta}^{\nu_2}\ \ldots\ D_{y'\omega}^{\rho_2} = \Delta_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_{v'x}^{\alpha_{\sigma+1}} D_{v'y}^{\beta_{\sigma+1}} \ldots D_{v'v}^{\lambda_{\sigma+1}} D_{v'\xi}^{\mu_{\sigma+1}} D_{v'\eta}^{\nu_{\sigma+1}} \ldots D_{v'\omega}^{\rho_{\sigma+1}} = \Delta_{\sigma+1}$$

si ha evidentemente:

$$A_1 = \frac{1}{\lfloor m_1} . \Delta_1 . x_1'^{\,m_1}, \quad A_2 = \frac{1}{\lfloor m_2} \cdot \Delta_2 . y_2'^{\,m_2}, \ldots$$

ed

$$A_1 A_2 \ldots A_{\sigma+1} = \frac{1}{\lfloor m_1 \lfloor m_2 \lfloor m_{\sigma+1}} . \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{\sigma+1} \left\{ x_1'^{\,m_1} y_2'^{\,m_2} \ldots v_{\sigma+1}'^{\,m_{\sigma+1}} \right\}.$$

Ma d'altronde si ha pure evidentemente:

$$x_1'^{\,m_1} y_2'^{\,m_2} \ldots v_{\sigma+1}'^{\,m_{\sigma+1}} = \frac{1}{\lfloor m_1 \lfloor m_2 \lfloor m_{\sigma+1}} . D_{xx'}^{m_1} D_{yy'}^{m_2} \ldots D_{vv'}^{m_{\sigma+1}} . \left\{ x_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots v_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}} \right\}$$

onde, sostituendo nella formola scritta sopra,

$$\begin{aligned} A_1 A_2 \ldots A_{\sigma+1} &= \frac{1}{(\lfloor m_1)^2 \ldots (\lfloor m_{\sigma+1})^2} . \Delta_1 \ldots \Delta_{\sigma+1} . D_{xx'}^{m_1} \ldots D_{vv'}^{m_{\sigma+1}} . \left\{ x_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots v_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}} \right\} \\ &= \frac{1}{(\lfloor m_1)^2 \ldots (\lfloor m_{\sigma+1})^2} . \Delta . \left\{ x_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots v_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}} \right\} \end{aligned}$$

dove Δ è una certa operazione fra le variabili $x, y, \ldots, \omega$ e le loro ausiliarie $x', y', \ldots, v'$. Siccome però questa operazione cambia la funzione $x_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots v_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}}$ che non contiene le variabili ausiliarie nella funzione $A_1 A_2 \ldots A_{\sigma+1}$ che del pari non le contiene, si potrà pel secondo teorema dell'art. prec. trasformarla in modo da eliminare tutte quelle operazioni elementari che dipendono dalle variabili ausiliarie, restando sole operazioni fra le $x, y, \ldots, \omega$. E di quest'ultime si potranno ancora eliminare quelle che avessero per primo indice, le variabili $\xi, \eta, \ldots, \omega$, in virtù del 1° teorema dell'art. prec. poichè $x_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots v_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}}$ è indipendente dalle $\xi, \eta, \ldots, \omega$.

La reciproca della proposizione ora dimostrata sarebbe: ogni funzione deducibile con operazioni da $x_1^{m_1} y_2^{m_2} \ldots v_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}}$ è omogenea in ciascuno degli indici $1, 2, \ldots \sigma+1$ ed è in essi risp. dei gradi $m_1, m_2, \ldots, m_{\sigma+1}$, ma è senz'altro evidente se si considera che un'operazione D_{pq} diminuisce di un'unità il grado di p_i ed aumenta di un'unità il grado di q_i, quindi non altera il grado complessivo dell'indice i.

9. Il metodo generale ora indicato consiste in sostanza nell'eliminare per mezzo delle formole fondamentali (A) dell'art. 5, le variabili ausiliarie che si introducono per esprimere immediatamente la funzione data sotto forma di una derivata di quell'unico termine; quindi può nei casi particolari essere suscettibile di semplificazione per ciò che riguarda l'introduzione e la conseguente eliminazione di tali variabili. Vediamolo in un esempio che può anche servire a chiarire il procedimento generale.

Proponiamoci di trovare un'operazione Δ fra le tre variabili ternarie $x \equiv x_1, x_2, x_3$, $y \equiv y_1, y_1, y_3$, $z \equiv z_1, z_1, z_3$ tale che sia identicamente

$$x^2_1\ x_2\ y_2\ y_3\ z_1\ z_3 = \Delta \{ x^3_1\ y^2_2\ z^2_3 \}.$$

qui basterà introdurre una sola serie ausiliaria $u \equiv u_1, u_2, u_3$ e porre

$$x^2_1\ x_2\ y_2\ y_3\ z_1\ z_3 = \frac{1}{12} . D_{uz}\ D_{zy}\ D_{yx}\ D_{xu} \{ x^3_1\ y^2_2\ z^2_3 \} .$$

Applicando più volte la formola (I) si trova subito:

$$\begin{aligned} & D_{uz}\ D_{zy}\ D_{yx}\ D_{xu} \\ = & D_{uz}\ D_{zy}\ D_{xu}\ D_{yx} - D_{uz}\ D_{zy}\ D_{yu} \\ = & D_{uz}\ D_{xu}\ D_{zy}\ D_{yx} - D_{uz}\ D_{zy}\ D_{yu} \\ = & D_{xu}\ D_{uz}\ D_{zy}\ D_{yx} + D_{xz}\ D_{zy}\ D_{yx} - D_{uz}\ D_{yu}\ D_{zy} + D_{uz}\ D_{zu} \end{aligned}$$

ed applicando ancora la (I) al primo termine e la (IV) al quarto:

$$\begin{aligned} = & D_{xu}\ D_{uz}\ D_{zy}\ D_{yx} - D_{yu}\ D_{uz}\ D_{zy} - D_{yz}\ D_{zy} \\ & + D_{xz}\ D_{zy}\ D_{yx} + D_{zz} - D_{uu} \end{aligned}$$

I primi due termini applicati ad $x_1^3\ y_2^2\ z_3^2$ danno zero poichè si eseguisce D_{uz} sopra una funzione che non contiene u. Lo stesso dicasi per D_{uu}, quindi:

$$x_1^2\ x_2\ y_2\ y_3\ z_1\ z_3 = \frac{1}{12} \{ D_{xz}\ D_{zy}\ D_{yx} - D_{yz}\ D_{zy} + 2 \} . \{ x_1^3\ y_2^2\ z_3^2 \}$$

come facilmente si può verificare sviluppando le operazioni indicate. Secondo il metodo generale avremmo dovuto introdurre tre serie ausiliarie x', y', z' ponendo:

$$x_1^2\, x_2\, y_2\, y_3\, z_1\, z_3 = \left(\frac{1}{24}\right)^2 . D_{x'z} D^2_{x'x} D_{y'y} D_{y'x} D_{z'z} D_{z'y} D^3_{xx'} D^2_{yy'} D^2_{zz'} . \left\{ x_1^3\, y_2^2\, z_3^2 \right\}$$

ad eliminare quindi le x', y', z' per mezzo delle formole (A).

10. Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\tau$ sono $\rho + \tau$ numeri interi e positivi che soddisfano alla condizione

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\rho = \beta_1 + \beta_2 + \ldots + \beta_\tau$$

noi indicheremo d'ora innanzi con $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho; \beta_1, \beta_2, \ldots \beta_\tau]$ il numero dei sistemi distinti di valori dei $\rho . \tau$ numeri interi e positivi (anche nulli) $a_{i,j}$, $(i = 1, 2, .., \rho; j = 1, 2, .., \tau)$ che soddisfano alle condizioni seguenti

$$\begin{array}{ll} a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{1\tau} = \alpha_1 & a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{\rho 1} = \beta_1 \\ a_{21} + a_{22} + \ldots + a_{2\tau} = \alpha_2 & a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{\rho 2} = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ a_{\rho 1} + a_{\rho 2} + \ldots + a_{\rho\tau} = \alpha_\rho & a_{1\tau} + a_{2\tau} + \ldots + a_{\rho\tau} = \beta_\tau \end{array}$$

Così ps. $[2, 4; 3, 3] = 3$ poichè i soli tre sistemi:

$$\begin{array}{lll} a_{11} = 0,\ a_{12} = 2, & a_{11} = 1,\ a_{12} = 1, & a_{11} = 2,\ a_{12} = 0 \\ a_{21} = 3,\ a_{22} = 1, & a_{21} = 2,\ a_{22} = 2, & a_{21} = 1,\ a_{22} = 3 \end{array}$$

soddisfano alle condizioni:

$$\begin{array}{ll} a_{11} + a_{12} = 2, & a_{11} + a_{21} = 3 \\ a_{21} + a_{22} = 4, & a_{12} + a_{22} = 3. \end{array}$$

Se in $[\alpha, \alpha, \ldots, \alpha', \alpha', \ldots; \beta, \beta, \ldots, \beta', \beta', \ldots]$ gli elementi $\alpha, \alpha', ..; \beta, \beta' \ldots$ sono ripetuti risp. $\mu, \mu', \ldots; \nu, \nu', \ldots$ volte potremo adottare la notazione più semplice

$$[\alpha, \alpha, .., \alpha', \alpha', \ldots; \beta, \beta, .., \beta', \beta', \ldots] = [\overset{\mu}{\alpha}, \overset{\mu'}{\alpha'}, \ldots; \overset{\nu}{\beta}, \overset{\nu'}{\beta'}, \ldots]$$

Così p. es. $$[2, 2, 2; 2\ 2\ 2] = \left[\overset{3}{2}; \overset{3}{2}\right] = 21.$$

11. Dalla definizione della nostra funzione numerica apparisce chiaramente che

$$[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\tau] = [\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\tau; \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_\rho]$$

Di più se $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\rho$ sono gli stessi elementi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho$ scritti in un ordine qualunque e similmente $\beta'_1, \beta'_2, \ldots \beta'_\tau$ è una permutazione qualunque degli elementi $\beta_1, \beta'_2, \ldots, \beta_\tau$ si ha pure evidentemente:

$$[\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\rho; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta_\tau] = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\rho; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\tau]$$

Finalmente notiamo che se taluno degli elementi α, β è uguale a zero esso può trascurarsi. Così:

$$[o, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\rho; \beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_\tau] = [\alpha'_2, \ldots, \alpha'_\rho; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta'_\tau]$$

12. Se degli $[\alpha^m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots; \beta_1, \beta_2, \ldots]$ sistemi di a_i, che soddisfano alle condizioni:

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} a_{11} + a_{12} + \ldots = \alpha \\ a_{21} + a_{22} + \ldots = \alpha \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} + a_{m2} + \ldots = \alpha \\ \hline a_{m+1,1} + a_{m+1,2} + \ldots = \alpha_1 \\ a_{m+2,1} + a_{m+2,2} + \ldots = \alpha_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array} \right. \qquad (b) \left\{ \begin{array}{l} a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{m1} + a_{m+1,1} + a_{m+2,2} + \ldots = \beta_1 \\ a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{m2} + a_{m+1,2} + a_{m+2,2} + \ldots = \beta_2 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots \end{array} \right.$$

conveniamo di considerare come uguali due sistemi che si ottengono da uno stesso schema (a) col permutare fra loro comunque le prime m linee orizzontali, come ad esempio i due sistemi seguenti, che differiscono per lo scambio delle prime due linee,

$$\begin{array}{ll} a_{11}, & a_{12}, \dots \\ a_{21}, & a_{22}, \dots \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, \dots \\ \hline a_{m+1,1}, & a_{m+1,2}, \dots \\ a_{m+2,1}, & a_{m+2,2}, \dots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array} \qquad \begin{array}{ll} a_{21}, & a_{22}, \dots \\ a_{11}, & a_{12}, \dots \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1}, & a_{m2}, \dots \\ \hline a_{m+1,1}, & a_{m+1,2}, \dots \\ a_{m+2,1}, & a_{m+2,2}, \dots \\ \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

in tal caso il numero dei sistemi distinti di soluzioni non sarà più $[\alpha^m, \alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots]$ ma un numero in generale *più piccolo* che indicheremo con $[(\alpha^m), \alpha_1, \alpha_2, \dots; \beta_1, \beta_2, \dots]$. Lo stesso può farsi per altri gruppi di linee orizzontali dello schema (a) corrispondenti ad uno stesso elemento α; ripetuto più volte; come pure per uno o più gruppi di linee verticali (orizzontali dello schema (b)) corrispondenti a valori ripetuti di uno stesso numero β_i. Dopo ciò crediamo sufficientemente dichiarato ciò che debba intendersi in generale col simbolo di funzione numerica:

$$[\overset{h}{(\alpha)}, \overset{h'}{(\alpha')}, \dots \alpha_1, \alpha_2, \dots; \overset{k}{(\beta)}, \overset{k'}{(\beta')}, \dots, \beta_1, \beta_2, \dots] \ (^1).$$

13. Sia $f\begin{pmatrix} \mu_1 & \mu_2 & \mu_{\sigma+1} & \mu_{\sigma+2} & \mu_\rho \\ x, & y, \dots, & v, & \xi & , \dots, \omega \end{pmatrix}$ la funzione più generale di gradi dati nelle ρ variabili $x, y, \dots, \omega$. Se σ è la specie di queste variabili e poniamo la condizione che f sia omogenea in ciascuno degli indici $1, 2, \dots, \sigma+1$ ed in essi risp. del grado $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\sigma+1}$, il numero dei termini distinti di cui essa potrà comporsi sarà dato da $[\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\rho; \nu_1, \nu_2, \dots, \nu_{\sigma+1}]$ poichè le condizioni da imporsi ai $\rho . (\sigma+1)$ esponenti delle variabili semplici $x_1, x_2, \dots, x_{\sigma+1}, y_1, y_2, \dots$. coincidono con quelle a cui debbono soddisfare i $[\mu_1, \dots, \mu_\rho; \nu_1, \dots \nu_{\sigma+1}]$ sistemi di soluzioni dell'art. 10. Questi termini, fra cui evidentemente non può aver luogo alcuna relazione lineare, sono d'altronde, per l'art. 8, tutti derivabili con operazioni da

$$x_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \dots v_{\sigma+1}^{\nu_{\sigma+1}}.$$

Pertanto: il numero delle forme linearmente indipendenti (²) deri-

(¹) Il numero di partizione $(w; j, i)$ che esprime in quanti modi diversi un dato intero w si può decomporre nella somma di i numeri tolti dalla serie $1, 2, \dots, j$ (potendo uno stesso numero prendersi anche più volte), che ha tanta importanza nel calcolo del numero dei covarianti di una forma binaria, è un caso particolare di quello da noi definito; si ha:

$$(w : i, j) = \left[w, w_1 ; \binom{i}{j} \right] = \left[w_1, w; \binom{i}{j} \right]$$

dove $w_1 = i . j - w$. La nostra notazione mette in evidenza che $(w : i, j) = (ij - w : i, j)$.

(²) D'ora innanzi diremo spesso per brevità forme o funzioni *linearmente indipendenti* in luogo di dire forme o funzioni fra cui non può aver luogo alcuna relazione lineare.

vabili da $x_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots v_{\sigma+1}^{\nu_{\sigma+1}}$ per mezzo di operazioni fra le ρ variabili $x, y, \ldots, v, \xi, \ldots \omega$, e che in queste variabili sono risp. dei gradi $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_\varsigma$ è dato da $[\mu_1, \ldots, \mu_3; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$.

14. Negli articoli che seguono ci proponiamo di risolvere i due problemi che qui enunciamo:

A. Essendo $x, y, \ldots, v, \xi, \eta, \ldots, \omega$ variabili di specie σ determinare il numero N delle forme linearmente indipendenti $\varphi\begin{pmatrix}\mu_1 & & \mu_\rho \\ x, & \ldots, & \omega\end{pmatrix}$ di gradi dati in queste variabili (¹) e derivabili per mezzo di operazioni dalla funzione generale $f\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & & \nu_{\sigma+1} \\ x, & y, & \ldots, & v\end{pmatrix}$.

Noi dimostreremo che il *numero cercato è ancora* $[\mu_1 \ldots, \mu_\rho; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$. Per ora possiamo subito asserire che certamente $N \geqq [\mu_1, \ldots, \mu_\rho; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$, giacchè dal termine $x_1^{\nu_1} y_2^{\nu_2} \ldots v_{\sigma+1}^{\nu_{\sigma+1}}$ che è un caso particolare della funzione $f\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & & \nu_{\sigma+1} \\ x, & y, & \ldots, & v\end{pmatrix}$ si possono già dedurre, per l'art. prec., $[\mu_1, \ldots, \mu_3; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$ forme linearmente indipendenti del tipo $\varphi\begin{pmatrix}\mu_1 & & \mu_\rho \\ x, & \ldots, & \omega\end{pmatrix}$.

B. Costruire N operazioni $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_N$ fra le variabili $x, y, \ldots, \omega$ tali che

$$\{ \alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \ldots + \alpha_N \Delta_N \} . f$$

dove le α sono costanti arbitrarie sia il tipo più generale delle forme $\varphi\begin{pmatrix}\mu_1 & & \mu_\rho \\ x, & \ldots, & \omega\end{pmatrix}$ derivabili da f.

15. L'operazione più generale che trasforma $f\begin{pmatrix}\nu_1 & & \nu_{\sigma+1} \\ x, & \ldots, & v\end{pmatrix}$ in una forma del tipo $\varphi\begin{pmatrix}\mu_1 & & \mu_{\sigma+1} & \mu_{\sigma+2} & & \mu_\rho \\ x, & \ldots, & v, & \xi, & \ldots, & \omega\end{pmatrix}$ si può comporre comunque colle operazioni elementari:

$$(1) \quad \begin{matrix} D_{xx}, & D_{xy}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & D_{x\omega} \\ D_{yx}, & D_{yy}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & D_{y\omega} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ D_{vx}, & D_{vy}, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & D_{v\omega} \end{matrix}$$

che hanno per primo indice le $\sigma + 1$ variabili $x, y, \ldots, v$ (v. art. 7 teor. 1°), purchè in ogni termine dell'operazione il grado di moltiplicazione (art. 4) di una stessa variabile accresciuto del suo grado in f e diminuito del suo grado di derivazione sia uguale al grado che la variabile deve avere nel risultato φ. Però per il teorema fondamentale dell'art. 5, si potrà subito limitare maggiormente il numero dei termini da considerarsi stabilendo a piacere un certo ordine secondo il quale debbano eseguirsi successivamente le operazioni (1) elevate a certi esponenti; ps. eseguendo prima tutte le operazioni improprie $D_{xx}, D_{yy}, \ldots, D_{vv}$ poi le operazioni proprie

$$D_{xy}, D_{xz}, \ldots, D_{x\omega}$$

(¹) Alcuni dei gradi $\mu_1, \ldots, \mu_\rho$ potranno anche esser nulli, cosicchè il numero di variabili di cui φ è funzione potrà anche essere $< \sigma + 1$.

che hanno per primo indice la x e sono fra loro permutabili, quindi le operazioni proprie, del pari fra loro permutabili, che hanno per primo indice la y e così via. Così non rimarrebbe altra arbitrarietà che nella scelta degli esponenti, fra i quali debbono tuttavia aver luogo le relazioni ora menzionate. In questo modo il numero dei termini non sarebbe più *illimitato* poichè una stessa operazione D_{pq} potrà *al più* eseguirsi tante volte di seguito quanto è il grado di p nella funzione su cui essa si eseguisce, altrimenti il risultato sarebbe identicamente nullo; si avrebbe tuttavia un numero di termini ancor più grande del necessario. Ed invero vogliam dimostrare che ad un termine qualunque dell' operazione da eseguirsi su f può sostituirsi una combinazione lineare di termini nei quali il grado di derivazione rispetto ad ogni singola variabile non supera il grado che quella variabile ha in f; cosicchè *ps.* il numero totale delle operazioni D_{xy}, $D_{xz}, \ldots, D_{x\omega}$ eseguite in uno stesso termine sia sempre $\geqq \nu_1$ ecc.

Siano infatti, in un termine qualunque dell'operazione, $k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma+1}$ risp. i gradi di derivazione rispetto alle variabili $x, y, \ldots, v$, e sia k_λ il primo di questi numeri per cui $k_\lambda > \nu_\lambda$. Se θ è quella delle variabili $x, y, \ldots, v$ cui corrisponde il grado di derivazione k_λ, si permutino le operazioni elementari colle solite formole (A) finchè il termine che consideriamo sia espresso come una somma di termini del tipo

$$\Delta . D_{\theta x}^{\alpha_1} D_{\theta y}^{\alpha_2} \ldots D_{\theta\omega}^{\alpha_\rho}$$

dove Δ non contiene più le operazioni elementari

$$D_{\theta x}, D_{\theta y}, \ldots, D_{\theta\omega}$$

e contiene le altre in un ordine da fissarsi a piacere. Scancellando quei termini in cui fosse

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\rho > \nu_\lambda$$

poichè essi darebbero identicamente

$$\Delta . D_{\theta x}^{\alpha_1} D_{\theta y}^{\alpha_2} \ldots D_{\theta\omega}^{\alpha_\rho} . f \begin{pmatrix} \nu_1 & & \nu_\rho & & \nu_{\sigma+1} \\ x, & \ldots, & \theta & , \ldots, & v \end{pmatrix} = 0$$

uno qualunque dei termini residui presenterà in luogo dei primitivi gradi di derivazione $k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma+1}$ una nuova serie di gradi $k'_1, k'_2, \ldots,$ tali che

$$k'_1 \leqq \nu_1, k'_2 \leqq \nu_2, \ldots, k'_\lambda \leqq \nu_\lambda.$$

Ciò è chiaro per il grado k'_λ, che compete alla variabile θ, ma è vero altresì per i gradi $k'_1, \ldots, k'_{\lambda-1}$ poichè le formole di permutazione (A), applicate al termine considerato, non fanno che diminuire od *al più* lasciare inalterato il grado di derivazione rispetto ad ogni singola variabile, come manifestamente risulta dalla natura stessa di quelle formole. Pertanto si avrà

$$k'_1 \leqq k_1, k'_2 \leqq k_2, \ldots, k'_{\sigma+1} \leqq k'_{\sigma+1},$$

ma era per supposto

$$k_1 \leqq \nu_1, k_2 \leqq \nu_2, \ldots, k_{\lambda-1} \leqq \nu_{\lambda-1}$$

quindi *a fortiori*

$$k'_1 \leqq \nu_1, k'_2 \leqq \nu_2, \ldots, k'_{\lambda-1} \leqq \nu_{\lambda-1}$$

Così procedendo si faranno sparire con un numero finito di trasformazioni tutti quei termini in cui non si avesse per tutti i valori di α:

$$k_\alpha \leqq \nu_\alpha.$$

Se Δ è un termine i cui gradi di derivazione rispetto alle $x, y, \ldots, v$ siano risp. $k_1, k_2, \ldots, k_{\sigma+1}$ e poniamo

$$\Delta . D_{xx}^{\nu_1-k_1} D_{yy}^{\nu_2-k_2} \ldots . D_{vv}^{\nu_{\sigma+1}-k_{\sigma+1}} = \Delta_1$$

avremo evidentemente

$$\Delta . f \binom{\nu_1 \qquad \nu_{\sigma+1}}{x, \ldots, v} = \frac{1}{\nu_1^{\nu_1-k_1} \nu_2^{\nu_2-k_2} \ldots \nu_{\sigma+1}^{\nu_{\sigma+1}-k_{\sigma+1}}} \Delta_1 . f \binom{\nu_1 \qquad \nu_{\sigma+1}}{x, \ldots, v}$$

dove ora i gradi di derivazione di Δ, rispetto alle $x, y, \ldots v$ sono precisamente $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\sigma+1}$. Così con semplici cambiamenti dei coefficienti costanti potremo ritenere che tutti i termini abbiano i medesimi gradi di derivazione $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_{\sigma+1}$

Se indichiamo pertanto con

$$(2) \qquad \begin{array}{l} \alpha_{11}, \quad \alpha_{12}, \quad \ldots \alpha_{1\rho} \\ \alpha_{21}, \quad \alpha_{22}, \quad \ldots \alpha_{2\rho} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\sigma+1,1}, \alpha_{\sigma+1,2}, \ldots \alpha_{\sigma+1,\rho} \end{array}$$

gli esponenti che in ogni termine possono avere le corrispondenti operazioni elementari del quadro (1), essi soddisferanno alle condizioni

$$(3) \qquad \begin{array}{l} \alpha_{11} + \alpha_{12} + \ldots + \alpha_{1\rho} = \nu_1 \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{2\rho} = \nu_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{\sigma+1,1} + \alpha_{\sigma+1,2} + \ldots + \alpha_{\sigma+1,\rho} = \nu_{\sigma+1} \end{array}$$

Di più essendo i gradi di derivazione uguali ai gradi delle variabili in f, dovranno i gradi di moltiplicazione essere uguali risp. ai gradi $\mu_1, \ldots, \mu_\rho$ che le variabili debbono avere nel risultato; quindi le condizioni

$$(4) \qquad \begin{array}{l} \alpha_{11} + \alpha_{21} + \ldots + \alpha_{\sigma+1,1} = \mu_1 \\ \alpha_{12} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{\sigma+1,2} = \mu_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1\rho} + \alpha_{2\rho} + \ldots + \alpha_{\sigma+1,\rho} = \mu_\rho \end{array}$$

Il numero dei sistemi distinti di valori da darsi agli esponenti (2) è dunque dato, per l'art. 10, da $[\mu_1, \ldots, \mu_\rho; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$ e quindi il numero delle forme linearmente indipendenti derivabili da f non può superare questo numero cioè:

$$N \leqq [\mu_1, \ldots, \mu_\rho ; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$$

Ma all'art. prec. si era già osservato che

$$N \geqq [\mu_1, \ldots, \mu_\rho ; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$$

onde concludiamo

$$N = [\mu_1, \ldots, \mu_\rho ; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$$

c.d.d.

Contemporaneamente abbiamo così risoluto anche il problema B, cioè: le $N = [\mu_1, \ldots, \mu_\rho; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$ operazioni che soddisfano al problema B sono le N operazioni monomie del tipo

$$D_{xx}^{\alpha_{11}} D_{xy}^{\alpha_{12}} \ldots D_{x\omega}^{\alpha_{1\rho}} . D_{yx}^{\alpha_{21}} D_{yy}^{\alpha_{22}} \ldots D_{y\omega}^{\alpha_{2\rho}} \ldots . D_{vx}^{\alpha_{\sigma+1,1}} D_{vy}^{\alpha_{\sigma+1,2}} \ldots D_{v\omega}^{\alpha_{\sigma+1,\rho}}$$

che si possono ottenere col dare agli esponenti α_{ij} gli N sistemi di valori che soddisfano alle condizioni (3) e (4).

16. Le operazioni improprie D_{xx}, D_{yy}, . . , D_{vv} sono state introdotte nel risultato dell'art. prec. per ragione di simmetria; esse non vi hanno una parte essenziale potendo essere sostituite in ogni termine da numeri determinati che possono compenetrarsi negli N coefficienti arbitrari. Pertanto nelle N operazioni sopra costruite possiamo sostituire al posto di ogni fattore D_{xx}, D_{yy}, . . . , D_{vv} l'unità. Allora esse prendono la forma

$$D_{xy}^{\alpha_{12}}\, D_{xz}^{\alpha_{13}} \ldots D_{x\omega}^{\alpha_{1\rho}} \,.\, D_{yx}^{\alpha_{21}}\, D_{yz}^{\alpha_{23}} \ldots D_{y\omega}^{\alpha_{2\rho}} \ldots\ldots D_{vx}^{\alpha_{\sigma+1,1}}\, D_{vy}^{\alpha_{\sigma+1,2}} \ldots D_{v\omega}^{\alpha_{\sigma+1,\rho}}$$

dove gli esponenti soddisfano alle condizioni:

$$\alpha_{i1} + \ldots + \alpha_{i,i-1} + \alpha_{i,i+1} + \ldots + \alpha_{i\rho} = \nu_i - \alpha_i \,, \quad i = 1, 2, \ldots, \sigma + 1$$

ed alle condizioni:

$$\alpha_{1j} + \ldots + \alpha_{j-1,j} + \alpha_{j+1,j} + \ldots + \alpha_{\sigma+1,j} = \mu_j - \alpha_j \,, \quad \text{per} \quad j = 1, 2, \ldots, \sigma + 1$$

$$\alpha_{1j} + \alpha_{2j} + \ldots + \alpha_{\sigma+1,j} = \mu_j \,, \qquad \text{per} \quad j = \sigma + 1, \sigma + 2, \ldots, \rho$$

con le $\sigma + 1$ indeterminate positive $\alpha_1, \ldots, \alpha_{\sigma+1}$. Il numero dei sistemi distinti di soluzioni è sempre $[\mu_1, \ldots, \mu_\rho; \nu_1, \ldots, \nu_{\sigma+1}]$. Quando alle operazioni D_{xx}, D_{yy}, . . . si sostituiscono ogni volta che si presentano i fattori numerici ad esse equivalenti la riduzione di una forma qualunque Δf al tipo

$$\left\{ \alpha_1 \Delta_1 + \alpha_2 \Delta_2 + \ldots \alpha_N \Delta_N \right\} . f$$

si potrà eseguire coll'impiego ripetuto delle formole I e IV (art. 5), cioè

$$D_{rp} \,.\, D_{pr} = D_{pr} \,.\, D_{rq} + D_{pq}$$

$$D_{qp} \,.\, D_{pq} \,.\, \varphi \begin{pmatrix} m & n \\ p \,, & q \end{pmatrix} = D_{pq} \,.\, D_{qp} \,.\, \varphi \begin{pmatrix} m & n \\ p \,, & q \end{pmatrix} + (m - n) \,.\, \varphi \begin{pmatrix} w & n \\ p \,, & q \end{pmatrix} \qquad \text{(cfr. art. 6).}$$

17. Siano:

$$\Delta_1 \,,\ \Delta_2 \ldots\ldots, \Delta_N$$

le N operazioni monomie che risolvono il problema B costruite nel modo indicato negli art. prec. In esse poteva assumersi come ordine di moltiplicazione delle operazioni elementari quello che più piacesse purchè fosse *il medesimo* per tutte. Ora tale restrizione non è necessaria, come ora dimostreremo, e si ha il teorema seguente da cui caveremo più tardi importanti conseguenze:

Se in ciascuna delle N operazioni monomie Δ_1, Δ_2, . . che risolvono il problema B si inverta l'ordine dei fattori in un modo qualunque adottando per ogni singola operazione quel modo d'inversione che più piace, e siano Δ'_1, Δ'_2, . . . le operazioni in cui esse si cambiano risp., queste nuove operazioni soddisfano del pari al problema B. In altri termini le N forme: $\Delta'_1 . f$, $\Delta''_1\, f$, ... sono ancora linearmente indipendenti.

Dopo aver sostituito l'unità in luogo delle D_{xx}, D_{yy}, . . . come nell'art. prec., imaginiamo di dividere le N operazioni Δ_1, Δ_2, . . . in gruppi, riunendo in uno stesso gruppo A_k tutte quelle che hanno uno stesso grado k, quelle cioè per le quali:

$$\left\{ \sum_{j=1}^{\rho} \sum_{i=1}^{\sigma+1} \alpha_{ij} \right\} - \left\{ \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{\sigma+1,\,\sigma+1} \right\} = k.$$

Indichiamo con

$$\Delta_{k,1} \,,\quad \Delta_{k,2} \,,\quad \Delta_{k,3} \,, \ldots\ldots$$

quelle del gruppo A_k e con

$$\Delta'_{k,1}\,;\quad \Delta'_{k,2}\,,\quad \Delta'_{k,3}\,,\ldots.$$

le operazioni in cui esse si cambiano coll'invertire a capriccio in ciascuna di esse l'ordine dei fattori. Supponiamo, se è possibile, che si abbia identicamente

$$(5)\qquad \begin{aligned} 0 = &\left\{\alpha_{k,1}\ \Delta'_{k,1} + \alpha_{k,2}\ \Delta'_{k,2} + \ldots\right\} f \\ &+ \left\{\alpha_{k-1,1}\,\Delta'_{k-1,1} + \alpha_{k-1,2}\,\Delta'_{k-1,2} + \ldots\right\} f \\ &+ \left\{\alpha_{k-2,1}\,\Delta'_{k-2,1} + \alpha_{k-2,2}\,\Delta'_{k-2,2} + \ldots\right\} f \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

dove le α sono coefficienti costanti. Applicando le due formole di permutazione richiamate nell'art. prec. ad un termine qualunque

$$\alpha_{i_0,j_0}\,.\,\Delta_{i_0,j_0}\,.\,f$$

più volte di seguito finchè esso si esprima per mezzo di termini del tipo

$$\Delta_{i,j}\,.\,f$$

si ha per risultato

$$\alpha_{i_0,j_0}\,.\,\Delta'_{i_0,j_0} f = \alpha_{i_0,j_0}\,.\,\Delta_{i_0,j_0} f + \Sigma\,\alpha'_{i,j}\,\Delta_{ij} f$$

dove sotto il segno Σ l'indice i può assumere solamente i valori da o fino ad $i_0 - 1$, giacchè le formole di permutazione (A) permutano semplicemente i fattori lasciando inalterato il coefficiente numerico α_{i_0,j_0} ed aggiungono dei termini in cui il grado è diminuito *almeno* di un'unità.

Operando in tal modo sopra tutti i termini della supposta identità (5), essa assumerà la forma seguente

$$\begin{aligned} 0 = &\left\{\alpha_{k,1}\ \ \Delta_{k,1} + \alpha_{k,2}\ \ \Delta_{k,2} + \ldots\right\} f \\ &+ \left\{\beta_{k-1,2}\,\Delta_{k-1,1} + \beta_{k-1,2}\,\Delta_{k-1,2} + \ldots\right\} f \\ &+ \left\{\beta_{k-2,1}\,\Delta_{k-2,1} + \beta_{k-2,2}\,\Delta_{k-2,2} + \ldots\right\} f \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Ma fra le forme $\Delta_{i,j}\,.\,f$ non può aver luogo, come sappiamo, alcuna relazione lineare, quindi:

$$\alpha_{k,1} = 0,\qquad \alpha_{k,2} = 0\,,\ldots.$$

ed in luogo della (5) sottentrerà l'identità più semplice:

$$\begin{aligned} 0 = &\left\{\alpha_{k-1,1}\,\Delta'_{k-1,1} + \alpha_{k-1,2}\,\Delta'_{k-1,2} + \ldots\right\} f \\ &+ \left\{\alpha_{k-2,1}\,\Delta'_{k-2,1} + \alpha_{k-2,2}\,\Delta'_{k-2,2} + \ldots\right\} f \\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

da cui con ragionamento analogo dedurremo:

$$\alpha_{k-1,1} = 0\,,\quad \alpha_{k-1,2} = 0\,,\ldots$$

Così procedendo concluderemo che i coefficienti della identità supposta sono tutti eguali a zero $c\,.\,d\,.\,d$.

§ II. *Elementi lineari e loro interpretazione simbolica.*

18. Se $x \equiv x_1, x_2, \ldots x_{\sigma+1}$ è una serie di variabili di specie σ ed $a_1, a_2, \ldots, a_{\sigma+1}$ sono $\sigma+1$ coefficienti *arbitrari* diremo che la funzione

$$a_x = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots + a_{\sigma+1}\, x_{\sigma+1}$$

è un *elemento lineare di specie* σ.

Con r serie di coefficienti $a \equiv a_1, a_2, \ldots, a_{\sigma+1}$, $b \equiv b_1, b_2, \ldots, b_{\sigma+1}, \ldots$, $e = e_1, e_2, \ldots e_{\sigma+1}$ e ρ serie di divariabili indipendenti $x, y, \ldots, u$ si possono formare gli r, ρ elementi lineari

$$\begin{array}{l} a_x,\ b_x, \ldots, e_x \\ a_y,\ b_y, \ldots\ e_y \\ \cdot\quad \cdots, \cdot \\ a_u,\ b_u, \ldots, e_u \end{array} \tag{1}$$

ed importa stabilire in quali casi essi sono fra loro indipendenti.

19. Gli $r.\rho$ elementi lineari che si possono formare con r serie di coefficienti arbitrari e ρ serie di variabili indipendenti di specie σ sono fra loro indipendenti quando almeno uno dei due numeri r e ρ è $\sigma+1$.

Supponiamo infatti, se è possibile, che qualunque siano i valori delle $a, b, \ldots;$ $x, y, \ldots$ si avesse identicamente

$$f\,(a_x, b_x, \ldots;\ a_y, b_y, \ldots;\ \ldots\ldots) = o. \tag{2}$$

Prendiamo un sistema di $r.\rho$ quantità affatto arbitrarie

$$\begin{array}{l} \alpha_{11},\ \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1r} \\ \alpha_{21},\ \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2r} \\ \cdot\quad \cdot\ \cdots\ \cdot \\ \alpha_{\rho 1},\ \alpha_{\rho 2}, \ldots, \alpha_{\rho r} \end{array} \tag{1'}$$

dico che si potranno sempre, determinare le arbitrarie $a_i, b_i, \ldots;\ x_i, y_i, \ldots$ $(i = 1, 2, \ldots, \sigma+2)$ in modo da avere:

$$\begin{array}{l} a_x = \alpha_{11},\ b_x = \alpha_{12}, \ldots, e_x = \alpha_{1r} \\ a_y = \alpha_{21},\ b_y = \alpha_{22}, \ldots, e_y = \alpha_{2r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_u = \alpha_{\rho 1},\ b_u = \alpha_{\rho 2}, \ldots, e_u = \alpha_{\rho r} \end{array} \tag{3}$$

Supponiamo, per fissare le idee, che sia $r \lesseqgtr \sigma+1$. Prenderemo per tutti i valori di i che sono superiori ad $r: a_i = b_i = \ldots = e_i = o$ e fisseremo in un modo qualunque i valori di $a_i.\ b_i, \ldots, e_i$ per $i \lesseqgtr r$, purchè si abbia però

$$\begin{vmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_r \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ e_1, & e_2 & \ldots & e_r \end{vmatrix} \gtrless 0$$

il che evidentemente è sempre possibile. Allora le r operazioni lineari fra le r incognite $x_1, \ldots, x_r$:

$$\begin{array}{l} a_x = a_1\, x_1 + a_2\, x_2 + \ldots + a_r\, x_r = \alpha_{11} \\ b_x = b_1\, x_1 + b_2\, x_2 + \ldots + b_r\, x_r = \alpha_{12} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ e_x = e_1\, x_1 + e_2\, x_2 + \ldots + e_r\, x_r = \alpha_{1r} \end{array}$$

si potranno sempre risolvere dando alle $x_1, \ldots, x_r$ certi valori *finiti e determinati.* Similmente si potranno determinare in un modo unico i valori finiti delle $y_1, \ldots, y_r$ che rendono soddisfatte le equazioni:

$$a_y = \alpha_{21},\ b_y = \alpha_{22}, \ldots, e_y = \alpha_{2r},$$

Così si potranno soddisfare tutte le operazioni (3), e sostituendo allora nella identità (2) in luogo delle $a, b, \ldots; x, y, \ldots$ i loro valori così determinati si avrà:

$$f(\alpha_{11}, \alpha_{12} \ldots; \alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots; \ldots\ldots) = 0$$

il che è assurdo poichè le $r.\rho$ quantità α_{ij} erano affatto arbitrarie e quindi non può aver luogo fra esse alcuna relazione.

20. Se i due numeri r e ρ sono entrambi $> \sigma + 1$ fra gli $r.\rho$ elementi lineari dell'art. prec. hanno luogo $(r - \sigma - 1)(\rho - \sigma - 1)$ relazioni distinte.

Poichè r e ρ sono entrambi $> \sigma + 1$, indichiamo con $x, y, \ldots, u$ un gruppo di $(\sigma + 1)$ delle variabili date e con $\xi, \eta, \ldots$ le rimanenti $(\rho - \sigma - 1)$. Similmente separiamo in un modo qualunque $\sigma + 1$ serie di coefficienti che indicheremo con $a, b, \ldots, e$ e indichiamo le $(r - \sigma - 1)$ serie rimanenti con $\alpha, \beta, \ldots$ Allora è facile vedere che uno qualunque degli $(r - \sigma - 1)(\rho - \sigma - 1)$ elementi che si possono formare combinando le $(r - \sigma - 1)$ serie di coefficienti $\alpha, \beta, \ldots$ colle $(\rho - \sigma - 1)$ serie di variabili $\xi, \eta, \ldots$ si può esprimere in funzione di elementi tutti diversi dagli $(r - \sigma - 1)(\rho - \sigma - 1)$ ora considerati. Se θ infatti è una qualunque delle $\xi, \eta, \ldots$ e γ una qualunque delle $\alpha, \beta, \ldots$ si ha identicamente:

$$\begin{vmatrix} a_x & b_x & \ldots & e_x & \gamma_x \\ a_y & b_y & \ldots & e_y & \gamma_y \\ \ldots & & & & \\ a_u & b_u & \ldots & e_u & \gamma_u \\ a_\theta & b_\theta & \ldots & e_\theta & \gamma_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \ldots & e_1 & \gamma_1 \\ a_2 & b_2 & \ldots & e_2 & \gamma_2 \\ \ldots & & & & \\ a_{\sigma+1} & b_{\sigma+1} & \ldots & e_{\sigma+1} & \gamma_{\sigma+1} \\ a_{\sigma+2} & b_{\sigma+2} & \ldots & e_{\sigma+2} & \gamma_{\sigma+2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & e_1 & \theta_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & e_2 & \theta_2 \\ \ldots & & & & \\ x_{\sigma+1} & y_{\sigma+1} & \ldots & e_{\sigma+1} & \theta_{\sigma+1} \\ x_{\sigma+2} & y_{\sigma+2} & \ldots & e_{\sigma+2} & \theta_{\sigma+2} \end{vmatrix}$$

quando gli elementi sono della specie $\sigma + 1$, epperò essendo essi della specie σ si avrà:

$$\begin{vmatrix} a_x & \ldots & e_x & \gamma_x \\ \ldots & & & \\ a_u & \ldots & e_u & \gamma_u \\ a_\theta & \ldots & e_\theta & \gamma_\theta \end{vmatrix} = 0$$

poichè per passare da questo caso al primo basta porre:

$$a_{\sigma+2} = \ldots = e_{\sigma+2} = \gamma_{\sigma+2} = 0 \qquad x_{\sigma+2} = \ldots = u_{\sigma+2} = \theta_{\sigma+2} = 0$$

Questa identità ci dice appunto che γ_θ si esprime in funzione di elementi che non sono formati dalla combinazione delle serie $\alpha, \beta, \ldots$ colle serie $\xi, \eta, \ldots$ Separati dall'insieme degli $r.\rho$ elementi gli $(r - \sigma - 1)(\rho - \sigma - 1)$ elementi $\alpha_\xi, \alpha_\eta, \ldots \beta_\xi, \beta_\eta, \ldots$, sarà facile persuadersi con procedimento analogo a quello tenuto nell'art. prec. che fra gli elementi residui non può aver luogo alcuna relazione algebrica, e che, per conseguenza, le $(r - \sigma - 1)(\rho - \sigma - 1)$ relazioni trovate sono le sole che hanno luogo fra gli $r.\rho$ elementi; su di che non insistiamo più oltre non avendo in seguito a far uso di tale osservazione.

21. Dati $r.\rho$ elementi come nell'art. 18 noi considereremo in seguito quelle

sole funzioni razionali ed intere $\varphi\ (a_x,\ a_y, .. ,\ b_x,\ b_y, ...)$, che sono omogenee negli elementi di ciascuna linea orizzontale e di ciascuna linea verticale dello schema (1). Se μ_i è il grado di φ negli elementi della i^{esima} linea orizzontale e ν_i il suo grado negli elementi della i^{esima} linea verticale, la funzione φ si comporrà (art. 10) di

$$[\mu_1, \ldots, \mu_\rho;\ \nu_1, \ldots, \nu_r]$$

termini distinti, intendo colla parola *distinti* che essi contengono gli $r . \rho$ elementi elevati a serie distinte di esponenti. Infatti questi termini non saranno fra loro linearmente indipendenti, come lo sono i termini *distinti* di un'ordinaria funzione intera di più variabili, che quando almeno uno dei due numeri r, ρ sia $\overline{\gtrless} \sigma + 1$, poichè solo in tal caso gli r, ρ elementi possono assimilarsi ad $r . \rho$ variabili indipendenti, come si è visto nei due art.[i] prec.[ti]

22. Ogni operazione Δ eseguita sopra $\varphi\ (a_x,\ a_y, .. ,\ b_x,\ b_y, ...)$ la trasforma in una funzione della stessa natura $\varphi'\ (a_x,\ a_y, .. ,\ b_x,\ b_y, ...)$. Si ha infatti per due variabili qualunque $x. y$:

$$y_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = a_i y_i \frac{\partial\varphi}{\partial a_x} + b_i y_i \frac{\partial\varphi}{\partial b_x} + \ldots + e_i y_i \frac{\partial\varphi}{\partial e_x}$$

onde ponendo $i = 1, 2, .., \sigma + 1$ e sommando:

$$D_{xy} . \varphi = a_y \frac{\partial\varphi}{\partial a_x} + b_y \frac{\partial\varphi}{\partial b_x} + \ldots + e_y \frac{\partial\varphi}{\partial e_x}$$

23. Se i ed j sono due numeri, distinti od eguali, della serie $1, 2, \ldots, \sigma + 1$ e indichiamo con s una qualunque delle lettere $a, b, \ldots,$ con q una qualunque delle $x, y, ..,$ si ha identicamente.

$$\sum_{s=a,b\ldots} s_j \frac{\partial}{\partial s_i} (a_x\ a_y, .., b_x, b_y, ...) = \sum_{q=x,y\ldots} q_i \frac{\partial}{\partial q_j}\ \varphi(a_x, a_y, .., b_x, b_y, ...)$$

Ciò è una conseguenza diretta dello stesso principio di calcolo differenziale invocato nell'art. prec.

24. Il coefficiente del termine generale:

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}}\ y_1^{n_1}\ y_2^{n_2} \ldots y_{\sigma+1}^{n_{\sigma+1}} \ldots\ldots v_1^{k_1} v_2^{k_2} \ldots v_{\sigma+1}^{k_{\sigma+1}}$$

di una funzione $f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}, \ldots, \overset{k}{v}\right)$ di ν variabili di specie σ può sempre prendersi sotto la forma:

$$\frac{\lfloor m}{\lfloor m_1 \ldots \lfloor m_{\sigma+1}} . \frac{\lfloor n}{\lfloor n_1 \ldots \lfloor n_{\sigma+1}} \ldots \frac{\lfloor k}{\lfloor k_1 \ldots \lfloor k_{\sigma+1}}\ A m_1, m_2, ..;\ n_1, n_2, ..; .. ; k_1, k_2, \ldots$$

dove A è una costante che può determinarsi ad arbitrio per ogni serie di esponenti $m_1, m_2, \ldots;\ n_1, n_2, \ldots;$ possiamo dunque rappresentare A col simbolo

$$a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_{\sigma+1}^{m_{\sigma+1}}\ b_1^{n_1} b_2^{n_2} \ldots b_{\sigma+1}^{n_{\sigma+1}} \ldots . e_1^{k_1} e_2^{k_2} \ldots e_{\sigma+1}^{k_{\sigma+1}}$$

che prende precisamente tante forme distinte quante sono le dette serie di esponenti. Da questa rappresentazione di coefficienti ne discende per l'intera funzione la seguente:

$$f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}, \ldots, \overset{k}{u}\right) = [a_1 x_1 + \ldots + a_{\sigma+1} x_{\sigma+1}]^m [b_1 y_1 + \ldots + b_{\sigma+1} y_{\sigma+1}]^n \ldots [e_1 \nu_1 + \ldots + e_{\sigma+1} \nu_{\sigma+1}]^k$$
$$= a_x^m\ b_y^n \ldots . e_v^k$$

poichè, se si sviluppa l'espressione nel secondo membro secondo le regole ordinarie

e ad ogni termine simbolico si sostituisce quel valore A che esso rappresenta, si ricade identicamente nella funzione data [1].

25. Se $a_x^{\nu_1} b_y^{\nu_2} c_v^{\nu_r}$ rappresenta la funzione generale di r variabili, di specie σ, $F\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & & \nu_r \\ x, & y, & \ldots, & v\end{pmatrix}$, avranno anche un significato perfettamente determinato tutte quelle funzioni intere degli elementi lineari formabili colle r serie di coefficienti $a, b, \ldots, e$, e colle ρ serie di variabili $x, y, \ldots, v, \xi, \ldots, \omega$, che siano omogenee e di grado ν_1 negli elementi $a_x, a_y, \ldots, a_\omega$, omogenee e di grado ν_2 negli elementi $b_x, b_y, \ldots, b_\omega$ ecc. Esse saranno omogenee e di grado μ_1 nelle x se saranno tali negli elementi a_x, $b_x, \ldots$, e x, omogenee e di grado μ_2 nelle y se saranno tali negli elementi $a_y, b_y, \ldots$, e y e così via. Queste forme simboliche si comporranno dunque, come nell'art. 21, di $N = [\mu_1, \ldots, \mu_\rho; \nu_1, \ldots, \nu_r]$ forme monomie distinte:

$$f_1, f_2, \ldots, f_N,$$

che rappresenteranno altrettante funzioni linearmente indipendenti quando almeno uno dei due numeri r, ρ sia $\leqq \sigma + 1$. Supponiamo infatti, se è possibile, che si avesse identicamente, qualunque sia la funzione $F\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & & \nu_\rho \\ x, & y, & \ldots, & v\end{pmatrix}$:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_N f_N = 0.$$

Questa identità dovrà sussistere in particolare quando per F si prenda il prodotto $\alpha_x^{\nu_1} \beta_y^{\nu_2} \ldots \varepsilon_v^{\nu_r}$ degli elementi lineari *reali* formati con le serie di variabili e con ν serie di coefficienti *reali* ed arbitrari $\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$; ma allora le $f_1, \ldots, f_N$ altri non sono che le N funzioni di questi elementi di cui all'art. 21 si è dimostrata l'indipendenza lineare nell'ipotesi fatta circa i numeri ν e ρ. Quindi:

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \ldots, \alpha_N = 0.$$

26. Le N funzioni

$$f_i = a_x^{\alpha_{11}} \ldots a_\omega^{\alpha_{1\rho}} b_x^{\alpha_{21}} \ldots b_\omega^{\alpha_{2\rho}} \ldots\ldots e_x^{\alpha_{r1}} \ldots e_\omega^{\alpha_{r\rho}}$$

in cui le α_{ij} soddisfano alle condizioni:

$$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \ldots + \alpha_{i\rho} = \nu_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, r$$
$$\alpha_{1j} + \alpha_{2j} + \ldots + \alpha_{rj} = \nu_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, \rho$$

si possono dedurre dalla funzione generale

$$F\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & & \nu_\rho \\ x, & y, & \ldots, & v\end{pmatrix} = a_x^{\nu_1} b_y^{\nu_2} \ldots e_v^{\nu_r}$$

per mezzo di operazioni fra le ρ variabili $x, y, \ldots, v, \xi, \ldots, \omega$.

La dimostrazione coincide in sostanza con quella data all'art. 8; introducendo delle variabili ausiliarie $x', y', \ldots v'$ si può porre identicamente:

$$a_{x'}^{\nu_1} b_{y'}^{\nu_2} \ldots e_{v'}^{\nu_r} = \frac{1}{\underline{|\nu_1} \ldots \underline{|\nu_r}} \cdot D_{xx'}^{\nu_1} D_{yy'}^{\nu_2} \ldots D_{vv'}^{\nu_r} \cdot \left\{ a_x^{\nu_1} b_y^{\nu_2} \ldots e_v^{\nu_r} \right\}$$

$$= \frac{1}{\underline{|\nu_1} \ldots \underline{|\nu_r}} \cdot D_{xx'}^{\nu_1} D_{yy'}^{\nu_2} \ldots D_{vv'}^{\nu_r} \cdot F$$

[1] Questa notazione simbolica è stata introdotta da Aronhold. Giornale di Borcherdt. Vol 55.

Ora si ha evidentemente:

$$f_i = a_x^{\alpha_{11}} \dots a_\omega^{\alpha_{1\rho}}\, b_x^{\alpha_{21}} \dots b_\omega^{\alpha_{1\rho}} \dots\dots\dots e_x^{\alpha_{r1}} \dots e_\omega^{\alpha_{r\rho}}$$

$$= \frac{1}{\lfloor\nu_1 \dots \lfloor\nu_\rho} \cdot D_{x'x}^{\alpha_{11}} \dots D_{x'\omega}^{\alpha_{1\rho}}\, D_{y'x}^{\alpha_{21}} \dots D_{y'\omega}^{\alpha_{2\rho}} \dots\dots\dots D_{v'x}^{\alpha_{\rho 1}} \dots D_{v'\omega}^{\alpha_{\rho\rho}} \cdot \left\{ a_{x'}^{\nu_1} b_{y'}^{\nu_2} \dots e_{v'}^{\nu_r} \right\}$$

$$= \left(\frac{1}{\lfloor\nu_1 \dots \lfloor\nu_\rho} \right)^2 \cdot D_{x'x}^{\alpha_{11}} \dots D_{x'\omega}^{\alpha_{1\rho}}\, D_{y'x}^{\alpha_{21}} \dots D_{y'\omega}^{\alpha_{2\rho}} \dots\dots\dots D_{v'x}^{\alpha_{r1}} \dots D_{v'\omega}^{\alpha_{r\rho}} \cdot D_{xx'}^{\nu_1} D_{yy'}^{\nu_2} \dots D_{vv'}^{\nu_r} . F$$

onde, eliminando le variabili ausiliarie,

$$f_i = \Delta_i . F$$

dove Δ_i è un'operazione fra le sole $x, y, \dots v, \xi, \dots, \omega$ precisamente come si è visto all'art. 8.

Reciprocamente tutte le forme derivabili da F con operazioni, e che nelle $x, \dots, \omega$ sono risp. dei gradi $\mu_1, \dots, \mu_\rho$, altro non sono che combinazioni lineari delle forme f_i, poichè un'operazione Δ eseguita sopra un aggregato di elementi lineari dà ancora un aggregato di elementi lineari (art. 22). Pertanto chiameremo le f_i e le loro combinazioni lineari a coefficienti costanti

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_N f_N$$

derivate [1] (di F) dei gradi $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_\rho$ nelle variabili $x, y, \dots, \omega$. Riepilogando questi risultati e quelli degli art. 14-17 possiamo enunciarli così:

Le forme di grado $\mu_1, \dots, \mu_\rho$ risp. nelle ρ variabili $x, y, \dots, v, \xi, \dots, \omega$, derivabili con operazioni dalla funzione generale $F\begin{pmatrix} \nu_1 & \nu_2 & & \nu_r \\ x, & y, & \dots, & v \end{pmatrix} = a_x^{\nu_1} b_y^{\nu_2} \dots e_v^{\nu_r}$ sono rappresentate indifferentemente dall'una o dall'altra delle due espressioni:

$$\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_N f_N \qquad (a)$$

e

$$\left\{ \beta_1 \Delta_1 + \beta_2 \Delta_2 + \dots + \beta_N \Delta_N \right\} . F \qquad (b)$$

dove le α e le β sono costanti arbitrarie ed $N = [\mu_1, \dots, \mu_\rho;\ \nu_1, \dots, \nu_\rho]$; in queste espressioni le

$$f_i = a_x^{\alpha_{11}} \dots a_\omega^{\alpha_{1\rho}}\ b_x^{\alpha_{21}} \dots b_\omega^{\alpha_{2\rho}} \dots\dots\dots e_x^{\alpha_{r1}} \dots e_\omega^{\alpha_{r\rho}}$$

e

$$\Delta_i = D_{xx}^{\alpha_{11}} \dots D_{x\omega}^{\alpha_{1\rho}}\ D_{yx}^{\alpha_{21}} \dots D_{y\omega}^{\alpha_{2\rho}} \dots\dots\dots D_{vx}^{\alpha_{r1}} \dots D_{v\omega}^{\alpha_{r\rho}}$$

si ottengono col dare agli esponenti $\alpha_{i,j}$ gli N sistemi di valori di cui sono suscettibili; di più è lecito prendere i singoli fattori di ogni singola operazione Δ_i in quell'ordine che piace. Le N forme così costruite sono fra loro linearmente indipendenti semprechè la specie delle variabili $x, y, \dots$ superi almeno uno dei due numeri $(\nu - 2)$ e $(\rho - 2)$.

[1] Prendendo F come forma fondamentale, queste derivate altro non sono che i covarianti di peso nullo lineari nei coefficienti di F.

Allora ad ogni sistema delle costanti arbitrarie α corrisponde un unico sistema delle costanti β, tale che sia identicamente

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_N f_N = \left\{ \beta_1 \Delta_1 + \ldots + \beta_N \Delta_N \right\} . F =$$
$$= \left\{ \beta'_1 \Delta'_1 + \ldots + \beta'_N \Delta'_N \right\} = \ldots$$

essendo Δ'_i la stessa Δ_i a meno dell'ordine dei fattori.

27. Se nell'art. prec. supponiamo $\rho = \nu$ e che i gradi $\mu_1, \ldots, \mu_r$ coincidano coi gradi $\nu_1, \ldots, \nu_r$, avremo una classe speciale di derivate di F che diremo *derivate omogenee ad* F. Quando $\sigma \gtreqless \nu - 1$ la funzione generale $F\begin{pmatrix}\nu_1 & & \nu_r\\ x, & \ldots, & v\end{pmatrix}$ ammetterà $N = [\nu_1, \ldots, \nu_r; \nu_1, \ldots, \nu_r]$ derivate omogenee fra loro linearmente indipendenti. Crediamo utile di osservare che come ogni derivata omogenea f_i può ottenersi da $a_x^{\nu_1}$, $b_y^{\nu_2}$ ..., $e_v^{\nu_r}$ con un'operazione Δ fra le variabili x, y, r, ... così essa potrà anche ottenersi dallo stesso composto fondamentale con un'operazione δ fra le serie di simboli a, b, c, ... giacchè nulla distingue essenzialmente le serie di simboli dalle serie di variabili nel confronto di $a_x^{\nu_1} \ldots e_v^{\nu_r}$ con $a_x^{\alpha_{11}} \ldots a_v^{1r}\, b_x^{\alpha_{21}} \ldots b_v^{\alpha_{2r}} \ldots\ldots e_x^{\alpha_{r1}} \ldots e_v^{\alpha_{rr}}$, potendosi col pensiero invertire le loro parti considerando come serie di simboli quelle che prima si consideravano come serie di variabili e reciprocamente. Se dunque alla forma:

$$f_i = a_x^{\alpha_{11}} \ldots a_v^{\alpha_{1r}}\; b_x^{\alpha_{21}} \ldots b_v^{\alpha_{2r}} \ldots\ldots e_x^{\alpha_{r1}} \ldots e_v^{\alpha_{rr}}$$

e all'operazione

$$\Delta_i = D_{xx}^{\alpha_{11}} \ldots D_{xv}^{\alpha_{1r}}\; D_{yx}^{\alpha_{21}} \ldots D_{yv}^{\alpha_{3r}} \ldots\ldots D_{vx}^{\alpha_{r1}} \ldots D_{vv}^{\alpha_{rr}}$$

aggiungiamo l'operazione:

$$\delta_i = D_{aa}^{\alpha_{11}} \ldots D_{ae}^{\alpha_{1r}}\; D_{ba}^{\alpha_{21}} \ldots D_{be}^{\alpha_{2r}} \ldots\ldots D_{ea}^{\alpha_{r1}} \ldots D_{ee}^{\alpha_{rr}},$$

ad ogni sistema di costanti α corrisponderanno due sistemi perfettamente determinati di costanti β e γ per le quali si abbia identicamente:

$$\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_N f_N$$
$$= \left\{ \beta_1 \Delta_1 + \ldots + \beta_N \Delta_N \right\} . F\begin{pmatrix}\nu_1 & & \nu_r\\ x, & \ldots, & v\end{pmatrix}$$
$$= \left\{ \gamma_1 \delta_1 + \ldots + \gamma_N \delta_N \right\} . \left\{ a_x^{\nu_1} b_y^{\nu_2} \ldots e_v^{\nu_r} \right\}$$

Può giovare in certe questioni il servirsi promiscuamente di operazioni Δ e operazioni δ, poichè esse sono sempre fra loro *permutabili* cioè:

$$\Delta . \delta . \varphi(a_x, a_y, \ldots, b_x, b_y, \ldots) = \delta . \Delta . \varphi(a_x, a_y, \ldots, b_x, b_y, \ldots)$$

in quanto le Δ operano su variabili x, y, ... indipendenti dalle variabili a, b, ... su cui operano le δ.

28. Qui si presenterebbe una questione interessante cioè: data la funzione generale $f\begin{pmatrix}\nu_1 & \nu_2 & & \nu_r\\ x, & y, & \ldots, & v\end{pmatrix}$ determinare tutte le funzioni $\varphi\begin{pmatrix}\mu_1 & \mu_2 & & \mu_r & \mu_{r+1} & & \mu_\rho\\ x, & y, & \ldots, & v, & \xi, & \ldots, & \omega\end{pmatrix}$ ad essa equivalenti nel senso che le due funzioni

f e φ siano derivabili l'una dall'altra per mezzo di operazioni fra le $x, y, \ldots, \omega$. Su questa questione ritorneremo più tardi, per ora ci limiteremo a notare che le $1.2\ldots r$ funzioni che si ottengono da $f\left(\overset{\nu_1}{x}, \overset{\nu_2}{y}, \ldots, \overset{\nu_\rho}{v}\right)$ col permutare comunque le lettere $x, y, \ldots, v$, o più generalmente tutte le funzioni che si ottengono da $f\left(\overset{\nu_1}{x}, \ldots, \overset{\nu_\rho}{v}\right)$ col sostituire alle variabili $x, \ldots, v$ delle variabili $x', \ldots, v'$ distinte fra loro, ma non necessariamente distinte dalle $x, \ldots, v$, sono tutte fra loro equivalenti. Così la forma generale a due serie di variabili $f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}\right)$ equivale alla forma $f\left(\overset{m}{y}, \overset{n}{x}\right)$, la forma $f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{y}, \overset{l}{z}\right)$ equivale ad $f\left(\overset{m}{x}, \overset{n}{z}, \overset{l}{y}\right)$ ad $f\left(\overset{m}{y}, \overset{n}{r}, \overset{l}{x}\right)$ ad $f\left(\overset{m}{y}, \overset{n}{\xi}, \overset{l}{\eta}\right)$ ecc. Infatti se una delle due forme $a_x^{\nu_1} \ldots e_v^{\nu_r}$ ed $a_{x'}^{\nu_1}, \ldots e_{v'}^{\nu_r}$, si prende come fondamentale, l'altra si potrà derivare da essa per mezzo di operazioni in virtù del teorema dell'art. 26.

29. Di tale equivalenza faremo applicazione alla dimostrazione di due teoremi che sussistono per variabili di qualsivoglia specie.

Se in una funzione $f(x^0, x', x'', \ldots)$ la variabile x^0 è una di quelle che entrano al grado più alto e Δ è un'operazione qualunque fra le $x^0, x', x'', \ldots$ si possono sempre determinare delle operazioni Δ', Δ'', .., ed una costante k tali che sia identicamente:

$$\Delta . f = k . f + \Delta' D_{x^0 x'} . f + \Delta'' D_{x^0 x'} . f .$$

Invero la forma più generale di Δ è la seguente:

$$\Delta = k + \sum_{i,j} \Delta_{i,j} . D_{x^{(i)} x^{(j)}}$$

dove i, j sono due numeri distinti della serie 0, 1, 2, ...; basterà dunque dimostrare il teorema pel caso semplicissimo di $\Delta = D_{x^{(i)} x^{(j)}}$. Poniamo simbolicamente $f = a_{x^0}^{\mu} b_{x'}^{\mu'} c_{x''}^{\mu''} \ldots$ dove secondo il supposto $\mu^0 \gtreqless \mu^{(i)}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$. Se i ed j sono entrambi diversi da zero si può porre identicamente (art. 5, form. I):

$$D_{x^{(i)} x^{(j)}} = D_{x^0 x^{(j)}} D_{x^{(i)} x^0} - D_{x^{(i)} x^0} D_{x^0 x^{(j)}} \tag{4}$$

riducendo così la questione al caso di $\Delta = D_{x^{(i)} x^0}$ ed a quello di $\Delta = D_{x^0 x^{(j)}}$ nei quali uno dei due apici i, j è lo zero. Per $\Delta = D_{x^0 x^{(i)}}$ il teorema è senz'altro evidente; resta dunque solo a dimostrarlo pel caso di $\Delta = D_{x^{(i)} x^0}$. Supponendo, per fissare le idee, $i = 1$ abbiamo:

$$D_{x' x^0} f = D_{x' x^0} . a_{x^0}^{\mu} b_{x'}^{\mu'} . c_{x''}^{\mu''} \ldots = \mu' . a_{x^0}^{\mu} b_{x^0} b_{x'}^{\mu'-1} . c_{x''}^{\mu''} \ldots ,$$

ma per l'art. prec. la funzione nel secondo membro equivale a quella che se ne ottiene permutando fra loro le due variabili x^0, x', cioè si può determinare un'operazione Δ fra x^0 ed x' tale da dare identicamente

$$\mu' . a_{x^0}^{\mu} b_{x^0} b_{x'}^{\mu'-1} . c_{x''}^{\mu''} \ldots = \Delta . a_{x'}^{\mu} b_{x'} b_{x^0}^{\mu'-1} . c_{x''}^{\mu''} \ldots ,$$

quindi

$$D_{x' x^0} . f = \Delta . a_{x'}^{\mu} b_{x'} b_{x^0}^{\mu'-1} . c_{x''}^{\mu''} \ldots \tag{α}$$

Indichiamo con Δ_1 l'operazione fra x^0 ed x' con cui da $a_{x^0}^{\mu} b_{x'}^{\mu'}$ si ottiene la derivata $a_{x'}^{\mu} b_{x'} b_{x^0}^{\mu'-1}$, cosicchè:

$$a_{x'}^{\mu} b_{x'} b_{x^0}^{\mu'-1} . c_{x''}^{\mu''} \ldots = \Delta_1 . a_{x^0}^{\mu} b_{x'}^{\mu'} c_{x''}^{\mu''} \ldots = \Delta_1 . f, \qquad (\beta)$$

la sua forma generale sarà (art. 6).

$$\Delta_1 = \sum_{h,k} \alpha_{h,k} . D^h_{x' x^0} \; D^k_{x^0 x'}$$

con la condizione

$$k = (\mu - \mu') + h + 1$$

che si ottiene uguagliando il grado di x^0 nel primo e nel secondo membro della (β). Poichè ora per ipotesi $\mu \geqq \mu'$ ed h è un intero positivo dovrà essere sempre $k \geqq 1$, onde potremo porre:

$$\Delta_1 = \Delta'_1 . D_{x^0 x'}$$

Sostituendo ciò nella (β) e quindi il secondo membro della (β) nella (α) concludiamo:

$$(5) \qquad D_{x' x^0} f = \Delta \Delta'_1 D_{x^0 x'} . f \qquad c. d. d.$$

30. Con procedimento affatto simile può dimostrarsi che: Se in una funzione $f(x^0, x', x'', \ldots)$ la variabile x^0 è una di quelle che entrano al grado più basso e Δ è un'operazione qualunque fra le $x^0, x', x'', \ldots$ possono sempre determinarsi delle operazioni $\Delta' \Delta'', \ldots$ ed una costante k per le quali sia identicamente

$$\Delta f = k . f + \Delta' D_{x x^0} f + \Delta'' D_{x'' x^0} f + \ldots .$$

Anche qui applicando la formola (4) dell'art. prec. si ridurrà subito la questione al solo caso di $\Delta = D_{x^0 x^{(i)}}$ e per questo il teorema è una conseguenza immediata della formola (5) la quale è anche applicabile alla funzione f che ora consideriamo, purchè si permutino in essa x^0 ed x', essendo ora per supposto la x^0 e non, come prima, la x' quella delle due variabili che certamente entra in f al grado più basso. Così la (5) ci da

$$D_{x^0 x'} f = \Delta . \Delta'_1 . D_{x' x^0} . f \qquad c. d. d.$$

§ III. *Le operazioni* H *ed* Ω.

31. Siano $x, y, \ldots, v$ variabili indipendenti di specie qualunque e $\xi, \eta, \ldots, \omega$ altrettante variabili *ausiliarie* indipendenti fra loro e dalle precedenti, alle quali le facciamo corrispondere ordinatamente. Poichè le operazioni elementari

$$\begin{array}{llll} D_{x\xi}, & D_{x\eta}, & \ldots, & D_{x\omega} \\ D_{y\xi}, & D_{y\eta}, & \ldots, & D_{y\omega} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ D_{v\xi}, & D_{v\eta}, & \ldots, & D_{v\omega} \end{array}$$

sono evidentemente fra loro permutabili, il loro determinante che indicheremo brevemente con

$$(D_{x\xi} \; D_{y\eta} \; \ldots \; D_{v\omega})$$

esprimerà un'operazione perfettamente determinata, e quindi del pari determinata sarà l'operazione espressa dal prodotto

$$(1) \qquad D_{\xi x}\, D_{\eta y} \,.\,.\,.\,.\, D_{\omega v}\, (D_{x\xi}\, D_{y\eta} \,.\,.\,.\,.\, D_{v\omega}) .$$

Per il teorema fondamentale dell'art. 5 essa potrà rappresentarsi come una somma di operazioni monomie del tipo $\Delta' . \Delta''$ dove Δ' si compone di operazioni elementari che hanno per primo indice una delle variabili $x, y, \ldots, v$, e Δ'' si compone di operazioni elementari in cui il primo indice è una delle $\xi, \eta, \ldots, \omega$. Indicando con H l'insieme di quei termini in cui Δ'' contenesse per avventura tutte le sue operazioni elementari elevate alla potenza zero potremo scrivere:

$$(2) \qquad D_{\xi x}\, D_{\eta y} \,.\,.\,.\,.\, D_{\omega v}\, (D_{x\xi}\, D_{y\eta} \,.\,.\,.\, D_{v\omega}) = H + \Sigma . \Delta' . \Delta''$$

dove le Δ'' contengono *almeno* un'operazione D_{pq} in cui p è una delle $\xi, \eta, \ldots$ ed H contiene soltanto operazioni fra le $x, y, \ldots, v$. Infatti le formole (A) dell'art. 5, che trasformano la (1) nel secondo membro della (2), non alterano evidentemente la differenza fra il grado di derivazione e il grado di moltiplicazione rispetto ad una stessa variabile. Poichè ora questa differenza è zero nell'operazione (1) per ciascuna delle variabili $\xi, \eta, \ldots$, tale dovrà pur essere in H; ma le $\xi\ \eta, \ldots$ non entrano per supposto in H che come secondi indici, quindi il loro grado di derivazione è zero; dovrà dunque essere nullo anche il loro grado di moltiplicazione cioè la H non contenere affatto le $\xi, \eta, \ldots, \omega$.

Esiste dunque un'operazione $H_{x,y,\ldots,v}$ fra le sole variabili $x, y, \ldots, v$ che può porsi sotto la forma:

$$H_{x,y,\ldots v} = D_{\xi x}\; D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\, (D_{x\xi}\; D_{y\eta} \ldots D_{v\omega}) + \Sigma . \Delta' \Delta''$$

Se $f(x, y, \ldots, v)$ è una funzione qualunque delle sole variabili $x, y, \ldots, v$ questa formola ci dà:

$$(3) \qquad H_{x,y,\ldots,v} . f(x, y, \ldots, v) = D_{\xi x}\, D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\, (D_{x\xi}\, D_{y\eta} \ldots D_{v\omega}) . f(x, y, \ldots, v)$$

poichè le operazioni Δ'' annullano evidentemente la $f(x, y, \ldots, v)$ che non contiene le $\xi, \eta, \ldots, \omega$ e quindi

$$\left\{ \Sigma \Delta' \Delta'' \right\} f(x, y, \ldots, v) = 0 .$$

32. Per due variabili x, y si trova facilmente:

$$D_{\xi x}\, D_{\eta y}\, (D_{x\xi}\, D_{y\eta} - D_{x\eta}\, D_{y\xi}) = D_{xx}\, D_{yy} + D_{xx} - D_{yx}\, D_{xy} + \Sigma \Delta' \Delta''$$

quindi:

$$H_{x,y} = D_{yy}\, D_{xx} + D_{xx} - D_{yx}\, D_{xy}$$

Per tre variabili x, y, z si trova:

$$\begin{aligned} H_{x,y,z} = {} & D_{xx}\, D_{yy}\, D_{zz} + 2 . D_{xx}\, D_{yy} + D_{xx}\, D_{zz} + 2 . D_{xx} + \\ & + D_{zx}\, D_{yz}\, D_{xy} + D_{zy}\, D_{yx}\, D_{xz} - \\ & - D_{xx}\, D_{zy}\, D_{yz} - (1 + D_{yy})\, D_{zx}\, D_{xz} - (2 + D_{zz})\, D_{yx}\, D_{xy} \ \text{ ecc.} \end{aligned}$$

ecc. ecc.

Le espressioni che così si trovano diventano sempre più complicate col crescere del numero di variabili. Ma di tali espressioni non avremo a servirci; l'essenziale pel nostro scopo è di sapere che esiste una operazione fra le $x, y, \ldots, v$ che applicata ad una funzione delle sole $x, \ldots, v$ sostituisce pienamente l'operazione (1).

33. Se poniamo simbolicamente

$$f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & & n_r \\ x, & y, & \ldots, & v \end{pmatrix} = a_x^{n_1}\, b_y^{n_2} \ldots e_v^{n_r}$$

si trova immediatamente:

$$D_{x\xi} D_{y\eta} \dots D_{v\omega} f = n_1 n_2 \dots n_r . a_x^{n_1-1} b_y^{n_2-1} \dots e_v^{n_r-1} a_\xi b_\eta \dots e_\omega$$

quindi

$$(D_{x\xi} D_{y\eta} \dots D_{v\omega}) f = n_1 n_2 \dots n_r . (a_\xi b_\eta \dots e_\omega) \text{ (}^1\text{)} . a_x^{n_1-1} b_y^{n_2-1} \dots e_v^{n_r-1}$$

e finalmente

$$D_{\xi x} D_{\eta y} \dots D_{\omega v} (D_{x\xi} D_{y\eta} \dots D_{v\omega}) . f = n_1 n_2 \dots n_r (a_x b_y \dots e_v) a_x^{n_1-1} b_y^{n_2-1} \dots e_v^{n_r-1} .$$

Dunque:

$$(4) \qquad H_{x,y,\dots,v} \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\} = n_1 n_2 \dots n_r (a_x b_y \dots e_v) a_x^{n_1-1} b_y^{n_2-1} \dots e_v^{n_r-1} .$$

34. Dall'ultima formola risulta facilmente che l'*operazione* $H_{x,y,\dots,v}$ *è simmetrica nelle* $x, y, \dots, v$ poichè evidentemente:

$$(a_x b_y c_z \dots) = (b_y a_x c_z \dots) = (b_y c_z a_x \dots) = \dots$$

cosicchè $\qquad H_{x,y} = H_{yx}, \; H_{x,y,z} = H_{x,z,y} = H_{y,z,x}$ ecc.

Così ps. l'espressione data all'art. 32 per $H_{x,y}$ si potrà rendere simmetrica nelle x, y e ritenere

$$H_{xy} = D_{xx} D_{yy} + \tfrac{1}{2} (D_{xx} - D_{yy}) - \tfrac{1}{2} (D_{yx} D_{xy} + D_{xy} D_{yx})$$

È facile del resto verificare l'identità delle due formole poichè si sa che

$$D_{yx} D_{xy} = D_{xy} D_{yx} + D_{xx} - D_{yy} \qquad \text{(Art. 5).}$$

35. La formola (4) può scriversi anche così:

$$H_{x,y,\dots,v} \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\} = (a_x b_y \dots e_v) \frac{\partial}{\partial a_x} \frac{\partial}{\partial b_y} \dots \frac{\partial}{\partial e_v} . \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\} =$$

$$= (a_x b_y \dots e_v) \left(\frac{\partial}{\partial a_x} \frac{\partial}{\partial b_y} \dots \frac{\partial}{\partial e_v} \right) \text{(}^2\text{)} \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\}$$

sotto la qual forma essa non è che un caso particolare di un'altra più generale. Dimostriamo infatti che:

Se $\varphi(a_x, a_y, \dots, b_x, b_y, \dots\dots)$ è un aggregato razionale ed intero degli $r.r'$ elementi lineari che si possono formare con r serie di variabili $x, y, \dots, v$ ed r' serie di coefficienti $a, b, \dots, e, g, l, \dots$, si ha identicamente:

$$(5) \qquad H_{x,y,\dots,v} . \varphi = \Sigma \left\{ (a_x b_y \dots e_v) . \left(\frac{\partial}{\partial a_x} \frac{\partial}{\partial b_y} \dots \frac{\partial}{\partial e_v} \right) \varphi \right\}$$

(¹) Notazione abbreviata in luogo di $\begin{vmatrix} a_\xi & \dots & a_\omega \\ \dots & \dots & \dots \\ e_\xi & \dots & e_\omega \end{vmatrix}$.

(²) Notazione abbreviata del determinante $\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial a_x} & \dots & \frac{\partial}{\partial a_v} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial e_x} & \dots & \frac{\partial}{\partial e_v} \end{vmatrix}$.

dove la somma deve estendersi a tutte $\frac{r'(r'-1)\dots(r'-r+1)}{1.2\dots\dots\dots r}$ combinazioni degli r' coefficienti, r ad r. In particolare se $r'<r$

$$H_{x,y,\dots v}\cdot\varphi=0$$

e se $r'=r$

$$H_{x,y,\dots,v}\cdot\varphi=(a_x b_y\dots e_v)\cdot\left(\frac{\partial}{\partial a_x}\frac{\partial}{\partial b_y}\dots\frac{\partial}{\partial e_x}\right)\varphi \tag{6}$$

Si ha infatti (art. 22):

$$D_{x\xi}D_{y\eta}\dots D_{v\omega}\cdot\varphi=\left(a_\xi\frac{\partial}{\partial a_x}+b_\xi\frac{\partial}{\partial b_x}+\dots\right)\left(a_\eta\frac{\partial}{\partial a_y}+b_\eta\frac{\partial}{\partial b_y}+\dots\right)\dots\left(a_\omega\frac{\partial}{\partial a_v}+ b_\omega\frac{\partial}{\partial b_v}+\dots\right)$$

ed eseguendo in questa formola le $\underline{|r}$ permutazioni delle $\xi,\eta,\dots,\omega$ e sommando i risultati moltiplicati per ±1:

$$(D_{x\xi}D_{y\eta}\dots = D_{v\omega})\varphi=\begin{vmatrix}\left(a_\xi\frac{\partial}{\partial a_x}+b_\xi\frac{\partial}{\partial b_x}+\dots\right),\dots,\left(a_\omega\frac{\partial}{\partial a_x}+b_\omega\frac{\partial}{\partial b_x}+\dots\right)\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \left(a_\xi\frac{\partial}{\partial a_v}+b_\xi\frac{\partial}{\partial b_v}+\dots\right),\dots,\left(a_\omega\frac{\partial}{\partial a_v}+b_\omega\frac{\partial}{\partial b_v}+\dots\right)\end{vmatrix}$$

e anche, per un teorema assai noto dei determinanti,

$$(D_{x\xi}D_{y\eta}\dots D_{v\omega})\,\varphi=\Sigma\left\{a_\xi b_\eta\dots e_\omega)\left(\frac{\partial}{\partial a_x}\frac{\partial}{\partial b_y}\dots\frac{\partial}{\partial e_v}\right)\varphi\right\}$$

dove la somma va estesa a tutte le combinazioni della $a, b,\dots, r$ ad r. Di qui caviamo finalmente, confrontando colle (3),

$$D_{\xi x}D_{\eta y}\dots D_{\omega v}\cdot(D_{x\xi}D_{y\eta}\dots D_{v\omega})\,\varphi=H_{x,y,\dots,v}\,\varphi$$
$$=\Sigma\left\{D_{\xi x}D_{\eta y}\dots D_{\omega v}(a_\xi b_\eta\dots e_\omega)\right\}.\left\{\left(\frac{\partial}{\partial a_x}\frac{\partial}{\partial b_y}\dots\frac{\partial}{\partial e_v}\right)\varphi\right\}$$
$$=\Sigma\left\{(a_x b_y\dots e_v)\left(\frac{\partial}{\partial a_x}\frac{\partial}{\partial b_y}\dots\frac{\partial}{\partial e_v}\right)\varphi\right\}\qquad c.\ d.\ d.$$

Se nella formola (6) poniamo al posto delle serie di variabili $x, y,\dots$ risp. le serie di cefficienti $a, b,\dots,$ e reciprocamente essa ci dà:

$$H_{a,b,\dots e}\cdot\varphi=(x_a y_b\dots v_e)\left(\frac{\partial}{\partial x_a}\frac{\partial}{\partial y_b}\dots\frac{\partial}{\partial v_e}\right).\varphi(x_a, y_a,\dots, x_b, y_b,\dots)$$
$$=(a_x b_y\dots e_v)\left(\frac{\partial}{\partial a_x}\frac{\partial}{\partial b_y}\dots\frac{\partial}{\partial e_v}\right).(a_x, a_y,\dots, b_x, b_y,\dots)=H_{x,y,\dots v}\cdot\varphi$$

cioè le due operazioni $H_{x,y,\dots,v}$ ed $H_{a,b,\dots,e}$ sono equivalenti per tutte quelle funzioni in cui le r serie $x, y,\dots, r$ e le r serie $a, b,\dots, e$ non entrino che in combinazioni lineari del tipo $a_x\, a_y,\dots, b_x b_y\dots\dots$

36. Di qui caviamo un corollario importante prendendo per φ la funzione $\Delta.\left\{a_x^{n_1}b_y^{n_2}\dots e_v^{n_r}\right\}$ dove Δ è un'operazione qualsiasi fra le $x, y,\dots, v$. Avremo in tal caso:

$$H_{x,y,\dots,v}\,\Delta.\left\{a_x^{n_1}b_y^{n_2}\dots e_v^{n_r}\right\}=H_{a,b,\dots e}\,\Delta.\left\{a_x^{n_1}b_y^{n_2}\dots e_v^{n_r}\right\}$$

e poichè le operazioni $H_{a,b,\dots,e}$ e Δ sono fra loro permutabili, (art. 27),

$$H_{x,y,\dots v}\Delta . \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\} = \Delta . H_{a,b,\dots,e} . \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\}$$

Ma di nuovo per l'art. prec.

$$H_{a,b,\dots,e} \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\} = H_{x,y,\dots,v} \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\}$$

dunque

$$H_{x,y,\dots,v}\Delta . \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\} = \Delta . H_{x,y,\dots,v} \left\{ a_x^{n_1} b_v^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\}$$

ossia identicamente:

$$H_{x,y,\dots,v}\Delta = \Delta . H_{x,y,\dots,v} \tag{7}$$

giacchè il composto simbolico $a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_r}$ può rappresentare una funzione *qualunque* delle variabili $x, y, \dots, v$ che erano di specie *qualunque*.

L'operazione $H_{x,y,\dots,v}$ è dunque permutabile con tutte le operazioni fra le $x, y, \dots, v$; non lo è però, in generale, con operazioni che affettino altre variabili oltre le $x, y, \dots, v$.

37. Finora abbiamo lasciato indeterminata la specie delle variabili. Supponiamo adesso che il numero r delle variabili $x, y, \dots, v$ sia superiore di un'unità alla specie σ delle stesse cioè $r = \sigma + 1$. L'operazione

$$(^1)\quad \Omega_{x,y,\dots,v} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{\sigma+1}} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_3} \dots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \right)$$

che non rientra nella classe di quelle da noi considerate fin qui, si può tuttavia ricollegare ad esse per mezzo dell'operazione $H_{x,y,\dots,v}$ avendosi identicamente:

$$H_{x,y,\dots,v} = (x, y, \dots, v) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \right). \tag{8}$$

Ed invero se $f \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & & n_{\sigma+1} \\ x, & y, & \dots, & v \end{pmatrix}$ è una funzione qualunque delle $x, y, \dots, v$ e poniamo simbolicamente $f = a_x^{n_1} b_y^{n_2} \dots e_v^{n_{\sigma+1}}$ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} f = n_1 n_2 \dots n_{\sigma+1} a_x^{n_1-1} b_y^{n_2-1} \dots e_v^{n_{\sigma+1}-1} a_1 b_2 \dots e_{\sigma+1}$$

quindi:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \right) f = n_1 n_2 \dots n_{\sigma+1} (a b \dots e)\ (^2)\ a_x^{n_1-1} b_y^{n_2-1} \dots e_v^{n_{\sigma+1}-1}$$

(1) Introdotta da Cayley. Crelle's Journal. Bd. 30. Mémoir sur les hyperdeterminants.

(2) Seguendo l'uso invalso presso gli scrittori tedeschi designamo semplicemente con $(a b \dots e)$ il determinante $\begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_{\sigma+1} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_1 & \dots & e_{\sigma+1} \end{vmatrix}$ in luogo della notazione più rigorosa $(a_1 b_2 \dots e_{\sigma+1})$.

ed

$$(xy\dots v)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\dots\frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}}\right)f = n_1 n_2 \dots n_{\sigma+1} . (a_x b_y \dots e_v)\, a_x^{n_1-1} b^{n_2-1} \dots e_v^{n_{\sigma+1}-1}$$
$$= \mathrm{H}_{x,y,..,v} . f$$

come appunto si era asserito.

38. L'operazione $\Omega_{x,y,..,v}$ non è permutabile che colle operazioni elementari proprie fra le $x, y, \dots, v$ a differenza della H che è anche permutabile colle D_{xx}, $D_{yy}, \dots$ Se D_{pq} è un'operazione propria fra le $x, y, \dots,$ cosicchè $D_{pq}(x, y, \dots v) = 0$, si ha per la (8):

$$(xy\dots v)\,\Omega_{x,y,..v} . D_{pq} = \mathrm{H}_{x,y,..,v}\, D_{pq} = D_{pq} . \mathrm{H}_{x,y,..,v}$$
$$= D_{pq}\left\{(xy\dots v)\,\Omega_{x,y,\dots v}\right\} = (x, y, \dots, v)\, D_{pq}\,\Omega_{x,y,\dots,v}$$

e dividendo i due membri per $(x, y, \dots v)$

$$\Omega_{x,y,..,v}\, D_{pq} = D_{pq}\,\Omega_{x,y,..,v}$$

Se $q = p$ si troverebbe come nel caso precedente:

$$(xy\dots v) . \Omega_{x,y,..,v} . D_{pp} = D_{pp}\left\{(xy\dots v)\,\Omega_{x,y,\dots,v}\right\}$$
$$= (xy\dots v) . \Omega_{x,y,\dots,v} + (xy\dots v) . D_{pp}\,\Omega_{x,y,\dots,v}\,,$$

ossia dividendo pe (x, y, v);

$$\Omega_{x,y,..,v}\;\; D_{pp}\,(1 + D_{pp})\,\Omega_{x,y,..,v}$$

Pertanto: se $\varphi\,(D_{xx}, \dots D_{vv};\ D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, \dots)$ è un'operazione qualunque fra le $\sigma + 1$ variabili di specie σ: $x, y, \dots, v$ si ha identicamente (¹).

$$\Omega_{x,y,..,v} . \varphi\,(D_{xx}, \dots, D_{vv};\ D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, ..) = \varphi\,(D_{xx}+1, \dots, D_{vv}+1;\ D_{xy}, D_{yx}, D_{xz}, ..)\,\Omega_{x,y,..,v}.$$

39. Se $\varphi\,(a_x, a_y, \dots, b_x, b_y, \dots\dots)$ è un aggregato razionale ed intero degli rr' elementi lineari che si possono formare con r serie di variabili (di specie $r-1$): $x, y, \dots, v$ ed r' serie di coefficienti $a, b, \dots, e, g, l, \dots$ si ha identicamente:

$$\Omega_{x,y,..,v} . \varphi = \Sigma\left\{(ab\dots e)\left(\frac{\partial}{\partial a_x}\frac{\partial}{\partial b_y}\dots\frac{\partial}{\partial e_v}\right)\varphi\right\} \tag{9}$$

dove la somma deve estendersi a tutte le combinazioni degli r' coefficienti r ad r.

Infatti, in virtù della relazione (8) fra H ed Ω, la formola (5) dell'articolo 35 può anhe scriversi

$$(xy\dots v)\,\Omega_{x,y,..,v} . \varphi = \Sigma\left\{(a_x b_y \dots e_v)\left(\frac{\partial}{\partial a_x}\frac{\partial}{\partial b_y}\dots\frac{\partial}{\partial e_v}\right)\varphi\right\}$$

e dividendo per $(x\,y, \dots v)$ entrambi i membri si ottiene precisamente la formola (9).

40. Per ottenere espressioni più semplici si suol sostituire all'operazione $\Omega_{x,y,\dots,v}$ l'operazione $\frac{1}{n_1 n_2 \dots n_{\sigma+1}}\Omega_{x,y,..,v}$ in cui $n_1, \dots, n_{\sigma+1}$ sono risp. i gradi della funzione *su cui si opera* nelle $x, y, \dots, v$. Se indichiamo con $\Omega^0_{x,y,\dots,v}$ l'operazione così modificata, per $f = a_x^{n_1}\, b_y^{n_2} \dots e_v^{n_{\sigma+1}}$ si ha semplicemente:

(¹) Cfr. Gordan. Math. Ann. Bd. III. Clebsch. Théorie der bin alg. Formen § 6. etc.

$$\Omega^0_{x,y,..,v}\ f = (ab\dots e)\ a_x^{n_1-1}\, b_y^{n_2-1} \dots e_v^{n_{\sigma+1}-1}$$

$$\left(\Omega^0_{x,y,..,v}\right)^2 f = (ab\dots e)^2 a_x^{n_1-2}\, b_y^{n_1-2} \dots e_v^{n_{\sigma+1}-2}$$

$$\left(\Omega_{x,y,..,v}\right)^3 f = (ab\dots e)^3 a_x^{n_1-3}\, b_y^{n_1-3} \dots e_v^{n_{\sigma+1}-3}$$

. . . .

41. Le potenze dell'operazione $H_{x,y,\dots,v}$ non si comportano in modo analogo a quello dell'operazione $\Omega_{x,y,\dots,v}$. Ciò riuscirà chiaro dopochè avremo determinato la forma del risultato dell'operazione $H_{x,y,\dots,v}$ eseguita sopra un composto di coefficienti (o simboli) e di variabili del tipo:

$$(\alpha_x \beta_y \dots \varepsilon_v)\, a_x^{\mu_1} b_y^{\mu_2} \dots e_v^{\mu_r}\,.$$

Consideriamo dapprima il caso di tre sole variabili x, y, z. Operando innanzi tutto col termine principale del determinante $(D_{x\xi}\, D_{y\eta}\, D_{z\zeta})$ troviamo:

$$D_{x\xi}\, D_{y\eta}\, D_{z\zeta} \left\{ (\alpha_x \beta_y \gamma_z)\, a_x^{\mu_1} b_y^{\mu_2} c_z^{\mu_3} \right\} = a_x^{\mu_1-1} b_y^{\mu_2-1} c_z^{\mu_3-1}$$

$$\left\{\begin{array}{c} \mu_1\mu_2\mu_3 \,.\, (\alpha_x \beta_y \gamma_z)\, a_\xi b_\eta c_\zeta \\ + \mu_1\mu_2 \,.\, (\alpha_x \beta_y \gamma_\zeta)\, a_\xi b_\eta c_z + \mu_2\mu_3 \,.\, (\alpha_\xi \beta_y \gamma_z)\, a_x b_\eta c_\zeta + \mu_3\mu_1 \,.\, (\alpha_x \beta_\eta \gamma_z)\, a_\xi b_y c_\zeta \\ + \mu_1 \,.\, (\alpha_x \beta_\eta \gamma_\zeta)\, a_\xi b_y c_z + \mu_2 \,.\, (\alpha_\xi \beta_y \gamma_\zeta)\, a_x b_\eta c_z + \mu_3 (\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_z)\, a_x b_y c_\zeta \\ + (\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta)\, a_x b_y c_z \end{array}\right\}$$

Eseguendo le 6 permutazioni fra le ξ, η, ζ e sommando col segno $+$ o $-$ secondochè la permutazione contiene un numero pari o dispari di inversioni otteniamo

$$(D_{x\xi}\, D_{y\eta}\, D_{z\zeta}) \left\{ (\alpha_x \beta_y \gamma_z)\, a_x^{\mu_1} b_y^{\mu_2} c_z^{\mu_3} \right\} = a_x^{\mu_1-1} b_y^{\mu_2-1} c_z^{\mu_3-1}$$

$$\left\{\begin{array}{c} + \mu_1\mu_2\mu_3 \,.\, (\alpha_x \beta_y \gamma_z)(a_\xi b_\eta c_\zeta) \\ + \mu_1\mu_2 .(\alpha_\xi \beta_y \gamma_z)(a_\xi b_\eta)\, c_z + \mu_2\mu_3 .(\alpha_\zeta \beta_y \gamma_z)(b_\eta c_\zeta)\, a_x + \mu_3\mu_1 (\alpha_x \beta_\eta \gamma_z)(a_\xi c_\zeta)\, b_y \\ + 1.2 \left\{ \mu_1 (\alpha_x \beta_\eta \gamma_\zeta)\, a_\xi b_y c_z + \mu_2 (\alpha_\xi \beta_y \gamma_\zeta)\, a_x b_\eta c_z + \mu_3 (\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_z)\, a_x b_y c_\zeta \right\} \\ + 1.2.3 \,.\, (\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta)\, a_x b_y c_z \end{array}\right\}$$

più dei termini che si annullano quando in luogo di ξ, η, ζ si rimette risp. x, y, z. Quindi operando ancora sui due membri di questa eguaglianza con $D_{x\xi}\, D_{y\eta}\, D_{z\zeta}$:

$$H_{x,y,z} \left\{ (\alpha_x \beta_y \gamma_z)\, a_x^{\mu_1} b_y^{\mu_2} c_z^{\mu_3} \right\} = a_x^{\mu_1-1} b_y^{\mu_2-1} c_z^{\mu_3-1}$$

$$= (\alpha_x \beta_y \gamma_z) \left\{\begin{array}{c} \mu_1\mu_2\mu_3 \,.\, (a_x b_y c_z) \\ + \mu_1\mu_2 \,.\, (a_x b_y)\, c_z + \mu_2\mu_3 \,.\, (b_y c_z)\, a_x + \mu_3\mu_1 \,.\, (a_x c_z)\, b_y \\ + 1.2 \left[\mu_1 \,.\, a_x b_y c_z + \mu_2 \,.\, b_y a_x c_z + \mu_3 \,.\, c_z a_x b_y \right] \\ + 1.2.3 \,.\, a_x b_y c_z \end{array}\right\}$$

il che, ponendo simbolicamente $1 \,.\, 2 \ldots k = \theta^k$, è anche:

$$= (\alpha_x \beta_y \gamma_z) \begin{vmatrix} (\mu_1+\theta).a_x & \mu_2.b_x & \mu_3.c_x \\ \mu_1.a_y & (\mu_2+\theta).b_y & \mu_3.c_y \\ \mu_1.a_z & \mu_2.b_z & (\mu_3+\theta).c_z \end{vmatrix} a_x^{\mu_1-1} b_y^{\mu_2-1} c_z^{\mu_3-1}$$

$$= \mu_1 \mu_2 \mu_3 . (\alpha_x \beta_y \gamma_z) \begin{vmatrix} \left(1+\frac{\theta}{\mu_1}\right) a_x & b_x & c_x \\ a_y & \left(1+\frac{\theta}{\mu_2}\right) b_y & c_y \\ a_z & b_z & \left(1+\frac{\theta}{\mu_3}\right) c_2 \end{vmatrix} a_x^{\mu_1-1} b_y^{\mu_2-1} c_z^{\mu_3-1}$$

Similmente si troverebbe:

$$\mathrm{H}_{x,y,z,t} . \left\{ (\alpha_x \beta_y \gamma_z \delta_t)\, a_x^{\mu_1} b_y^{\mu_2} c_z^{\mu_3} d_t^{\mu_4} \right\} =$$

$$= \mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 . (\alpha_x \beta_y \gamma_z \delta_t) \begin{vmatrix} \left(1+\frac{\theta}{\mu_1}\right) a_x & b_x & c_x & d_x \\ a_y & \left(1+\frac{\theta}{\mu_2}\right) b_y & c_y & d_y \\ a_z & b_z & \left(1+\frac{\theta}{\mu_3}\right) c_2 & d_z \\ a_t & b_t & c_t & \left(1+\frac{\theta}{\mu_4} d_t\right) \end{vmatrix} a_x^{\mu_1-1} b_y^{\mu_2-1} c_z^{\mu_3-1} d_t^{\mu_4-1}$$

e così via.

42. Se supponiamo in particolare che le $\alpha, \beta, \ldots,$ coincidano colle $a, b, \ldots,$ e confrontiamo colla formola (4) dell'art. 33, concludiamo:

$$(\mathrm{H}_{x,y})^2 \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \right\} = n_1 (n_1-1)\, n_2 (n_2-1) . (a_x b_y) \begin{vmatrix} \left(1+\frac{\theta}{n_1-1}\right) a_x & b_x \\ a_y & \left(1+\frac{\theta}{n_2-1}\right) b_y \end{vmatrix} a_x^{n_1-2} b_y^{n_2-2}$$

$$= (n_1-1)(n_2-1) . (a_x b_y) \left\{ (n_1 n_2 + n_1 + n_2 + 2)\, a_x^{n_1-1} b_y^{n_2-1} - n_1 n_2\, a_x^{n_1-1} a_y b_y^{n_2-1} b_x \right\}$$

$$\frac{1}{n_1 (n_1-1)\, n_2 (n_2-1)\, n_3 (n_3-1)} . (\mathrm{H}_{x,y,z})^2 . \left\{ a_x^{n_1} b_y^{m_2} c_z^{n_3} \right\} =$$

$$= (a_x b_y c_z \begin{vmatrix} \left(1+\frac{\theta}{n_1-1}\right) a_x & b_x & c_x \\ a_y & \left(1+\frac{\theta}{n_2-1}\right) b_y & c_y \\ a_z & b_z & \left(1+\frac{\theta}{n_3-1}\right) \end{vmatrix} a_x^{n_1-2} b_y^{n_2-2} c_z^{n_3-2}$$

ecc. ecc.

43. Se $\mathrm{H}_{x,y,\ldots v} = \varphi(\mathrm{D}_{xx}, \ldots \mathrm{D}_{vv}; \mathrm{D}_{xy}, \mathrm{D}_{yx}, \mathrm{D}_{xz}, \ldots)$ e poniamo per $i = 1, 2, 3 \ldots$ $\varphi(\mathrm{D}_{xx-i}, \mathrm{D}_{yy-i}, \ldots \mathrm{D}_{vv-i}; \mathrm{D}_{xy}, \mathrm{D}_{yx}, \mathrm{D}_{xz}, \ldots) = \mathrm{H}^{(i)}_{x,y,\ldots v}$ si ha identicamente:

$$(a_x b_y \ldots e_v)^k\, a_x^{n_1-k} b_y^{n_2-k} \ldots e_v^{n_r-k} = \rho . \mathrm{H}^{(k-1)}_{x,y,\ldots v} \ldots \mathrm{H}'_{x,y,\ldots,} \mathrm{H}_{x,y,\ldots,v} \left\{ a_x^{n_1} b_y^{n_2} \ldots e_v^{n_r} \right\}$$

dove

$$\rho = \frac{\underline{|n_1 - k}}{\underline{|n_1}} \cdot \frac{\underline{|n_2 - k}}{\underline{|n_2}} \cdots \frac{\underline{|n_r - k}}{\underline{|n_r}}$$

Basterà dimostrare che, se la formola è vera per un certo valore di k, essa è del pari vero quando in luogo di k si ponga $k+1$. Ora si ha appunto

$$(a_x\, b_y, \dots e_v)^{k+1}\, a_x^{n_1-k-1}\, b_y^{n_2-k-1} \dots e^{n_r-k-1}$$

$$= a_x\, b_y \dots e_v)^k \cdot \frac{1}{(n_1-k)\,(n_2-k)\dots(n_r-k)}\, \mathrm{H}_{x,y,\dots,v} \left\{ a_x^{n_1-k+1}\, b_y^{n_2-k} \dots e_v^{n_r-k} \right\}$$

$$= \frac{1}{(n_1-k)\,(n_2-k)\dots(n_r-k}\cdot \mathrm{H}^{(k)}_{x,y,\dots,v} \left\{ a_x\, b_y \dots e_v)^k\, a_x^{n_1-k}\, b_y^{n_2-k} \dots e^{n_r-k} \right\}$$

cfr. Art. 58.

§ IV. *Delle funzioni che possono derivarsi da funzioni di un minor numero di serie di variabili.*

44. Sia $f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & & n_r \\ x, & y, & \dots, & v \end{pmatrix}$ la funzione generale di r serie di variabili di specie σ, ritenuto (cfr. art. 19): $r \gtreqless \sigma + 1$. Essa ammette (art. 27) $\mathrm{N} = [n_1, \dots, n_r;\, n_1, \dots, n_r]$ derivate ad essa omogenee e fra loro linearmente indipendenti che potremo indicare con:

(1) $$f_1, f_2, \dots \quad , f_{\mathrm{N}}$$

e delle quali una può ritenersi essere la stessa f. Essa ammette inoltre delle derivate non omogenee a se stessa, le quali cioè non contengono le $x, y, \dots, v$ ai gradi $n_1, n_1, \dots, n_r$ risp. oppure contengono nuove variabili indipendenti dalle $x, y, \dots, v$. Fra queste ci importa di considerare tutte quelle che contengono un numero minore di variabili, cioè al più σ variabili, e che designeremo in generale colla lettera Φ. Poichè le derivate di una Φ sono evidentemente anche derivate di f, esisterà per ogni forma Φ un numero illimitato di operazioni Δ tali che $\Delta\Phi$ sia una funzione che contenga le sole variabili $x, y, \dots, v$ e precisamente alli stessi gradi $n_1, n_2, \dots, n_r$ che le medesime si trovano avere in f, cioè tali che sia, per certi valori delle costanti $\alpha_1, \alpha_2, \dots,$

$$\Delta\Phi = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \dots + \alpha_{\mathrm{N}} f_{\mathrm{N}}$$

Ora noi ci proponiamo di rispondere alle questioni seguenti:

Qual'è il numero delle funzioni linearmente indipendenti $\varphi\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & & n_r \\ x, & y, & \dots, & v \end{pmatrix}$ derivabili da $f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & & n_r \\ x, & y, & \dots, & v \end{pmatrix}$ e rappresentabili sotto la forma $\Delta_1 \Phi_1 + \Delta_2 \Phi_2 + \Delta_3 \Phi_3 + \dots,$ dove le Φ sono derivate di f che contengono $r-1$ serie di variabili?

Come si può costruire il sistema delle φ?

Per brevità di locuzione noi chiameremo le Φ derivate di f che *contengono* un minor numero di variabili, e le φ derivate omogenee ad f che *dipendono* da un minor numero di variabili. Noi indicheremo il numero cercato con N' e dimostreremo che

$$\mathrm{N}' = [n_1, \dots, n_r;\, n_1, \dots, n_r] - [n_1 - 1, \dots, n_r - 1;\, n_1 - 1, \dots, n_r - 1]$$

45. Se le $\eta, \zeta, \ldots$, sono $r-1$ serie di variabili distinte fra loro, ma non necessariamente tutte distinte dalle $x, y, \ldots v$, esiste sempre (art. 28) un'operazione Δ per cui si ha identicamente

$$\Phi(\eta, \zeta, \ldots, \omega) = \Delta . \Phi(y, z, \ldots, v),$$

quindi le forme cercate $\varphi\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & & n_r \\ x, & y, & \ldots, & v \end{pmatrix}$ sono tutte comprese nel tipo più semplice

$$\sum \Delta . \Phi(y, z, \ldots, v) \tag{2}$$

46. Quanto alle forme Φ, che possono per supposto derivarsi da f con operazioni fra le $x, y, \ldots, v$, il loro tipo generale sarà (art. 6):

$$\Phi(y, z, \ldots, v) = \sum \Delta' . D_{yx}^{\nu_1} D_{zx}^{\nu_2} \ldots D_{vx}^{\nu_{r-1}} D_{xy}^{\mu_1} D_{xz}^{\mu_2} \ldots D_{xv}^{\mu_{r-1}} f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & & n_r \\ x, & y, & \ldots, & v \end{pmatrix} \text{ dove}$$

le Δ' si compongono di operazioni fra le sole $y, z, \ldots, v$. Eguagliando il grado di x nei due membri abbiamo per gli esponenti μ, ν la condizione

$$n_1 + \Sigma\nu - \Sigma\mu = 0$$

a cui possiamo aggiungere $\Sigma\,\mu \overline{\gtrless} n_1$ poichè per $\Sigma\mu > n_1$ si ha evidentemente

$$D_{xy}^{\mu_1} D_{xz}^{\mu_2} \ldots D_{xv}^{\mu_{r-1}} . f\begin{pmatrix} n_1 \\ x, \ldots \end{pmatrix} = 0$$

Perchè $\Sigma\nu$ è essenzialmente positivo ad $n_1 - \Sigma\mu$ è $\overline{\gtrless} 0$ la condizione

$$\Sigma\nu + (n_1 - \Sigma\mu) = 0$$

non potrà soddisfarsi che prendendo $\Sigma\,\nu = 1$ e $\Sigma\,\mu = n_1$. Pertanto il tipo più generale delle funzioni Φ sarà:

$$\Phi(y, z \ldots, v) = \sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots=n_1} \Delta'_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{r-1}} D_{xy}^{\mu_1} D_{xz}^{\mu_2} \ldots D_{xv}^{\mu_{r-1}} . f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & & n_r \\ x, & y, & \ldots, & v \end{pmatrix} \tag{3}$$

dove le Δ' sono operazioni fra le sole $y, z, \ldots, v$. Confrontando colla (2) avremo come tipo generale delle φ:

$$\varphi\begin{pmatrix} n_1 & & n_r \\ x, & \ldots, & v \end{pmatrix} = \sum_{\mu_1+\mu_2+\ldots=n_1} \Delta_{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_{r-1}} D_{xy}^{\mu_1} D_{xz}^{\mu_2} \ldots D_{xv}^{\mu_{r-1}} f\begin{pmatrix} n_1 & & nr \\ x, & \ldots, & v \end{pmatrix} \tag{4}$$

dove le Δ sono operazioni fra le $x, y, \ldots, v$ (che contengono le x solamente nei secondi indici delle operazioni elementari).

47. Poichè le funzioni (1) sono tutte derivabili con operazioni dalla fondamentale f possiamo porre in generale

$$f_i = \Delta_i . f$$

cosicchè se $\Delta . f$ è una qualunque delle derivate omogenee di f, potranno sempre determinarsi le costanti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ in modo da avere identicamente

$$\Delta f = \left\{ \alpha_1 \Delta_1 + \ldots \alpha_N \Delta_N \right\} f \tag{5}$$

A scanso di equivoci avvertiamo espressamente che intenderemo tutte le operazioni $\Delta, \Delta_1, \Delta_2, \ldots$ composte, come sempre è lecito supporre, con sole operazioni elementari proprie, diguisachè se $\alpha, \beta, \ldots;, \varepsilon$ sono serie di coefficienti arbitrari si avrà identicamente:

$$\Delta . (\alpha_x \beta_y \ldots \varepsilon_v) = 0, \qquad \Delta_1 (\alpha_x \beta_y \ldots \varepsilon_v) = 0, \text{ etc.} \tag{6}$$

Ciò posto poniamo nella identità (5), (che sussiste per ogni funzione f di grado $n_1, n_2, \ldots n_r$ risp. nelle $x, y, \ldots, v$),

$$f = (\alpha_x \beta_y \ldots \varepsilon_v) f' \begin{pmatrix} n_1-1 & n_2-1 & & n_r-1 \\ x, & y, & \ldots, & v \end{pmatrix}$$

dove f' è la funzione generale di grado $n_1 - 1$, $n_2 - 1, \ldots$ risp. nelle $x, y, \ldots$; avremo:

$$\Delta \left\{ (\alpha_x \ldots \varepsilon_v) f' \right\} = \left\{ \alpha_1 \Delta_1 + \ldots + \alpha_N \Delta_N \right\} . \left\{ (\alpha_x \ldots \varepsilon_v) f' \right\}$$

ossia in virtù delle (6):

$$(\alpha_x \ldots \varepsilon_v) . \Delta f' = (\alpha_x \ldots \varepsilon_v) . \left\{ \alpha_1 \Delta_1 + \ldots + \alpha_N \Delta_N \right\} f'$$

e dividendo per $(\alpha_x \ldots \varepsilon_v)$:

$$\Delta f' = \left\{ \alpha_1 \Delta_1 + \ldots + \alpha_N \Delta_N \right\} f'$$

Poichè ora $\Delta f'$ può rappresentare evidentemente una qualunque delle derivate omogenee di f' concludiamo che

$$\left\{ \alpha_1 \Delta_1 + \ldots + \alpha_N \Delta_N \right\} . f'$$

è anche il tipo più generale di una derivata omogenea di f'. Ma la f' non ammette che $[n_1 - 1, \ldots, n_r - 1;\ n_1 - 1, \ldots, n_r - 1]$ derivate omogenee fra loro linearmente indipendenti (art. 27) che indicheremo con $\Delta'_1 f'$, $\Delta' f', \ldots, \Delta'_{N_1} f'$, per mezzo delle quali potranno esprimersi linearmente le $\Delta_1 f', \ldots, \Delta_N f'$. Se dunque immaginiamo di sostituire in luogo delle $\Delta_i . f'$ le loro espressioni nelle $\Delta'_i . f'$ avremo identicamente

$$\left\{ \alpha_1 \Delta_1 + \ldots + \alpha_N \Delta_N \right\} f' = \left\{ A_1 \Delta_1 + \ldots + A_{N_1} \Delta_{N_1} \right\} f'$$

dove le A sono combinazioni *lineari* delle $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$. Quindi i sistemi di valori delle $\alpha_1, \ldots . \alpha_N$ per i quali sia identicamente

$$\left\{ \alpha_1 \Delta_1 + \ldots + \alpha_N \Delta_N \right\} f' = 0$$

debbono soddisfare alle N_1 operazioni lineari

$$A_1 = 0,\ A_2 = 0, \ldots, A_{N_1} = 0$$

le quali sono fra loro *indipendenti* poichè se si potessero determinare dei numeri $\mu_1, \mu_2, \ldots$ tali da avere identicamente

$$\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \ldots + \mu_{N_1} A_{N_1} = 0$$

la funzione

$$\left\{ A_1 \Delta'_1 + \ldots + A_{N_1} \Delta'_{N_1} \right\} f'$$

si potrebbe ridurre a dipendere da sole $N_1 - 1$ costanti arbitrarie, epperò non sarebbe più il tipo generale di una derivata omogenea di f', contrariamente a ciò che si è sopra stabilito.

Concludiamo pertanto che se $f\binom{n_1 \quad n_r}{x, \ldots, v}$ ed $f'\binom{n_1 - 1 \quad n_r - 1}{x, \ldots, v}$ sono le funzioni generali dei gradi indicati, il numero delle forme linearmente indipendenti $\Delta . f$ omogenee ad f e tali che $\Delta f'$ sia identicamente nullo è dato da:

$$[n_1, \ldots, n_r;\ n_1, \ldots, n_r] - [n_1 - 1, \ldots, n_r - 1;\ n_1 - 1, \ldots, n_r - 1]$$

48. Sia ora $\varphi = \Delta f$ una delle derivate omogenee di f che dipendono da $r-1$ variabili; per l'art. 46 potremo pure identicamente

$$\Delta . f = \sum \Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_{r-1}} D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_{r-1}} . f$$

donde, ponendo come nell'art. prec., $f = (\alpha_x \ldots \varepsilon_v) . f'$:

$$\Delta . f' = \sum \Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_{r-1}} D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_{r-1}} f'$$

ossia

$$\Delta f' = 0$$

giacchè per $\mu_1 + \ldots . + \mu_{r-1} = n_1$ si ha evidentemente

$$D_{xy}^{\mu_1} \ldots . D_{xv}^{\mu_{r-1}} . f \begin{pmatrix} n_1-1 \\ x, \ldots \end{pmatrix} = 0$$

Le forme φ sono dunque comprese fra quelle considerate nell'art. prec. il cui numero era $N - N_1$, onde il numero cercato

$$N' \gtreqless [n_1, \ldots, n_r;\ n_1, \ldots, n_r] - [n_1 - 1, \ldots, n_r - 1;\ n_1 - 1, \ldots, n_r - 1]$$

49. Si imaginino costruite come negli art. 14 — 17 e 24, 25 le N operazioni monomie che eseguite sopra $f \begin{pmatrix} n_1 & & n_r \\ x, & \ldots, & v \end{pmatrix}$ danno le N derivate indipendenti. Una qualunque di queste operazioni è della forma

$$D_{xy}^{\alpha_{12}} D_{xz}^{\alpha_{13}} \ldots D_{xv}^{\alpha_{1r}} . D_{yx}^{\alpha_{21}} D_{yz}^{\alpha_{23}} \ldots D_{yv}^{\alpha_{2r}} \ldots . . \tag{7}$$

essendo gli esponenti assoggettati alle condizioni

$$\begin{matrix} \alpha_{11} + \ldots + \alpha_{1r} = n_1 & \qquad \alpha_{11} + \ldots + \alpha_{r1} = n_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{r1} + \ldots + \alpha_{rr} = n_r & \qquad \alpha_{1r} + \ldots + \alpha_{rr} = n_r \end{matrix} \tag{8}$$

Se indichiamo risp. con $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ i gradi di derivazione della operazione (7) rispetto alle variabili $x, y, \ldots, v$ essi sono dati da

$$\alpha_1 = \alpha_{11} + \alpha_{13} + \ldots + \alpha_{1r}$$
$$\alpha_2 = \alpha_{21} + \alpha_{23} + \ldots + \alpha_{2r}$$
$$\alpha_r = \alpha_{r1} + \alpha_{r2} + \ldots + \alpha_{r,r-1}$$

Negli art. 17 e 26 si è dimostrato che in ciascuna delle operazioni monomie (6) si possono far succedere le operazioni elementari in quell'ordine di moltiplicazione che più piace, chè sempre si avranno in complesso N operazioni indipendenti. Ora di tale arbitrarietà noi approfitteremo come segue. Consideriamo fra le N operazioni (7) tutte quelle nelle quali si abbia, *almeno per un valore di* i, $\alpha_i = n_i$ ed eseguiamo in esse per prime quelle operazioni elementari che corrispondono agli esponenti $\alpha_{i1}, \ldots, \alpha_{i,i-1}, \alpha_{i,i+1}, \ldots, \alpha_{ir}$, lasciamo quindi seguire le altre operazioni elementari in un ordine qualsivoglia. L'operazione sarà allora della forma

$$\Delta . D_{px}^{\alpha_{i1}} D_{py}^{\alpha_{i2}} \ldots D_{pv}^{\alpha_{ir}}$$

dove p è una variabile che si trova in f al grado n_i. Siccome per supposto

$$\alpha_{i1} + \ldots + \alpha_{i,i-1} + \alpha_{i,i+1} + \ldots + \alpha_{ir} = n_i$$

la forma

$$D_{px}^{\alpha_{i1}} D_{py}^{\alpha_{i2}} \ldots D_{pv}^{\alpha_{ir}} . f$$

non conterrà più la variabile p, ossia apparterrà alle derivate del tipo Φ considerate nell'art. 44, e per conseguenza la forma

$$\Delta . D_{px}^{\alpha_{i1}} D_{py}^{\alpha_{i2}} \dots D_{pv}^{\alpha_{ir}} . f$$

sarà una derivata omogenea ad f del tipo φ. Concludiamo che esistono almeno tante forme linearmente indipendenti del tipo φ, quanti sono i sistemi distinti di soluzioni delle (8) nei quali si ha, *almeno per un valore di* i, $\alpha_i = n_i$. Ora il numero di tali sistemi è appunto

$$[n_1, \dots, n_r;\ n_1, \dots, n_r] - [n_1 - 1, \dots, n_r - 1;\ n_1 - 1, \dots, n_r - 1]$$

poichè i sistemi di soluzioni per cui si avesse

$$\alpha_1 < n_1, \alpha_2 < n_2, \dots \qquad , \alpha_r < n_r,$$

altro non sono che i sistemi distinti di soluzioni delle equazioni:

$$\begin{array}{ll} \alpha_{11} + \dots + \alpha_{1\nu} = n_1 - 1 & \alpha_{11} + \dots + \alpha_{r_1} = n_1 - 1 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{r_1} + \dots + \alpha_{rr} = n_r - 1 & \alpha_{1r} + \dots + \alpha_{rr} = n_r - 1 \end{array}$$

il cui numero è $[n_1 - 1, \dots, n_r - 1; n_1 - 1, \dots, n_r - 1]$. Dunque il numero cercato

$$N' \geqq [n_1, \dots, n_r; n_1, \dots, n_r] - [n_1 - 1, \dots, n_r - 1; n_1 - 1, \dots, n_r - 1],$$

ma nell'art. prec. si era trovato che

$$N' \leqq [n_1, \dots, n_r; n_1, \dots, n_r] - [n_1 - 1, \dots, n_r - 1; n_1 - 1, \dots, n_r - 1]$$

quindi

$$N' = [n_1, \dots, n_r; n_1, \dots, n_r] - [n_1 - 1, \dots, n_r - 1; n_1 - 1, \dots, n_r - 1]$$

c. d. d.

50. Così abbiamo nello stesso tempo determinato il numero delle forme φ ed un egual numero di operazioni monomie per mezzo delle quali esse possono derivarsi da f.

Si prenda per dare un esempio la funzione generale $f\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x, & y, & z \end{pmatrix}$ di tre serie di variabili ternarie ($\sigma = 2$); si ha in tal caso

$$[n_1, n_2, n_3;\ n_1, n_2, n_3] = [2, 2, 2;\ 2, 2, 2] = 21$$

$$[n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1;\ n_1 - 1, n_2 - 1, n_3 - 1] = [1, 1, 1; 1, 1, 1] = 6$$

Le 21 operazioni che eseguite su f danno le 21 derivate omogenee ad f si ottengono del tipo comune:

$$D_{zx}^{\alpha_{31}} D_{zy}^{\alpha_{32}} D_{yx}^{\alpha_{21}} D_{yz}^{\alpha_{23}} D_{xy}^{\alpha_{12}} D_{xz}^{\alpha_{13}}$$

dando ai 6 esponenti $\alpha_{31}, \alpha_{32}, \dots$ successivamente i seguenti 21 sistemi di valori:

0, 0, 0, 0, 0, 0	1, 0, 0, 1, 0, 0	0, 1, 1, 0, 0, 1
0, 1, 0, 1, 0, 0	1, 0, 0, 0, 0, 1	0, 0, 1, 0, 1, 0
1, 0, 1, 0, 1, 1	0, 1, 1, 1, 1, 0	1, 1, 0, 1, 0, 1
0, 0, 2, 0, 2, 0	0, 2, 0, 2, 0, 0	2, 0, 0, 0, 0, 2
0, 1, 2, 0, 1 1	1, 1, 0, 2, 1, 0	2, 0, 0, 1, 1, 1
1, 0, 1, 1, 2 0	0, 2, 1, 1, 0 1	1, 1, 1, 0, 0, 2
2, 0, 0, 2, 2, 0	1, 1, 1, 1, 1, 1	0, 2, 2, 0, 0, 2

Le 6 operazioni che corrispondono ai 6 sistemi scritti nella prima e nella seconda linea hanno ciascuno dei tre gradi di derivazione ($\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) minore di 2 e sono

quindi da escludersi. In ciascuna delle 15 rimanenti almeno uno dei tre numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ è uguale a 2; e precisamente ve ne ha uno solo nei tre sistemi della 3ª linea, ve ne hanno due in ciascuno dei 9 sistemi contenuti nella 4ª, 5ª, e 6ª linea, e finalmente si hanno i tre sistemi dell'ultima linea nei quali ciascuno dei numeri $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ è uguale a 2.

In complesso vi sono 10 sistemi in cui $\alpha_1 = \alpha_{12} + \alpha_{13} = 2$, e quindi altrettante operazioni nelle quali non occorrerà fare alcuna inversione di fattori, e che applicate ad f ci daranno altrettante forme φ. Tali forme sono:

$$D^2_{yx} \,.\, D^2_{xy} f \qquad D_{zx} D_{yx} \,.\, D_{xy} D_{xz} f, \qquad D^2_{zx} \,.\, D^2_{xz} f.$$

$$(a) \qquad D_{zx} D_{yx} D_{yz} \,.\, D^2_{xy} f, \qquad D_{zy} D^2_{yx} \,.\, D_{xy} D_{xz} f, \qquad D_{zx} D_{zy} D_{yx} \,.\, D^2_{xz} f,$$

$$D^2_{zx} D^2_{yz} \,.\, D^2_{xy} f. \qquad D^2_{zx} D_{yz} \,.\, D_{xy} D_{xz} f, \qquad D^2_{zy} D^2_{yx} \,.\, D^2_{xz} f,$$

$$D_{zx} D_{zy} D_{yx} D_{yz} \,.\, D_{xy} D_{xz} f$$

Delle 5 operazioni rimanenti 4 hanno il grado di derivazione $\alpha_2 = \alpha_{21} + \alpha_{23} = 2$. Esse sono:

$$D_{zy} \,.\, D_{yx} D_{yz} \,.\, D_{xy}, \qquad D^2_{zy} \,.\, D_{yx} D_{yz} \,.\, D_{xz}$$

$$D^2_{zy} \,.\, D^2_{yz} \qquad , \qquad D_{zy} D_{zx} \,.\, D^2_{yz} \,.\, D_{xy}$$

e fatte le debite inversioni di fattori ci daranno altre 4 forme:

$$(b) \qquad D_{zy} D_{xy} \,.\, D_{yx} D_{yz} f, \qquad D^2_{zy} D_{xz} \,.\, D_{yx} D_{yz} f$$

$$D^2_{zy} \,.\, D^2_{yz} f, \qquad D_{zx} D_{zy} D_{xy} \,.\, D^2_{yz} f$$

Finalmente resta l'operazione

$$D_{zx} D_{zy} \,.\, D_{yz} D_{xz}$$

in cui $\alpha_3 = \alpha_{31} + \alpha_{32} = 2$, che ci dà la forma:

$$(c) \qquad D_{yz} D_{xz} \,.\, D_{zx} D_{zy} f$$

L'insieme delle forme (a), (b) (c) ci dà le 15 forme φ cercate.

51. Vediamo, nell'esempio ora considerato, come le 15 forme φ possano rappresentarsi sotto le forme $\Sigma\, \Delta\, \Phi$ dove Φ è una derivata di f che contiene le sole y, z, e precisamente (vedi le formole (3)) sotto la forma $\Delta_1 \Phi_1 + \Delta_2 \Phi_2 + \Delta_3 \Phi_3$ dove, per $f = a_x^2\, b_y^2\, c_z^2$,

$$\Phi_1 = \tfrac{1}{2}\, D^2_{xy} f = a^2_y\, b^2_y\, c^2_z$$

$$(9) \qquad \Phi_2 = \tfrac{1}{2}\, D_{xy} D_{xz} f = a_y\, a_z\, b^2_y\, c^2_z$$

$$\Phi_3 = \tfrac{1}{2}\, D^2_{xz} f = a^2_z\, b^2_y\, c^2_z$$

Ponendo ciò nelle (a) esse prendono senz'altro la forma:

$$(\alpha')\quad \begin{array}{lll} 2.D^2_{yx}.\Phi_1 & 2.D_{zx}\,D_{yx}.\Phi_2 & 2.D^2_{zx}.\Phi_3 \\ 2.D_{zx}\,D_{yx}\,D_{yz}.\Phi_1 & 2.D_{zy}\,D^2_{yx}.\Phi_2 & 2.D_{zx}\,D_{zy}\,D_{yx}.\Phi_3 \\ 2.D^2_{zx}\,D^2_{yz}\,\Phi_1 & 2\;D^2_{zx}\,D_{yz}\,\Phi_2 & 2.D^2_{zy}\,D^2_{yx}.\Phi_3 \\ & D_{zx}\,D_{zy}\,D_{yx}\,D_{yz}.\Phi_2 & \end{array}$$

Quanto alle (b) osserviamo che:

$$D_{yx}\,D_{yz}\,f = 2.a^2_x\,b_v\,b_z\,c^2_z = \tfrac{1}{3}.D^3_{yx}\left\{a^2_z\,b_y\,b_z\,c^2_z\right\}$$

$$D^2_{yz}\,f = 2.a^2_x\,b^2_z\,c^2_z = D^2_{xy}\left\{a^2_y\,b^2_z\,c^2_z\right\}$$

$$D_{zx}\,D_{zy}\,f = 2.a^2_x\,b\,c_x\,c_y = \tfrac{1}{3}.\left\{a^2_z\,b^2_y\,c_z\,c_y\right\}$$

cosicchè se poniamo:

$$(10)\qquad a^2_y\,b_y\,b_z\,c^2_z = \Phi_4,\qquad a^2_y\,b^2_z\,c^2_z = \Phi_5,\qquad a^2_z\,b^2_y\,c_z\,c_y = \Phi_6$$

le (b) e (c) prendono la forma

$$\begin{array}{lll} \tfrac{1}{3}D_{zy}\,D_{xy}\,D^3_{yx}.\Phi_4, & D^2_{zy}\,D^2_{xy}.\Phi_5, & \tfrac{1}{3}D_{yz}\,D_{xz}\,D^3_{zx}.\Phi_6 \\ \tfrac{1}{3}D^2_{zy}\,D_{xz}\,D^3_{yx}.\Phi_4, & D_{zx}\,D_{zy}\,D_{xy}\,D^2_{yx}\,\Phi_5, & \end{array}$$

e anche, fatta astrazione da semplici fattori numerici,

$$(\beta)\quad \begin{array}{lll} D_{zy}\,D^2_{yx}.\Phi_4, & D^2_{zy}\,D^2_{yx}.\Phi_5 & D_{yz}\,D^2_{zx}.\Phi_6 \\ D^2_{zy}\,D^2_{yx}\,D_{yz}.\Phi_4, & D_{zx}\,D_{zy}\,D_{yx}.\Phi_5, & \end{array}$$

Resta ora ad esprimere le Φ_4, Φ_5, Φ_6 come derivate delle Φ_1, Φ_2, Φ_3. Ora si ha:

$$(11)\qquad D_{yz}\,\Phi_1 = 2.a_y\,a_z\,b^2_y\,c^2_z + 2.a^2_y\,b_y\,b_z\,c^2_z = 2\,\Phi_2 + 2\,\Phi_4$$

onde

$$\Phi_4 = \tfrac{1}{2}\,D_{yz}\,\Phi_1 - \Phi_2$$

Dalla (11) si cava inoltre:

$$D^2_{yz}.\Phi_1 = 2.D_{yz}\,\Phi_2 + 4.a_y\,a_z\,b_y\,b_z\,c^2_z + 2.a^2_y\,b^2_z\,c^2_z$$

$$= 2.D_{yz}\,\Phi_2 + 4.a_y\,a_z\,b_y\,b_z\,c^2_z + 2.\Phi_5$$

e poichè per le (9)

$$2.a_y\,a_z\,b_y\,b_z\,c^2_z = D_{yz}\,\Phi_2 - \Phi_3$$

sostituendo:

$$D^2_{yz}.\Phi_1 = 4.D_{yz}\,\Phi_2 - 2.\Phi_3 + 2.\Phi_5$$

onde:

$$\Phi_5 = \tfrac{1}{2}D^2_{yz}\,\Phi_1 - 2\,D_{yz}\,\Phi_2 + \Phi_3$$

Finalmente si ha dalle (7):

$$D_{zy}\,\Phi_3 = 2\,.\,a_z\,b_y^2\,c_z^2 + 2\,.\,a_z^2\,b_y^2\,c_z\,c_y = 2\,.\,\Phi_2 + 2\,.\,\Phi_6$$

onde:

$$\Phi_6 = \tfrac{1}{2}\,D_{zy}\,\Phi_3 - \Phi_2$$

Sostituendo nelle (β) le espressioni trovate per Φ_4, Φ_5, Φ_6, otteniamo le 5 funzioni seguenti

$$(\alpha')\quad\begin{array}{l}
\tfrac{1}{2}\,D_{zy}\,D_{yx}^2\,D_{yz}\,\Phi_1 - D_{zy}\,D_{yx}^2\,.\,\Phi_2 \\
\tfrac{1}{2}\,D_{zy}^2\,D_{yx}^2\,D_{yz}^2\,\Phi_1 - D_{zy}^2\,D_{yx}^2\,D_{yz}\,.\,\Phi_2 \\
\tfrac{1}{2}\,D_{zy}^2\,D_{yx}^2\,D_{yz}^2\,\Phi_1 - 2\,.\,D_{zy}^2\,D_{yx}^2\,D_{yz}\,.\,\Phi_2 + D_{zy}^2\,D_{yx}^2\,.\,\Phi_3 \\
\tfrac{1}{2}\,D_{zx}\,D_{zy}\,D_{yx}\,D_{yz}^2\,.\,\Phi_1 - 2\,.\,D_{zx}\,D_{zy}\,D_{yx}\,D_{yz}\,.\,\Phi_2 + D_{zx}\,D_{zy}\,D_{yx}\,.\,\Phi_3
\end{array}$$

$$D_{yz}^2\,D_{zx}^2\,\Phi_2 - \tfrac{1}{2}\,D_{yz}\,D_{zx}^2\,D_{zy}\,\Phi_3$$

L'insieme delle (α) e delle (α') ci dà le 15 forme φ sotto la forma voluta. Evidentemente le (α') si potranno esprimere per mezzo delle 10 forme (α) e di altre 5 forme *monomie* di uno dei tre tipi $\Delta\Phi_1$, $\Delta\Phi_2$, $\Delta\Phi_3$, cosicchè il sistema può esser rappresentato da 15 forme monomie della natura delle (α), sulla quale ulteriore riduzione stimiamo superfluo l'intrattenerci.

52. Ogni derivata della funzione generale $f\begin{pmatrix}n_1 & n_2 & & n_r\\ x, & y, & .., & v\end{pmatrix} = a_x^{n_1}\,b_y^{n_2}\ldots e_v^{n_r}$ omogenea ad essa nelle variabili $x, y, .., v$ si può esprimere come una combinazione lineare di derivate φ che dipendono da un minor numero di variabili e di derivate che ammettono il fattore simbolico $a_x\,b_y\,e_v$.

Infatti, dopo aver separato dalle N operazioni

$$D_{xy}^{\alpha_{12}}\,D_{xz}^{\alpha_{13}}\ldots D_{xv}^{\alpha_{1r}}\,.\,D_{yx}^{\alpha_{21}}\,D_{yz}^{\alpha_{23}}\ldots D_{yv}^{\alpha_{2r}}\ldots\ldots$$

dell'art. 46 (che applicate ad f forniscono le N derivate omogenee) quelle N' operazioni che scritte in un ordine opportuno ci davano le derivate che dipendono da un minor numero di variabili, non restano che operazioni i cui gradi di derivazione $\alpha_1, ., \alpha_r$ rispetto alle $x_1, .., x_r$ soddisfano alle condizioni

$$\alpha_1 < n_1,\ \alpha_2 < n_2, .., \ \alpha_r < n_r$$

Se imaginiamo di eseguire tali operazioni sul composto simbolico $a_x^{n_1}\,b_y^{n_2}\ldots e_v^{n_r}$ è evidente che in ogni termine del risultato si presenterà *almeno una volta* ciascuno degli r elementi lineari $a_x, b_y, .., e_v$, poichè rispetto alle x si sarà derivato *al più* $n_1 - 1$ volte, rispetto alle y *al più* $n_2 - 1$ volte ecc. Il risultato sarà dunque della forma

$$a_x\,b_y\ldots e_v\,.\,M$$

dove M è un composto simbolico derivabile da $a_x^{n_1-1}\,b_y^{n_2-1}\ldots e_v^{n_r-1}$ c. d. d.

Applicando all'esempio sviluppato negli art. prec. vediamo che ogni derivata omogenea della funzione $f\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ x, & y, & v \end{pmatrix} = a_x^2\, b_y^2\, c_z^2$ può mettersi sotto la forma

$$\Delta_1\, \Phi_1 + \Delta_2\, \Phi_2 + \Delta_3\, \Phi_3 + a_x\, b_y\, c_z .\, M$$

dove $\Phi_1 = a_y^2\, b_y^2\, c_z^2$, $\Phi_2 = a_y\, a_z\, b_y^2\, c_z^2$, $\Phi_3 = a_z^2\, b_y^2\, c_z^2$ ed M è un composto simbolico derivabile da $a_x\, b_y\, c_z$. È facile vedere quale sia l'espressione analoga per una forma qualunque $f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_r \\ x, & y, .. & v \end{pmatrix}$

53. Le funzioni di più serie di variabili $x, y, .., v$ che possono farsi dipendere da un minor numero di variabili sono annullate identicamente dall'operazione $H_{x,\, y\, ,\, ..,\, v}$ (¹)

Infatti se $\varphi\ (x, y, .., v)$ può mettersi sotto la forma:

$$\Delta_1\, \Phi_1\, (y\, , .., v) + \Delta_2\, \Phi_2\, (y\, , .., v) + \ldots$$

si ha identicamente:

$$H_{x, y, .., v}\, \varphi = \Delta_1\, H_{x, y, .., v}\, \Phi_1\, (y, .., v) + \Delta_2\, H_{x, y, .., v}\, \Phi_2\, (y, .., v) + \ldots$$

poichè l'operazione H è permutabile (art. 36) con le operazioni $\Delta_1, \Delta_2, \ldots$ che si riferiscono alle stesse variabili $x, y, .., v$. Ora per l'art. 31 (formola 3) si ha:

$$H_{x, y, .. v}\, \Phi_j = D_{\xi x}\, D_{\eta y} \ldots D_{\omega v}\, (D_{x\xi}\, D_{y\eta}\, , .., D_{v\omega}) .\, \Phi_j = 0$$

poichè Φ_j non contiene x e quindi è annullata dalle operazioni $D_{x\xi}, D_{y\eta}, \ldots, D_{x\omega}$. Si ha dunque

$$H_{x, y, .., v} \, . \, \varphi = o$$

c. d. d.

54. Applichiamo queste proprietà alla dimostrazione del teorema seguente che contiene come caso particolare quello dell'art. 52. Se la funzione generale $f\begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_r \\ x, & y, .., & v \end{pmatrix}$ fra variabili di specie $\sigma \gtreqless r - 1$ si rappresenti simbolicamente con $a_x^{n_1}\, b_y^{n_2} .. e_v^{n_r}$ ed $\alpha, \beta, .., \varepsilon$ siano li stessi simboli $a, b, .., v$ scritti in un ordine qualunque, un composto simbolico del tipo

$$\alpha_x\, \beta_y \ldots \varepsilon_v .\, M$$

dove M è derivabile da $a_x^{n_1 - 1}\, b_y^{n_2 - 1} \ldots e_v^{n_r - 1}$ rappresenta una funzione che non può farsi dipendere da un minor numero di variabili.

Sia infatti $M = F\ (\alpha_x, \alpha_y\, , .., \beta_x, \beta_y\, , \ldots)$ e supponiamo, se è possibile, che si abbia identicamente

$$\alpha_x\, \beta_y \ldots \varepsilon_v\, F\, (\alpha_x, \alpha_y, .., \beta_x, \beta_y, \ldots .) = \sum \Delta .\, \Phi\, (y, .., v)$$

Operando sui due membri con $H_{x, y, \ldots, v}$ ne deduciamo (art. 53):

$$H_{x, y, \ldots, v} \left\{ \alpha_x\, \beta_y \ldots \varepsilon_v .\, F\, (\alpha_x, \alpha_y, \ldots, \beta_x, \beta_y, \ldots) \right\} = 0$$

(¹) La proposizione reciproca: ogni funzione $\varphi\ (x, y, .., v)$ che sia annullato identicamente dell'operazione $Hx, y, .., v$ può farsi dipendere da un minor numero di variabili è un corollario immediato di una formola che daremo in seguito (art. 55).

ossia ponendo per H la sua espressione data dalla formola 6 dell'art. 35 e dividendo per $(\alpha_x \beta_y \dots \varepsilon_v)$:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \frac{\partial}{\partial \beta_y} \dots \frac{\partial}{\partial \varepsilon_v}\right) \alpha_x \beta_y \dots \varepsilon_v . \mathrm{F} \left(\alpha_x, \alpha_y, \dots, \beta_x \beta_y, \dots\dots,\right) \Big\} = 0$$

e tale identità dovrà in particolare sussistere quando gli r^2 elementi lineari $\alpha_x, \dots, \alpha_v, \dots, \varepsilon_x, \dots, \varepsilon_v$ si considerino come altrettante variabili indipendenti (art. 19), bastando a tale scopo di supporre le $\alpha, \beta, \dots, \varepsilon$ reali ed arbitrarie.

Imaginando ora sviluppato il primo membro e cancellati i termini che si annullano per effetto della derivazione indichiamo con m_1 la potenza più bassa a cui si trova elevato l'elemento α_x, con m_2 la potenza più bassa di β_y in tutti quei termini che contengono α_x alla potenza m_1, con m_3 la più bassa potenza di γ_2 in tutti quei termini che contengono a_x e b_y risp. alle potenze m_1, m_2 e così via; è chiaro che l'insieme di tutti i termini $\alpha_x^{m_1} \beta_y^{m_2} \gamma_z^{m_3} \dots \varepsilon_v^{m_r} \dots\dots$ dovrà annullarsi separatamente. Ora l'insieme dei termini che contengono α_x alla potenza m_1 dovendosi cercare nella parte del primo membro data da

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \left(\frac{\partial}{\partial \beta_y} \frac{\partial}{\partial \gamma_z} \dots \frac{\partial}{\partial \varepsilon_v}\right) \Big\{ \alpha_x \beta_y \dots \varepsilon_v . \mathrm{F} \Big\}$$

l'insieme dei termini $\alpha_x^{m_1} \beta_y^{m_2} \dots\dots$ dovrà cercarsi in

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \frac{\partial}{\partial \beta_y} \left(\frac{\partial}{\partial \gamma_z} \dots \frac{\partial}{\partial \varepsilon_v}\right) \Big\{ \alpha_x \beta_y \dots \varepsilon_v . \mathrm{F} \Big\}$$

etc. etc. e finalmente l'insieme dei termini $\alpha_x^{m_1} \beta_y^{m_2} \dots \varepsilon_v^{m_r} \dots\dots$ in

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_x} \frac{\partial}{\partial \beta_y} \dots \frac{\partial}{\partial \varepsilon_v} \Big\{ \alpha_x \beta_y \dots \varepsilon_v . \mathrm{F} \Big\}$$

quindi dovrà essere identicamente

$$(m_1 + 1)\ (m_2 + 1) \dots (m_r + 1) . [\mathrm{F}] = 0$$

dove [F] è l'insieme di tutti i termini di F del tipo $\alpha_x^{m_1} \beta_y^{m_2} \dots \varepsilon_v^{m_r} \dots\dots$ Ora ciò non può ammettersi quando i termini distinti di F, che sono fra loro linearmente indipendenti (art. 25) siano affetti da coefficienti tutti diversi da zero, come deve supporsi. (¹)

(¹) Del teorema dimostrato può dedursi come corollario che, qualunque sia la serie degli esponenti $\alpha_{11}\ \alpha_{12}, \dots$ in una forma monomia con r variabili.

$$a_x^{\alpha_{11}}\ a_y^{\alpha_{12}} \dots a_v^{\alpha_{1r}}\ b_x^{\alpha_{21}}\ b_y^{\alpha_{22}} \dots, b_v^{\alpha_{2r}} \dots\dots\dots,$$

(che può sempre derivarsi da $a_x^{n_1}\ b_y^{n_2} \dots\ e_v^{n_r}$) essa non potrà mai farsi dipendere da un minor numero di variabili poichè può dimostrarsi che essa ammette necessariamente come fattore *almeno uno* dei $\underline{|r}$ prodotti $\alpha_x \beta_y \dots \varepsilon_v$. (Vedi la nota *Sopra un problema di partizione etc.* Giornale di Matematiche. Tomo XIX.)

§ V. *Sviluppo di una funzione di più serie di variabili secondo le derivaie di funzioni di un minor numero di variabili* [1].

55. Sia $f\left(\overset{n}{x}, \overset{n_1}{y}, \overset{n_2}{z}, \ldots, \overset{n_r}{v}\right)$ la funzione generale di $r+1$ variabili di specie σ, che rappresenteremo simbolicamente con $a_x^n\, b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \ldots e_v^{n_r}$. Se $\mu_1, \ldots, \mu_r$ sono r numeri interi e positivi (anche nulli) tali che $\mu_1 + \ldots \mu_r = n$ e designamo con $\Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_r}$ la derivata di f non contenente x definita da

$$\Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_r} \frac{1}{1.2\ldots n} . D_{xy}^{\mu_1}\, D_{xz}^{\mu_2} \ldots D_{xv}^{\mu_r} = a_y^{\mu_1}\, a_z^{\mu_2} \ldots a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1}\, c_z^{n_1} \ldots c_v^{n_r}$$

asseriamo potersi sempre determinare dalle operazioni $\Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_r}$ e una derivata di f del tipo $(a_x\, b_y \ldots e_v)$. M tali da avere identicamente:

$$(1) \qquad a_x^n\, b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \ldots e_v^{n_r} = \left\{ \Sigma\, \Delta_{\mu_1,\ldots\mu_r}\, \Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_r} \right\} + (a_x\, b_y \ldots e_v)\, M$$

o che è lo stesso:

$$(2) \qquad f = \left\{ \Sigma\, \Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_r}\, \Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_r} \right\} + \Delta . H_{x,y,\ldots,v} . f$$

poichè essendo M un composto simbolico derivabile da $a_x^{n-1}\, b_y^{n_1-1}\, c_z^{n_2-1} \ldots e_v^{n_r-1}$ si potrà sempre porre (art. 26)

$$\frac{1}{n . n_1 \ldots n_r} M = \Delta \left\{ a_x^{n-1} \ldots e_v^{n_r-1} \right\}$$

dove Δ è una certa operazione propria fra le $x, y, .., v$ e quindi anche:

$$\begin{aligned}(a_x\, b_y \ldots e_z)\, M &= n \ldots n_r\, (a_x\, b_y \ldots e_v)\, \Delta \left\{ a_x^{n-1} \ldots e^{n_r-1} \right\} \\ &= n \ldots n_r\, \Delta \left\{ (a_x b_y \ldots e_v)\, a_x^{n-1} \ldots e_v^{n_r-1} \right\} \\ &= \Delta . H_{x,y,\ldots,v} \left\{ a_x^n \ldots e_v^{n_r} \right\} = \Delta . H_{x,y,\ldots,v}\, f \qquad \text{(art. 33).}\end{aligned}$$

In virtù della permutabilità di H (art. 36) la (2) può anche scriversi:

$$(2') \qquad f = \left\{ \Sigma\, \Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_r}\, \Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_r} \right\} + H_{x,y,\ldots,v}\, \Delta . f$$

Se le variabili $x, y, \ldots$ sono di specie r, $(\sigma = r)$, si ha:

$$(a_x\, b_y \ldots e_v) = (x\, y \ldots v)\, (a\, b \ldots e)$$

quindi

$$\begin{aligned}(a_x\, b_y \ldots e_v)\, M &= (x\, y \ldots v) . \Delta \left\{ n\, n_1 \ldots n_r\, (a\, b \ldots e)\, a_x^{n-1}\, b_y^{n_1-1} \ldots e_v^{n_r-1} \right\} \\ &= (x\, y \ldots v)\, \Delta \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \ldots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \right) f = (x\, y \ldots v)\, \Omega . f \qquad \text{(art. 33, 37)}\end{aligned}$$

[1] Per variabili binarie cfr. Gordan Math. Ann. Bd. III. Per variabili ternarie cfr. Giornale di Matematiche M. c.

onde in quest'ipotesi speciale la (2) può anche scriversi:

$$f = \left\{ \Sigma\, \Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_r}\, \Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_r} \right\} + (x\, y \ldots v)\, \Delta\, \Omega . f \text{ (}^1\text{)}$$

56. La formola (2) si può considerare come un caso particolare della formola più generale

$$(4) \qquad f_i = \left\{ \Sigma\, \overset{(i)}{\Delta}_{\mu_1,\ldots,\mu_r}\, \Phi_{\mu_1,\ldots,\mu_r} \right\} + \overset{(i)}{\Delta} . \mathrm{H}_{x,y,\ldots,v} . f$$

dove

$$f_i \left(\overset{n}{x}, \overset{n_1}{y}, \ldots, \overset{n_r}{v} \right) = \Sigma\, \mathrm{A} \,.\, a_x^{\alpha_{11}}\, a_y^{\alpha_{12}} \ldots a_v^{\alpha_{1,r+1}}\, b_x^{\alpha_{21}}\, b_y^{\alpha_{22}} \ldots\ldots$$

è una qualunque delle derivate omogenee di f, cioè come il caso che si avrebbe prendendo per f_i la stessa f. Del resto quest'ultima formola non è che una conseguenza della (2). Sia infatti $f_i = \Delta_i . f$ (art. 26). Operando sui due membri della identità (2) con l'operazione Δ_i deduciamo

$$f_i = \left\{ \Sigma\, \Delta_i\, \Delta_{\mu_1,\ldots,\mu_r} . \mathrm{Q}_{\mu_1,\ldots,\mu_r} \right\} + \Delta_i . \Delta . \mathrm{H}_{x,y,\ldots,v} . f$$

onde per soddisfare alla (4) basterà prendere

$$\overset{(i)}{\Delta}_{\mu_1,\ldots,\mu_r} = \Delta_i\, \Delta_{\ \ 1,\ldots,\mu_r} \quad , \qquad \overset{(i)}{\Delta} = \Delta_i . \Delta .$$

57. Pertanto possiamo proporci addirittura di dimostrare la formola (4). Ora lo scrivere questa formola equivale a dire che il sistema della $\mathrm{N} = [n_1\, n_1, \ldots, n_r; n, n_1, \ldots, n_r]$ derivate omogenee di f fra loro linearmente indipendenti (art. 27) può essere rappresentato dal sistema complessivo delle $\mathrm{N}_1 = [n-1, n_1 - 1, \ldots, n_r - 1; n-1, n_1 - 1, \ldots, n_r - 1]$ derivate indipendenti del tipo

$$(a_x\, b_y \ldots e_v) . \Delta \left\{ a_x^{n-1}\, b^{n_1 - 1} \ldots e_v^{n_r - 1} \right\}$$

e delle N' derivate indipendenti che dipendono da un minor numero di variabili (art. 46). Ora il numero di quest'ultime era dato appunto da $\mathrm{N} - \mathrm{N}_1$ (art. 49), onde $\mathrm{N}' + \mathrm{N}_1 = \mathrm{N}$ ed il sistema complessivo conterrà appunto N forme che saranno fra loro lin. indipendenti e per conseguenza equivaleranno al sistema delle f_i, ove ancora si dimostri che fra forme dei due tipi non può aver luogo alcuna relazione lineare, che cioè non può essere identicamente

$$(5) \qquad \left\{ \Sigma\, \Delta\, \Phi \right\} + (a_x\, b_y \ldots e_v)\, \mathrm{M} = 0$$

senza che sia separatamente

$$\Sigma\, \Delta\, \Phi = 0, \quad (a_x\, b_y \ldots e_v)\, \mathrm{M} = 0$$

Ed invero se operiamo sulla supposta identità (5) con $\mathrm{H}_{x,y,\ldots,v}$ e ricordiamo (art. 53) che

$$\mathrm{H}_{x,y,\ldots,v} . \left\{ \Sigma\, \Delta\, \Phi \right\} = 0$$

ne deduciamo:

$$(6) \qquad \mathrm{H}_{x,y,\ldots,v} \left\{ (a_x\, b_y \ldots e_v)\, \mathrm{M} \right\} = 0$$

(1) Per $r = 1$ cfr. Clebsch, *Theorie der bin.* etc. § 7.

Il tipo più generale di M è

$$M = \alpha_1 f'_1 + \alpha_2 f'_2 + \dots + \alpha_{N_1} f'_{N_1}$$

dove le f'_i sono le N_1 derivate indipendenti di $f' = a_x^{n-1} b_y^{n_1-1} \dots e_v^{n_r-1}$ e ad essa omogenee. Vediamo se si possono determinare le costanti α in modo da soddisfare alla identità (6). È chiaro (cfr. art. 41) che sviluppandone il primo membro si troverà:

$$H_{x,y,\dots v} \left\{ (a_x b_y \dots e_v)(\alpha_1 f'_1 + \alpha_2 f'_2 + \dots + \alpha_{N_1} f'_{N_1}) \right\}$$
$$= (a_x b_y \dots e_v) \left\{ A_1 f'_1 + A_2 f'_2 + \dots A_{N_1} f'_{N_1} \right\}$$

dove le A sono combinazioni lineari ed omogenee delle $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1}$. Le $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_1}$ devono dunque soddisfare ad altrettante equazioni lineari ed omogenee:

$$(7) \qquad A_1 = 0,\ A_2 = 0,\ A_2, \dots, A_{N_1} = 0$$

epperò $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots \alpha_{N_1} = 0$. Si ha dunque $(a_x b_y \dots e_v)\, M = 0$ c. d. d.

58. La dimostrazione ora data non si può tuttavia ritenere come *assolutamente* rigorosa se non quando si sia accertato che le N_1 equazioni (7) sono fra loro indipendenti. Ciò torna a dire che le due funzioni $(a_x b_y \dots e_v)(\alpha_1 f'_1 + \dots + \alpha_{N_1} f'_{N_1})$ ed $H_{x,y,\dots,v} \left\{ (a_x b_y \dots e_v)(\alpha_1 f'_1 + \dots + \alpha_{N_1} f'_{N_1}) \right\}$ godono dello stesso grado di generalità, cioè rappresentano entrambe, al variare delle α, le stesse N_1 forme linearmente indipendenti. Tale accertamento può bensì farsi direttamente per valori non troppo grandi di N_1, ma non si può tentare una dimostrazione generale senza incorrere in gravi complicazioni di calcolo. Pertanto noi ammetteremo per ora come dimostrata l'indipendenza delle (7) e passeremo a dedurre dalla formola (2) le conseguenze più importanti, riservandoci di tornare in questo stesso § sulla dimostrazione data, per farla dipendere dalla dimostrazione di formole più semplici, sia per il numero delle variabili $x, y \dots$ come per i valori dei gradi $n, n_1, \dots$

59. Essendo $a, b, c, \dots$ serie di coefficienti arbitrari, abbiamo in virtù della formola (2) le seguenti identità:

$$a_x^n b_y^{n_1} \dots e_v^{n_r} = \Sigma_0 \Delta'_{\mu_1,\dots,\mu_r} a_y^{\mu_1} \dots a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1} c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r} + \Delta^0 (a_x b_y \dots e)\, a_x^{n-1} b_y^{n_1-1} \dots e_v^{n_r-1}$$

$$a_x^{n-1} b_y^{n_1-1} \dots e_v^{n_r-1} = \Sigma_1 \Delta'_{\mu_1,\dots,\mu_r} a_y^{\mu_1} \dots a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1} c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r} + \Delta' (a_x b_y \dots e_v)\, a_x^{n-2} b_y^{n_1-2} \dots e_v^{n_r-2}$$

$$a_x^{n-2} b_y^{n_1-2} \dots e_v^{n_r-2} = \Sigma_2 \Delta'_{\mu_1,\dots,\mu_r} a_y^{\mu_1} \dots a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1} c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r} + \Delta'' (a_x b_y \dots e_v)\, a_x^{n-3} b_y^{n_1-3} \dots e_v^{n_r-3}$$

dove Σ_i significa che la somma deve estendersi a tutti quei sistemi di valori delle $\mu_1, \dots, \mu_r$ che soddisfano alla relazione:

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r = n - i$$

e dove le $\Delta^0, \Delta', \Delta'', \dots$ al pari che le $\Delta_{\mu_1,\dots,\mu_r}$, $(\mu_1 + \dots + \mu_r = n - i)$, sono certe operazioni proprie fra le $x, y, \dots, v$.

Sostituendo nella prima identità in luogo di $a_x^{n-1} b_y^{n_1-1} \dots e_v^{n_r-1}$ la sua espres-

sione data dalla seconda identità otteniamo:

$$a_x^n b_y^{n_1} \dots e_v^{nr} = \Sigma_0 \Delta'_{\mu_1,..,\mu_r} . a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1} c_z^{n_2} \dots e_v^{nr} +$$

$$+ (a_x b_y \dots e_v) \Sigma_1 \Delta^0 . \Delta'_{\mu_1,..\mu_r} . a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1-1} c_z^{n_2-1} \dots e_v^{n_r-1}$$

$$+ (a_x b_y \dots e_v)^2 . \Delta^0 \Delta' . a_x^{n-2} b_v^{n-2} \dots e_v^{n_r-2}$$

Sostituendo similmente in luogo di $a_x^{n-2} b_y^{n_1-2} \dots e_v^{n_r-2}$ la sua espressione data della terza identità etc. otterremo uno sviluppo della forma seguente

$$a_x^n b_y^{n_1} \dots e_v^{nr} = \Sigma_0 \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} . a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1} c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r}$$

$$+ (a_x b_y \dots e_v) \Sigma_1 \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} . a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1-1} c_z^{n_2-1} \dots e_v^{n_r-1}$$

$$+ (a_x b_y \dots e_v)^2 \Sigma_2 \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} . a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1-2} c_z^{n_2-2} \dots e_v^{n_r-2}$$

$$\dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

$$+ \Delta . (a_x b_y \dots e_v)^{k+1} a_x^{n-k-1} b_y^{n_1-k-1} \dots e_v^{n_r-k-1}$$

dove il massimo valore da darsi a k è quello del più piccolo fra i numeri $n, n_1, \dots, n_r$. Quando lo sviluppo si protrae fino a questo valore massimo di k il termine complementario

$$\Delta . (a_x b_y \dots e_v)^{k+1} . a_x^{n-k-1} b_y^{n_1-k-1} \dots e_v^{n_r-k-1}$$

deve tralasciarsi come privo di senso, ed allora lo sviluppo può compendiarsi nella forma seguente

$$(8) \quad a_x^n b_y^{n_1} \dots e_v^{n_r} = \sum_{\mu+\mu_1+..+\mu_r=n} (a_x b_y \dots e_v)^{\mu} . \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} . a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} b_y^{n_1-\mu} c_z^{n_2-\mu} \dots e_v^{n_r-\mu}$$

coll'avvertenza di trascurare quei termini della somma che corrispondono a valori di μ superiori al più piccolo dei numeri $n, n_1, \dots, n_r$.

Essendo le $\Delta_{\mu_1,\dots\mu_r}$ operazioni proprie fra le $x, y, \dots, v$, questa formola può anche scriversi (¹)

$$(9) \; a_x^n b_y^{n_1} \dots e_v^{n_r} = \sum_{\mu+\mu_1+..+\mu_r=n} \Delta_{\mu_1,\dots\mu_r} \left\{ (a_x b_y \dots e_v)^{\mu} a_y^{\mu_1} \dots e_v^{\mu_r} . b_y^{n_1-\mu} c_z^{n_2-\mu} \dots e_v^{n_r-\mu} \right\}$$

Dunque: se una funzione qualunque fra r serie di variabili di specie qualunque si rappresenta simbolicamente con $a_x^n b_y^{n_1} c_z^{n_2} \dots e_v^{nr}$ e si pone

$$(10) \qquad (a_x b_y \dots e)^{\mu} a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1-\mu} c_v^{n_2-\mu} = \Phi^{(\mu)}_{\mu_1,..,\mu_r}$$

si possono sempre determinare delle operazioni $\Delta_{\mu_1,..,\mu_r}$ fra le variabili per le quali si abbia identicamente

$$(11) \qquad f = \Sigma \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} . \Phi^{(\mu)}_{\mu_1,..,\mu_r}$$

(¹) Per $\nu = 1$ si cade nel noto sviluppo: $a_x^m b_y^n = \Sigma k_\mu . D_{yx}^{m-\mu} . (a_x b_y)^{\mu} . a_y^{m-\mu} b_y^{n-\mu}$ dove le k_μ sono costanti numeriche. Per la loro determinazione vedi Clebsch. l. c. § 8.

dove la somma deve estendersi a quei sistemi di valori delle $\mu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ per i quali $\mu + \mu_1 + \ldots \mu_r = n$.

60. Per mezzo delle operazioni $H_{x, y, \ldots v}$ si può comporre facilmente (art. 43) un'operazione che eseguita su $a_x^n\, b_x^{n_1} \ldots e_v^{n_r}$ la trasforma in $(a_x\, b_y \ldots e_v)^\mu\, a_x^{n-\mu}\, b_y^{n_1-\mu} \ldots e_v^{nr-\mu}$; se indichiamo quest'operazione con $\Delta^{(\mu)}$ si ha:

$$\Phi^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_r} = (a_x\, b_y \ldots e_v)^\mu . a_y^{\mu_1} \ldots a_v^{\mu_r} . b_v^{n_1-\mu}\, c_z^{n_2-\mu} \ldots e_v^{n_r-\mu}$$

$$= \frac{1}{\lfloor n-\mu}. D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_r} . \left\{ (a_x\, b_y \ldots e_v)^\mu\, a_x^{n-\mu}\, b_y^{n_1-\mu}\, c_z^{n_2-\mu} \ldots e_v^{n_r-\mu} \right\}$$

$$= \frac{1}{\lfloor n-\mu} . D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_r} . \Delta^{(\mu)} . f$$

e la (11) prende la forma

$$f = \Sigma\, \Delta_{\mu_1, \ldots, \mu_r} . D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_r} . \Delta^{(\mu)} . f \tag{12}$$

61. Finora non si è fatta alcuna supposizione circa la specie delle variabili. Quando $\sigma = r$ si ha:

$$D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_r} \left\{ (a_x\, b_y \ldots e_v)^\mu\, a_x^{n-\mu} \ldots e_v^{n_r-\mu} \right\} = (x\, y \ldots v)^\mu . D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_r} \left\{ (a\, b \ldots e)^\mu\, a_x^{n-\mu} \ldots e_v^{n_r-\mu} \right\}$$

quindi la forma $\Phi^{(\mu)}_{\mu_1, \ldots, \mu_r}$ coincide a meno di un fattore numerico con

$$(x\, y \ldots v)^\mu . D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_r} . \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \cdots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \right)^\mu . f$$

e lo sviluppo prende la forma

$$f = \sum_{\mu+\mu_1+\ldots=n} (x\, y \ldots v)^\mu \Delta_{\mu_1, \ldots, \mu_r}\, D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_r}\, \Omega^\mu . f \tag{13}$$

o anche, per la permutabilità dell'operazione Ω, (art. 38),

$$f = \sum_{\mu+\mu_1+\ldots=n} (x\, y \ldots v)^\mu . \Delta_{\mu_1, \ldots, \mu_r}\, \Omega^\mu . D_{xy}^{\mu_1} \ldots D_{xv}^{\mu_r} . f \tag{14}$$

62. Le diverse forme di sviluppo date dalle (8), (9), (11), (12), (13), (14) sono in sostanza tutte equivalenti. Prendiamo per dare un esempio la funzione $f \begin{pmatrix} 2 & p & q \\ x & y & z \end{pmatrix}$ in cui p e q sono numeri qualunque. La formola (8) ci dice che si possono sempre determinare le operazioni $\Delta_{2,0}$, $\Delta_{1,1}$, $\Delta_{0,2}$, $\Delta_{1,0}$, $\Delta_{0,1}$, Δ_{00} fra le variabili x, y, z tali da avere identicamente:

$$a_x^2\, b_y^p\, c_z^q = \Delta_{2,0} . a_y^2\, b_y^p\, c_z^q + \Delta_{1,1} . a_y\, a_z\, b_y^p\, c_z^q + \Delta_{2,2} . a_z^2\, b_y^p\, c_z^q$$

$$+ (a_x\, b_y\, c_z) \left\{ \Delta_{1,0} . a_y\, b_y^{p-1}\, c_z^{q-1} + \Delta_{0,1} . a_z\, b_y^{p-1}\, c_z^{q-1} \right\}$$

$$+ (a_x\, b_y\, c_z)^2 \left\{ \Delta_{00}\, b_y^{p-2}\, c_z^{q-2} \right\}$$

63. Lo sviluppo della funzione generale $a_x^n b_y^{n_1} \dots e_v^{n_r}$ secondo le potenze del determinante $(a_x b_y \dots e_v)$ non può farsi che in un sol modo nel senso che ove fosse,

$$f = \Sigma \Delta_{\mu_1,\dots,\mu_r} \Phi^{(\mu)}_{\mu_1,\dots,\mu_r} = \Sigma \Delta'_{\mu_1,\dots,\mu_r} . \Phi^{(\mu)}_{\mu_1,\dots,\mu_r}$$

dovrebbe essere separatamente

$$\sum_{\mu_1+\dots+\mu_r=n} \Delta_{\mu_1,\dots,\mu_r} . \Phi^{(0)}_{\mu_1,\dots,\mu_r} = \Sigma \Delta'_{\mu_1,\dots,\mu_r} . \Phi^{(0)}_{\mu_1,\dots,\mu_r}$$

$$\sum_{\mu_1+\dots+\mu_r=n-1} \Delta_{\mu_1,\dots,\mu_r} . \Phi'_{\mu_1,\dots,\mu_r} = \Sigma \Delta'_{\mu_1,\dots,\mu_r} . \Phi'_{\mu_1,\dots,\mu_r}$$

$$\sum_{\mu_1+\dots+\mu_r=n-2} \Delta_{\mu_1,\dots,\mu_r} . \Phi''_{\mu_1,\dots,\mu_r} = \Sigma \Delta'_{\mu_1,\dots,\mu_r} . \Phi''_{\mu_1,\dots,\mu_r}$$

. . . .

Ed invero, riportando i due sviluppi alla forma (8), la loro eguaglianza darebbe origine ad una identità della forma seguente

$$\Delta_0 \, a_x^n \dots e_v^{n_r} + (a_x \dots e_v) . \Delta_1 \, a_x^{n-1} \dots e_v^{n_r-1} + (a_x \dots e_v)^2 \, \Delta_2 \, a_x^{n-2} \dots e_v^{n_r-2} + \dots = 0$$

in cui $\Delta_i \, a_x^{n-i} \dots e_v^{n_r-i}$ è una di quelle derivate di $a_x^{n-i} \dots e_v^{n-i}$ che dipendono da un minor numero di variabili. Supponiamo, se è possibile, che questa somma sia nulla senza che lo siano tutti i suoi termini, e sia in generale, $(a_x \dots e_v)^k . \Delta_k \, a_x^{n-k} \dots e_v^{n_r-k}$ il primo termine, a partir da sinistra, che non è nullo identicamente, cosicchè l'identità prende la forma

$$(a_x \dots e_v)^k \left\{ \Delta_k \, a_x^{n-k} \dots e_x^{n_r-k} + (a_x \dots e_v) \, \mathrm{M} \right\} = 0$$

dove M è un composto simbolico derivabile di $a_x^{n-k-1} \dots e_v^{n_r-k-1}$ Poichè questa identità ha luogo per ogni funzione $f\begin{pmatrix} n & & n_r \\ x, & \dots, & v \end{pmatrix}$, essa sussisterà in particolare per la funzione $f = a_x^n \dots e_v^{n_r}$ in cui le $a, b, \dots, e$ siano serie di coefficienti arbitrari ma *effettivi*. Dividendo allora per $(a_x \dots e_v)^k$ resta:

$$\Delta_k \, a_x^{n-k} \dots e_v^{n_r-k} + (a_x \dots e_v) \, \mathrm{M} = 0$$

onde dev'essere separatamente (art. 57)

$$\Delta_k \, a_x^{n-k} \dots e_v^{n_r-k} = 0 , \qquad (a_x \dots e_v) \, \mathrm{M} = 0$$

epperò l'espressione $(a_x \dots e_v)^k . \; a_x^{n-k} \dots e_v^{n_r-k}$ è nulla identicamente, il che contraddice al supposto.

64. Se una funzione $f\begin{pmatrix} n & n_1 & & n_\sigma \\ x, & y, & \dots, & v \end{pmatrix}$ di $\sigma + 1$ variabili di specie σ è divisibile

per la k^{esima} potenza del determinante delle variabili $(x\, y \dots v)$, si ha evidentemente

$$D_{xy}^{\mu_1} D_{xz}^{\mu_2} \dots D_{xv}^{\mu_\sigma} . f = \qquad (15)$$

per tutti i sistemi di valori delle μ che soddisfano alla relazione

$$\mu_1 + \mu_2, + \dots + \mu_\sigma = n - k + 1 \qquad (16)$$

Ora noi vogliamo dimostrare che reciprocamente: se una funzione $f\begin{pmatrix} n & n_1 & & n_\sigma \\ x, & y, & \dots, & v \end{pmatrix}$ di $\sigma + 1$ variabili di specie σ è annullata identicamente dalle operazioni del tipo

$$D_{xy}^{\mu_1} D_{xz}^{\mu_2} \dots D_{xv}^{\mu_\sigma}, \qquad (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma = n - k + 1)$$

essa è divisibile esattamente per $(x\, y \dots v)^k$.

Infatti se la (15) è soddisfatta per tutti i sistemi di esponenti μ che verificano la condizione (16) essa lo sarà *à fortiori* per tutti i sistemi di μ tali che

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma \gtreqless n - k + 1$$

Quindi nella formola generale (14):

$$f = \sum_{\mu + \mu_1 + \dots = n} (x\, y \dots v)^\mu . \Delta_{\mu_1, \dots, \mu_r} . \Omega^\mu . D_{xy}^{\mu_1} \dots D_{xv}^{\mu_\sigma} . f$$

si dovrà estendere la somma a quei soli termini pei quali:

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots \mu_\sigma < n - k + 1$$

ossia

$$n - (\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma) > k - 1$$

ossia, poichè $n - (\mu_1 + \dots + \mu_\sigma) = \mu$, a quei soli termini in cui

$$\mu \gtreqless k$$

Poichè ognuno di tali termini è esso stesso divisibile per $(x\, y \dots v)^k$ anche la loro somma, cioè f, sarà divisibile per $(x\, y \dots v)^k$.

Così è dimostrato quanto volevamo. In particolare, per $k = n$, vediamo che:

Affinchè una funzione $f\begin{pmatrix} n & n_1 & & n_r \\ x & y_1, & \dots, & v \end{pmatrix}$ di $\sigma + 1$ variabili di specie σ sia divisibile per $(x\, y \dots v)^n$ è necessario e sufficiente che essa soddisfi identicamente le σ condizioni:

$$D_{xy} f = 0. \quad D_{xz} f = 0, \dots\dots, D_{xv} f = 0$$

65. La funzione $f = a_x^{m_1} b_y^{m_2} \dots e_v^{m_\rho}$ e la sua derivata:

$$f_1 = \begin{vmatrix} \left(1 + \frac{\theta}{m_1}\right) a_x & b_x & . & . & e_x \\ a_y & \left(1 + \frac{\theta}{m_2}\right) b_y & . & . & e_y \\ . & . & . & . & . \\ a_v & b_v & & & \left(1 + \frac{\theta}{m_\rho}\right) e_v \end{vmatrix} . a_x^{m_1 - 1} b_y^{m_2 - 1} \dots e_v^{m_\rho - 1}$$

(dove θ^i è posto simbolicamente in luogo di $1.2 \dots i$) sono equivalenti (art. 26). Basterà dimostrare l'esistenza di un'operazione Δ tale che sia

identicamente $f = \Delta . f_1$ Partiamo dall'identità (art. 55):

$$a_x^{m_1+1}\, b_y^{m_2+1} \dots e_v^{m_\rho+1} = \left\{ \Sigma\, \Delta_i\, \Phi_i \right\} + \Delta \left\{ (a_x\, b_y \dots e_v)\, a_x^{m_1}\, b_y^{m_2} \dots e_v^{m_\rho} \right\};$$

operando su di essa con $H_{x,y,t..,v}$ e ricordando (art. 53) che

$$H_{x,y,..,v} \left\{ \Sigma\, \Delta_i\, \Phi_i \right\} = 0$$

otteniamo

$$H_{x,y,..,v} \left\{ a_x^{m_1+1}\, b_y^{m_2+1} \dots e_v^{m_\rho+1} \right\} = (m_1+1)\,(m_2+1) \dots (m_\rho+1).(a_x\, b_y \dots e_v)\, a_x^{m_1}\, b_y^{m_2} \dots e_v^{m_\rho}$$

$$= \Delta . H_{x,y,..,v} \left\{ a_x\, b_y \dots v)\, a_x^{m_1}\, b_y^{m_2} \dots v_v^{m_\rho} \right\}$$

Considerando, come è sempre lecito, le $a, b, .., v$ come serie di coefficienti arbitrari possiamo dividere i due membri per $(a_x\, b_y \dots e_v)$, con che si ha:

$$a_x^{m_1}\, b_y^{m_2} \dots e_v^{m_\rho} = \frac{1}{(m_1+1)\,(m_2+1)\dots(m_\rho+1)} . \Delta . H_{x,y,..,v} . \left\{ (a_x\, b_y \dots e_v)\, a_x^{m_1}\, b_y^{m_2} \dots e_v^{m_\rho} \right\}$$

ossia (art. 41):

$$a_x^{m_1}\, b_y^{m_2} \dots e_v^{m_\rho} = \frac{m_1 \dots m_\rho}{(m_1+1)\dots(m_\rho+1)} . \Delta . \left\{ \begin{vmatrix} \left(1+\frac{\theta}{m_1}\right) a_x & b_x & .. & e_x \\ a_y & \left(1+\frac{\theta}{m_2}\right) b_y & .. & e_y \\ . & . & .. & . \\ a_v & b_v & .. & \left(1+\frac{\theta}{m_\rho}\right) e_v \end{vmatrix} a_x^{m_1-1} \dots e_v^{m_\rho-1} \right\}$$

c. d. d.

66. Ritornando ora sulla dimostrazione della formola (1) data all'art. 57, notiamo che essa poteva limitarsi fin da principio al caso di $n = 1$, poichè possiamo facilmente far vedere che se una identità come la (1) ha luogo per $n = k$, $(k > 1)$, ne sussiste una simile per $n = k + 1$. Ci è lecito supporre che $a, b, \dots$ esprimano serie di quantità arbitrarie, poichè se la (1) ha luogo identicamente per valori arbitrari delle $a, b, \dots$, essa esprimerà del pari un'identità fra i simboli $a, b, \dots$ ossia sarà vera per la funzione generale $f\left(\overset{n}{x}, \overset{n_1}{y}, \dots, \overset{n_r}{v}\right)$.

Sia dunque:

$$a_x^k\, b_y^{n_1} \dots c_v^{n_r} = \left\{ \sum_{\mu_1+\mu_2+..=k} \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} . a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\} + (a_x\, b_y \dots e_v)\, M.$$

Poichè può sempre ritenersi (art. 6) che le $\Delta_{\mu_1,..,\mu_r}$ non contengano operazioni elementari del tipo D_{xp} si ha:

$$a_x \left\{ \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} . a_y^{\mu_1} .. a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\} = \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} \left\{ a_x\, a_y^{\mu_1} \dots a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\}$$

onde moltiplicando l'identità precedente per a_x:

$$(17) \quad a_x^{k+1}\, b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r} = \left\{ \sum_{\mu_1+..=k} \Delta_{\mu_1,..,\mu_r} . f_{\mu_1,..,\mu_r} \right\} + (a_x\, b_y .. e_v)\, M'$$

dove M′ è una derivata di $a_x^k\, b_y^{n_1-1}\, c_z^{n_2-1} \dots e_v^{n_r-1}$ ed

$$f_{\mu_1,\dots,\mu_r} = a_x\, a_y^{\mu_1} \dots a_v^{\mu_r} . b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r}$$

è una derivata di $a_x^{k+1}\, b_y^{n_1}\, e_z^{n_2} \dots e_v^{n_r}$ che contiene le x al grado 1. Applicando ad $f_{\mu_1,\dots,\mu_r}$ la formola (1), che si suppone dimostrata per le funzioni che contengono x al grado k, avremo:

$$(18) \qquad f_{\mu_1,\dots,\mu_r} = \left\{ \sum_{\nu_1+\dots=k} \Delta'_{\nu_1,\dots,\nu_r} . \Phi_{\nu_1,\dots,\nu_r} \right\} + \Delta . \mathrm{H}_{x,y,\dots,v} . f'_{\mu_1,\dots,\mu_r}$$

dove $\Phi_{\nu_1,\dots,\nu_r}$ è una derivata di $f_{\mu_1,\dots,\mu_r}$ che non contiene affatto le x. Poichè $f_{\mu_1,\dots,\mu_r}$ è una derivata di $a_x^{k+1}\, b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r}$, la $\Phi_{\nu_1,\dots,\nu_r}$ lo sarà del pari, ed il termine $\Delta . \mathrm{H}_{x,y,\dots,v} f_{\mu_1,\dots,\mu_r}$ sarà anche della forma $\Delta . \mathrm{H} . \left\{ a_x^{k+1}\, b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r} \right\}$ ossia della forma $(a_x\, b_y \dots e_v)$ M. Pertanto se sostituiamo nella (17) in luogo delle $f_{\mu_1,\dots,\mu_r}$ le loro espressioni (18), il secondo membro della (17) si comporrà esclusivamente di termini del tipo $(a_x\, b_y \dots e_v)$ M e di termini del tipo $\Delta\, \Phi$ dove Φ è una derivata di $a_x^{k+1}\, b_y^{n_1}\, c_z^{n_2} \dots e_v^{n_r}$ che non contiene le x, c. d. d.

67. A completare la dimostrazione della formola (1) basterà dunque accertare, come nell'art. 57, che non può esistere alcuna funzione razionale intera delle $(r-1)^2$ variabili indipendenti $b_y, b_z, \dots, b_v, \dots, e_y, e_z, \dots, e_v$ per la quale sia identicamente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial a_x} \frac{\partial}{\partial b_y} \dots \frac{\partial}{\partial e_v} \right) \left\{ (a_x\, b_y \dots e_v)\ \mathrm{F}\,(b_y, b_z, \dots, c_y, c_z, \dots) \right\} = 0$$

giacchè appunto in questa operazione si traduce l'equazione

$$\mathrm{H}_{x,y,\dots,v} \left\{ (a_x\, b_y \dots e_v)\ \mathrm{M} \right\} = 0$$

quando M è un composto simbolico derivabile da $b_y^{n_1}\, e_z^{n_2} \dots e_v^{n_r}$, avendosi per l'art. 35 (form. 6):

$$\mathrm{H}_{x,y,\dots,v} . \varphi\,(a_x, a_y, \dots, b_x, b_y, \dots) = (a_x\, b_y \dots e_v) \left(\frac{\partial}{\partial a_x} \frac{\partial}{\partial b_z} \dots \right) . \varphi\,(a_x, a_y, \dots, b_x b_y, \dots).$$

In altri termini, ove si ponga:

$$\begin{array}{lll} a_x = \xi_1\,, & b_x = \xi_2\,, \dots & e_x = \xi_{r+1}\,, \\ a_y = \eta_1\,, & b_y = \eta_2\,, \dots & e_y = \eta_{r+1}\,, \\ \dots & \dots & \dots \\ a_v = \omega_1\,, & b_v = \omega_2\,, \dots & e_v = \omega_{r+1}\,, \end{array}$$

basterà dimostrare che all'identità

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_1} \frac{\partial}{\partial \eta_2} \dots \frac{\partial}{\partial \omega_{r+1}} \right) \left\{ (\xi_1\, \eta_2 \dots \omega_{r+1}) . f\,(\eta, \dots, \omega) \right\}$$

non si può soddisfare con funzioni $f\,(\eta, \dots \omega)$ che non siano identicamente nulle. Di più si potrà ritenere la formola (1) come già dimostrata per la funzione $f\,(\eta \dots \omega)$ che contiene soltanto $r-1$ serie di variabili.

68. Poniamo simbolicamente $f = A_y^{m_1} B_z^{m_2} \dots E_v^{m_r}$ e supponiamo, se è possibile, che sia identicamente:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial y_2}\dots\frac{\partial}{\partial v_{r+1}}\right)\Big\{(x_1\, y_2 \dots v_{r+1})\, f\Big\} = 0$$

Moltiplicando il primo membro per $(x_1\, y_2 \dots v_{r+1})$ esso può scriversi come segue (art.37)

$$H_{x,y,..,v}\Big\{(x_1\, y_2 \dots v_{r+1})\, f\Big\} = 0$$

onde (art. 41)

$$\theta . \begin{vmatrix} \left(1+\frac{\theta}{m_1}\right)A_y & B_y & . \;\; . & E_v \\ A_z & \left(1+\frac{\theta}{m_2}\right)B_2 & . \;\; . & E_v \\ , & . & . \;\; . & . \\ A_v & B_y & . \;\; . & \left(1+\frac{\theta}{m_r}\right)E_v \end{vmatrix} . A_y^{m_1-1} B_z^{m_2-2} \dots E_v^{m_r-1} = 0$$

Per $r = 1$ la funzione $f = A_y^m$ dovrebbe soddisfare alla condizione

$$\theta\left(1+\frac{\theta}{m}\right) A_y^m = \left(1+\frac{2}{m}\right)A_y^m = 0$$

onde evidentemente $f = 0$. Così resta dimostrato lo sviluppo per una funzione a due serie di variabili x, y.

Per $r = 2$ la funzione $f = A_y^m\, B_z^n$ dovrebbe soddisfare identicamente la condizione

$$\theta\left(1+\frac{\theta}{m_1}\right)\left(1+\frac{\theta}{m_2}\right) A_y^m\, B_z^n - A_y^{m-1}\, A_z\, B_z^{n-1}\, B_y = 0$$

ossia

$$\rho . f = D_{yz}\, D_{zy} . f \qquad (19)$$

dove $\rho = 6 + 2m + 3n + mn$.

Di qui per mezzo dell'identità (art. 5)

$$D_{zy}\, D_{yz} . \varphi\begin{pmatrix}\mu & \nu \\ y, & z\end{pmatrix} = D_{yz}\, D_{zy} . \varphi\begin{pmatrix}\mu & \nu \\ y, & z\end{pmatrix} + (\mu - \nu)\, \varphi\begin{pmatrix}\mu & \nu \\ y, & z\end{pmatrix}$$

si deduce, qualunque sia l'intero k,

$$\Big\{\rho + k\,(n-m) - k\,(k+1)\Big\} . D_{zy}^k . f = D_{yz}\, D_{zy}^{k+1} . f \qquad (20)$$

Basterà far vedere che se questa identità ha luogo per $k = h$, essa vale anche per $k = h + 1$. Ora se si ha

$$\Big\{\rho + h\,(n-m) - h\,(h+1)\Big\}\, D_{zy}^h . f = D_{yz}\, D_{zy}^{h+1} . f$$

operando sui due membri con D_{zy} ed applicando la formola citata viene

$$\Big\{\rho + h\,(n-m) - h\,(h+1)\Big\}\, D_{zy}^{h+1} . f = D_{zy}\, D_{yz} . D_{zy}^{h+1} . f$$

$$= D_{yz}\, D_{zy}^{h+2} . f + \Big\{(m+h+1) - (n-h-1)\Big\}\, D_{zy}^{h+1} . f$$

ossia come dovevasi dimostrare:

$$\left\{\rho + (h+1)(n-m) - (h+1)(h+2)\right\} D_{yz}^{h+1} . f = D_{yz} D_{yz}^{h+2} . f$$

È facile riconoscere che il numero

$$\rho + k(n-m) - k(k+1)$$

è positivo e diverso da zero per tutti i valori di k da 0 fino ad n. Ma per $k=n$ si ha evidentemente.

$$D_{zy}^{n+1} f \binom{m \ \ n}{y, z} = 0,$$

quindi la formola (26) ci dà $D_{zy}^{n} . f = 0$, e facendo in essa $k = n - 1$ ci darà similmente $D_{zy}^{n-1} . f = 0$. etc. etc. onde la (19) ci darà finalmente $f = 0$.

Così lo sviluppo (11) resta dimostrato per le funzioni a tre serie di variabili x, y, z, cioè:

$$f(x, y, z) = a_x^n b_y^{n_1} c_z^{n_2} = \sum_{\mu+\mu_1+\mu_2=n} \Delta_{\mu_1,\mu_2} . (a_x b_y c_z)^{\mu} a_y^{\mu_1} a_z^{\mu_2} b_y^{n_1-1} c_z^{n_2-\mu}$$

etc.

§ VI. *Definizione dei covarianti di un sistema di forme a più serie di variabili. Loro proprietà fondamentali ed equazioni differenziali* (¹).

69. Siano $F\binom{m_1 \ \ n_1}{x, y, \ldots}$, $\Phi\binom{m_2 \ \ n_2}{x, y, \ldots}$ funzioni *generali* indipendenti le une dalle altre, ma di gradi *dati* di una o più variabili di specie σ: $x, y, z, \ldots$ Indichiamo con $F'\binom{m_1 \ \ n_1}{x', y', \ldots}$, $\Phi'\binom{m_2 \ \ n_2}{x', y', \ldots}$ i loro valori espressi in funzione di nuove variabili $x', y', \ldots$ legate risp. alle precedenti da una *stessa* sostituzione lineare a coefficienti arbitrari $\alpha, \beta, \ldots$

$$(1) \quad \begin{array}{ll} x_1 = \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots, & y_1 = \alpha_1 y'_1 + \alpha_2 y'_2 + \ldots, \\ x_2 = \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \ldots, & y_2 = \beta_1 y'_1 + \beta_2 y'_2 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Se $A_i, B_i, \ldots$ sono risp. i coefficienti dei termini generali in $F, \Phi, \ldots$ ed $A'_i, B'_i, \ldots$ i coefficienti dei termini omologhi in $F', \Phi', \ldots$ noi diremo che una funzione razionale

$$R(A_i, B_i, \ldots; x_i, y_i, \ldots)$$

gode della *proprietà invariantiva* se è possibile determinare una funzione razionale $R_1(\alpha_i, \beta_i, \ldots)$ dei coefficienti della sostituzione (1) tale che si abbia

$$R(A'_i, B'_i, \ldots; x'_i, y'_i, \ldots) = R_1(\alpha_i, \beta_i, \ldots) . (A_i, \ldots; x_i, y_i, \ldots)$$

qualunque siano i valori delle $\alpha_i, \beta_i, \ldots$

(¹) Per i teoremi dimostrati in questo § cfr. in generale; Cayley, *Memoirs upon Quantics*. Phil. Trans. 1854-70.— Brioschi, *Monografia dei Covarianti*. Annali di Matematica. Tomo I. II.— Arnhold, *Fundamentale Begründung der Invariantentheorie*. Crelle's Journal. Bd. 62 etc.

70. Se una funzione che gode della proprietà invariantiva non è intera, essa è il quoziente di due funzioni intere che godono della stessa proprietà. Sia infatti

$$R(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..) = \frac{C(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)}{\Gamma(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)}$$

dove C e Γ sono funzioni intere *prime* fra loro. Per supposto si ha:

$$(a) \quad \frac{C(A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..)}{\Gamma(A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..)} = \Psi(\alpha_i, \beta_i, ..) \frac{C(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)}{\Gamma(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)}$$

Poichè in virtù delle (1)

$$(2) \quad F\left(\overset{m_1}{x}, \overset{n_1}{y}, ..\right) = F'\left(\overset{m_1}{x'}, \overset{n_1}{y'}, ..\right), \quad \Phi'\left(\overset{m_2}{x}, \overset{n_2}{y}, ..\right) = \Phi'\left(\overset{m_2}{x'}, \overset{n_2}{y'}, ..\right), ...,$$

le A_i sono evidentemente funzioni lineari delle A'_i con coefficienti che sono funzioni razionali delle $\alpha_i, \beta_i, ...$ e reciprocamente; e precisamente funzioni intere delle $\alpha_i, \beta_i, ..$ divise per una potenza del determinante $(\alpha, \beta ...)$, il così detto *modulo* della sostituzione (1). Lo stesso dicasi delle B_i rispetto alle B'_i etc.

Ciò posto, se in luogo delle $A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ...$ si pongono le loro espressioni nelle $A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..$ si potrà scrivere:

$$(b) \quad \begin{aligned} C(A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..) &= \frac{C'(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..; \alpha_i, \beta_i, ..)}{(\alpha\beta ...)^{h_1}} \\ \Gamma(A'_i, B'_i, ..; x'_i, .. y'_i, .) &= \frac{\Gamma'(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..; \alpha_i, \beta_i, ..)}{(\alpha\beta ...)^{h_2}} \end{aligned}$$

dove C' e Γ' sono funzioni intere; di più C' e Γ' sono nelle $A_i, B_i, ..; x_i, y_i ..$ risp. delli stessi gradi delle C e Γ. Sostituendo in (a) queste espressioni viene

$$\frac{C'(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..; \alpha_i, \beta_i, ..)}{\Gamma'(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..; \alpha_i, \beta_i, ..)} = \frac{\Psi(\alpha_i, \beta_i, ..)}{(\alpha\beta ...)^{h_2 - h_1}} \cdot \frac{C(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)}{\Gamma(A_i, B_i, ... x_i, y_i, ..)}$$
$$= \frac{\Psi'(\alpha_i, \beta_i, ..)}{(\alpha\beta ...)^k} \cdot \frac{C(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)}{\Gamma(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)}$$

dove la funzione intera Ψ' non è divisibile per $(\alpha\beta ...)$. Poichè ora la funzione nel secondo membro è già ridotta alla più semplice espressione, essendo le funzioni C e Γ per ipotesi prime fra loro ed indipendenti dalle $\alpha_i, \beta_i, ..$, e i numeratori e denominatori nei due membri sono risp. delli stessi gradi nelle $A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..$, dovrà esistere una funzione intera $\Psi^0(\alpha_i, \beta_i, ..)$ tale che sia identicamente:

$$C'(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..; \alpha_i, \beta_i, ..) = \Psi' . \Psi^0 . C(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)$$
$$\Gamma'(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..; \alpha_i, \beta_i, ..) = (\alpha\beta ...)^k . \Psi^0 . \Gamma(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)$$

Confrontando colle (b) concludiamo:

$$C(A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..) = \frac{\Psi' \Psi^0}{(\alpha\beta ...)^{h_1}} . C(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)$$
$$\Gamma(A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..) = (\alpha\beta ...)^{k - h_2} . \Psi^0 . \Gamma(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..) \text{ c. d. d.}$$

Dopo ciò possiamo limitarci allo studio delle funzioni *intere* dotate di proprietà invariantiva, che chiameremo in generale *covarianti* [1] del sistema di forme F, Φ, ... (in particolare *invarianti* se non contengono le variabili).

[1] Denominazione introdotta da Sylvester.

71. Se φ è un covariante del sistema F, Φ,... cosicchè:

$$(\alpha)\quad \varphi(A'_i, B'_i,..; x'_i, y'_i,..) = R(\alpha_i, \beta_i,..).\varphi(A_i, B_i,..; x_i, y_i,..)$$

la funzione razionale $R(\alpha_i, \beta_i,..)$ è una potenza intera (positiva o negativa) del modulo $(\alpha\beta...)$ della sostituzione (1) che lega le $x, y,..$ risp. alle $x', y',...$

Esprimendo le $A'_i, B'_i,..: x'_i, y'_i..$ in funzione delle $A_i, B_i,..; x_i, y_i,..,$ possiamo porre come nell'art. prec.

$$\varphi(A'_i, B'_i,..; x'_i, y'_i,..) = \frac{\varphi'(A_i, B_i,..: x_i, y_i,..; \alpha_i, \beta_i...)}{(\alpha\beta...)^h}$$

ed esprimendo invece le $A_i, B_i...; x_i, y_i,..$ in funzione delle $A'_i, B'_i,..; x'_i, y'_i,..;$

$$\varphi(A_i, B_i,..; x_i, y_i,..) = \frac{\varphi''(A'_i\, B'_i,..; x'_i, y'_i,..; \alpha_i, \beta_i,..)}{(\alpha\beta...)^k}$$

dove φ' e φ'' esprimono funzioni intere. Queste due formole combinate con la (α) ci danno risp.

$$(\alpha\beta...)^h.R(\alpha_i, \beta_i,...) = \frac{\varphi'(A_i, B_i,...; x_i, y_i,..; \alpha_i, \beta_i,..)}{\varphi(A_i, B_i,..; x_i, y_i,..)}$$

ed

$$(\alpha\beta...)^k.\frac{1}{R(\alpha_i, \beta_i,...)} = \frac{\varphi''(A'_i, B'_i,..; x'_i, y'_i,..; \alpha_i, \beta_i,..)}{\varphi(A'_i, B'_i,..; x'_i, y'_i,..)}$$

Poichè le quantità

$$A_i, B_i,..; x_i, y_i,..; \alpha_i, \beta_i...$$

possono fissarsi ad arbitrio, indipendentemente le une dalle altre e lo stesso deve dirsi delle quantità

$$A'_i, B'_i,..; x'_i, y'_i,..; \alpha_i, \beta_i,...$$

le funzioni dei secondi membri sono evidentemente funzioni intere delle sole $\alpha_i, \beta_i,..$ giacchè il denominatore non le contiene affatto. Se poniamo dunque

$$R(\alpha_i, \beta_i,...) = \frac{\psi_1(\alpha_i, \beta_i,...)}{\psi_2(\alpha_i, \beta_i,...)}.(\alpha\beta...)^\tau$$

dove ψ_1 e ψ_2 sono due funzioni intere prime fra loro e prime col determinante $(\alpha\beta...)$ vediamo che

$$\frac{\psi_1(\alpha_i, \beta_i,...)}{\psi_2(\alpha_i, \beta_i,...)}(\alpha\beta...)^{h+\tau} \text{ e } \frac{\psi_2(\alpha_i, \beta_i,...)}{\psi_1(\alpha_i, \beta_i,...)}(\alpha\beta...)^{k-\tau}$$

esser debbono *entrambe* funzioni intere delle $\alpha_i, \beta_i,...$

Per le ipotesi fatte circa le ψ_1, ψ_2 ciò non è possibile evidentemente che quando ψ_1 e ψ_2 sono costanti numeriche indipendenti dalle $\alpha_i, \beta_i,...,$ onde concludiamo:

$$R(\alpha_i, \beta_i,...) = C.(\alpha\beta...)^\tau$$

Per determinare il valore di C basta supporre

$$\begin{array}{lll} \alpha_1 = 1, & \alpha_2 = 0, & \alpha_3 = 0,... \\ \beta_1 = 0, & \beta_2 = 1, & \beta_3 = 0,... \\ \gamma_1 = 0, & \gamma_2 = 0, & \gamma_3 = 1,... \\ ..... & ..... & .... \end{array}$$

poichè allora le quantità $A'_i, B'_i,.., x'_i, y'_i,...$ coincidono risp. colle $A_i, B_i,.., x_i, y_i,...$ ed $(\alpha\beta...) = 1$, epperò la relazione generale

$$\varphi(A'_i, B'_i,..; x'_i, y'_i,..) = C.(\alpha\beta...)^\tau.\varphi(A_i, B_i,..; x_i, y_i,..)$$

ci dà immediatamente $C = 1$. c. d. d.

72. Il numero intero positivo o negativo τ che rende soddisfatta la relazione:

(3) $\varphi(A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..) = (\alpha\beta ...)^\tau . \varphi(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)$

suol dirsi il *peso del covariante* $\varphi(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)$,

Se il covariante φ non fosse omogeneo nei coefficienti della forma F, o negli elementi $x_1, x_2, .., x_{\sigma+1}$ della serie di variabili x, esso si potrà sempre decomporre nei suoi gruppi omogenei ciascuno dei quali, al pari dell'intera funzione φ, dovrà per sè stesso soddisfare alla (2), ossia godere esso stesso della proprietà invariantiva. Pertanto ci limiteremo d'ora innanzi a considerare covarianti omogenei nei coefficienti di *ciascuna* forma fondamentale e negli elementi di *ciascuna* serie di variabili.

Se indichiamo con $g_1, g_2, ...$ risp. il grado di φ nei coefficienti delle forme $F\left(\overset{m_1}{x}, \overset{n_1}{y}, ..\right), \Phi\left(\overset{m_2}{x}, \overset{n_2}{y}, ..\right), ...$ e con $\gamma_1, \gamma_2, ..$ risp. il suo grado nelle $x, y, ,..$ il peso di φ è dato da

$$\tau = \frac{\sum_i (m_i + n_i + ..) . g_i - \sum_j \gamma_j}{\sigma + 1}$$

Se infatti si imaginano sostituite nella identità (3) in luogo delle $A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ...$ risp. le loro espressioni nelle $A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ...$ da determinarsi per mezzo delle formole (1) e (2), e si uguagliano quindi fra loro il grado totale delle $\alpha, \beta, ..$ nel primo e nel secondo membro si trova appunto:

$$\sum_i (m_i + n_i + ..) g_i - \sum \gamma_j = \tau . (\sigma + 1)$$

73. Sia φ un covariante qualunque del sistema di forme F, Φ, ...; se alle A_i si dà un incremento arbitrario a_i, le A'_i prenderanno un incremento a'_i, ed evidentemente le a'_i saranno legate alle a_i dalle stesse relazioni lineari che legavano le A'_i alle A_i. Se ora nella relazione fondamentale

$\varphi(A'_i + a'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..) = (\alpha\beta ...)^\tau . \varphi(A_i + a_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)$

eguagliamo fra loro i gruppi di 1° grado negli incrementi a_i otteniamo

$$\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial A'_i} \varphi(A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..) = (\alpha\beta ...)^\tau . \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial A_i} \varphi(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ,,)$$

Ciò è quanto dire che se φ è un covariante di un dato sistema di forme, la somma delle espressioni, che si ottengono derivando φ rispetto ai coefficienti (A_i) di una forma fondamentale F e moltiplicandola per i coefficienti omologhi (a_i) di una nuova forma f simile ad F, è un covariante del sistema dato accresciuto, se già non vi è compresa, della nuova forma f (').

Per simil ragione se ξ e ξ' sono due serie di variabili legate fra loro dalla stessa sostituzione (1) che lega le x alle x' si ha:

$$\sum_i \xi'_i . \frac{\partial}{\partial x'_i} . \varphi(A'_i, B'_i, ..; x'_i, y'_i, ..) = (\alpha\beta ...)^\tau . \sum_i \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(A_i, B_i, ..; x_i, y_i, ..)$$

ossia: se φ è un covariante di un dato sistema di forme e serie di variabili $x, y, ...$, la funzione $D_{x\xi} . \varphi$ è del pari un covariante dello

(') Cfr. Cayley, fourth *Memoir upon Quantics*, Phil. Trans. Vol. 148.

stesso sistema accresciuto, se già non vi è compresa, della serie di variabili ξ.

Se i coefficienti della nuova forma f (o gli elementi della nuova serie ξ) si identifichino ai coefficienti della forma F (risp. agli elementi della serie x) il nuovo covariante ricadrà nel covariante primitivo, a meno di un coefficiente numerico.

74. Essendo σ la specie delle variabili $x, y, z, \ldots$ ogni determinante $(x\, y \ldots v)$ formato con $\sigma + 1$ variabili $x, y, \ldots v$ è un covariante, poichè si ha evidentemente in seguito alla sostituzione (1)

$$(x\, y \ldots v) = (\alpha\beta \ldots)\ (x'\, y' \ldots v')$$

Siffatti covarianti vengono detti *identici* [1], ed un covariante qualunque può sempre farsi dipendere da covarianti identici e da covarianti che contengono *al più* σ serie di variabili, in virtù del teorema seguente:

Se φ è un covariante del sistema di forme fondamentali $F_1(x, y, \ldots)$, $F_2(x, y, \ldots), \ldots.,$ che contiene un numero qualunque di serie di variabili, esso può esprimersi come una funzione razionale ed intera di covarianti identici e di covarianti del tipo $\Delta\varphi'$ dove Δ è un'operazione (art. 3) fra le variabili $x, y, \ldots,$ e φ' è un covariante che contiene al più σ serie di variabili essendo σ la specie delle variabili $x, y, \ldots$

Supponiamo infatti che il covariante $\varphi\ (x, y, \ldots, u, \xi, \eta, \zeta, \ldots)$ contenga oltre alle σ serie di variabili $x, y, \ldots, u$ altre serie di variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; basterà dimostrare che esso può esprimersi in funzione razionale ed intera per mezzo del covariante identico $(xy \ldots u\xi)$ e di derivate di covarianti che contengono le sole serie $x, y, \ldots, u, \eta, \zeta, \ldots.$ poichè allora questi ultimi potranno esprimersi alla lor volta in funzione razionale intera del covariante identico $(xy \ldots u\eta)$ e di derivate di covarianti che contengono le sole serie $x, y, \ldots, u, \zeta, \ldots,$ e così il covariante φ si esprimerà in funzione intera di forme dei due tipi:

$$(xy \ldots . u\xi),\ \Delta \{(xy \ldots, u\eta)\ \varphi'\ (x, y, \ldots u, \zeta, \ldots)\}$$

Ma per ogni operazione elementare D_{pq} si ha:

$$D_{pq} \{(xy \ldots u\, \eta)\ \varphi'\ (xy \ldots u, \zeta, \ldots)\} = \varphi' . \{D_{pq}\,(xy \ldots u\eta)\} + (xy \ldots u\, \eta)\ \{D_{pq}\, \varphi'\}$$

onde è chiaro che alle forme del secondo tipo si potranno sostituire aggregati di forme del tipo $\Delta . (xy \ldots u\, \eta)$, che sono evidentemente covarianti identici, e di forme del tipo $\Delta . \varphi'$, cioè derivate di covarianti che contengono le sole serie $x, y, \ldots, u, \zeta \ldots.$ Su questi si opererà nello stesso modo e così di seguito finchè oltre ai covarianti identici non si avranno che derivate di covarianti fra le sole σ serie $x, y, \ldots u$.

La riduzione in parola si effettua applicando al covariante $\varphi\ (x, y, \ldots, u, \xi, \eta, \zeta, \ldots)$ considerato come funzione delle $x, y, \ldots, u, \xi$ la formola di sviluppo di cui ci siamo occupati al § V. Invero la formola (11) dell'art. 59 ci dice che φ può esprimersi come una somma di termini del tipo $\Delta . \Phi$ dove Δ è un'operazione fra le variabili $x, y, \ldots, u, \xi$ e Φ è una derivata di φ della forma seguente:

$$\Phi\,(x, y, \ldots, u, \xi, \eta, \zeta, \ldots) = (xy \ldots u\xi)^{\varphi} \qquad \Phi_1\,(x, y, \ldots, u, \eta, \zeta, \ldots) .$$

[1] Cfr. Cayley, fourth *Memoir upon Quantics*. Phil. Trans. Vol. 148.

Poichè Φ è una derivata di φ, cioè si ottiene da φ per mezzo di operazioni elementari D_{pq} fra le variabili $x, y, .., u, \xi$, essa sarà al pari di q un covariante del sistema delle $F_1, F_2, ..$ poichè per l'art. prec. le operazioni D_{pq} non tolgono la proprietà invariantiva; e siccome $(x\,y \dots u\,\xi)$ è pure un covariante, il quoziente

$$\frac{\Phi}{(xy \dots u\xi)^\mu}$$

cioè Φ, sarà evidentemente un covariante del sistema delle $F_1, F_2, ..$ Ora si ha, essendo Δ un'operazione propria fra le $x, y, .., u, \xi$:

$$\Delta . \Phi = \Delta \left\{ (xy \dots u\xi)^\mu \, \Phi_1 \right\} = (xy \dots u\xi)^\mu \, \Delta \Phi_1,$$

quindi il covariante φ è esprimibile come una somma di termini dal tipo

$$(xy \dots u\xi)^\mu \left\{ \Delta \Phi_1 \right\}$$

dove Φ_1 è un covariante del sistema delle $F_1. F_2, ..$ che non contiene più la serie di variabili ξ. c. d. d.

75. Se $g_1, g_2, \dots$ sono risp. i gradi del covariante φ nei coefficienti delle forme fondamentali $F_1, F_2, \dots$ e si applica ripetutamente a φ l'operazione dell'art. 73 in modo da introdurre successivamente i coefficienti di altre $g_1 - 1$ forme generali F'_1, $F''_1, \dots, F_1^{(g_1-1)}$ simili ad F, abbassando cioè ogni volta di un'unità il grado di φ nei coefficienti di F, e nello stesso modo procedendo pei coefficienti di F_2, col mezzo di altre $g_2 - 1$ forme generali $F'_2, F''_2, \dots, F_2^{(g_2-1)}$ simili ad F_2 etc. etc., la funzione φ' così ottenuta sarà un covariante del sistema di forme $F_1, F'_1, . F''_1, \dots ; F_2, F'_2, F''_2, \dots ; \dots,$ lineare nei coefficienti di ciascheduna di essa, il quale ricadrà identicamente in φ, a meno di un fattore numerico, appena che le forme $F_1^{(i)}$ si suppongano identiche ad F, le $F_2^{(i)}$ ad F_2 etc.

76. Siamo così condotti a considerare il covariante φ di un sistema di forme $F, \Phi, \dots$ lineare nei coefficienti di ciascuna di esse. Siano $F', \Phi', \dots$ le stesse forme espresse in funzione delle variabili $x', y', \dots$ legate risp. alle $x, y, ..$ dalla sostituzione lineare

$$(3) \qquad \begin{array}{ll} x'_1 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots = \alpha_x, & y'_1 = \alpha_y . \dots \\ x'_2 = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots = \beta_x . & y'_2 = \beta_y, \dots \\ x'_3 = \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \dots = \gamma_x, & y'_3 = \gamma_y, \dots \\ \dots\dots\dots & \dots \end{array}$$

e poniamo simbolicamente (art. 24)

$$F = a_x^m \, b_y^n \dots, \qquad \Phi = c_x^\mu \, d_y^\nu \dots, \qquad \dots\dots$$

$$F' = a'^m_{x'} b'^n_{y'} \dots, \qquad \Phi' = c'^\mu_{x'} d'^\nu_{y'} \dots, \qquad \dots\dots$$

$$\dots\dots$$

Il significato dei simboli $a', b', c', \dots$ si può desumere da quello dei corrispondenti

simboli $a, b, c, \ldots$ e reciprocamente per mezzo della sostituzione lineare

$$
(4)\quad \begin{array}{ll}
a_1 = \alpha_1 a'_1 + \beta_1 a'_2 + \gamma_1 a'_3 + \ldots, & b_1 = \alpha_1 b'_1 + \beta_1 b'_2 + \gamma_1 b'_3 + \ldots, \\
a_2 = \alpha_2 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \gamma_2 a'_3 + \ldots, & b_2 = \alpha_2 b'_1 + \beta_2 b'_2 + \gamma_2 b'_3 + \ldots, \\
a_3 = \alpha_3 a'_1 + \beta_3 a'_2 + \gamma_3 a'_3 + \ldots, & b_3 = \alpha_3 b'_1 + \beta_3 b'_2 + \gamma_3 b'_3 + \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{array}
$$

che si ottiene identificando l'elemento a_x con l'elemento a'_x, dopo aver sostituito in luogo delle x' le loro espressioni (3). Poichè allora in virtù delle sostituzioni (3) e (4) si ha *identicamente*:

$$a_x = a'_{x'},\ a_y = a'_{y'}, \ldots\ b_x = b'_{x'},\ b_y = b'_{y'}, \ldots\ c_x = c'_{x'}, \ldots,$$

si avrà del pari *identicamente*

$$a_x^m b_y^n \ldots = a'^m_{x'} b'^n_{y'} \ldots, \qquad c_x^\mu d_y^\nu \ldots = c'^\mu_{x'} d'^\nu_{y'} \ldots, \quad \ldots\ldots$$

Quindi il valore *effettivo* di un composto simbolico delle $a', b', c', \ldots$ si potrà desumere dal valore *effettivo* del composto delle $a, b, c, \ldots$ in cui esso si trasforma direttamente per mezzo delle sostizioni (4). Se dunque

$$\varphi(\overset{m}{a}, \overset{n}{b}, \ldots, \overset{\mu}{c}, \overset{\nu}{d}, \ldots; \overset{\rho}{x}, \overset{\lambda}{y}, \ldots)$$

è il covariante φ, in cui ai coefficienti delle F, $\Phi, \ldots$ siansi sostituite le loro espressioni simboliche, la relazione:

$$\varphi(\overset{m}{a'}, \overset{n}{b'}, \ldots; \overset{\rho}{x'}, \overset{\lambda}{y'}, \ldots) = (\alpha\beta\gamma\ldots)^h \cdot \varphi(\overset{m}{a}, \overset{n}{b}, \ldots; \overset{\rho}{x}, \overset{\lambda}{y}, \ldots)$$

dovrà convertirsi in un'identità quando alle $a'_i, b'_i, \ldots; x'_i, y'_i, \ldots$ si sostituiscano le loro espressioni in funzione delle $a_i, b_i, \ldots; x_i, y_i, \ldots$ date dalle sostituzioni (2) e (3).

Per maggior semplicità di scrittura metteremo in evidenza una sola serie di simboli ed una sola serie di variabili, scrivendo semplicemente

$$(5)\quad \varphi(a'_1, a'_2, a'_3, \ldots; x'_1, x'_2, x'_3, \ldots) = (\alpha\beta\gamma)^h \cdot \varphi(a_1, a_2, a_2, \ldots; x_1, x_2, x_3, \ldots)$$

Ora dalle (4) si cava:

$$a'_1 = \frac{(a\beta\gamma\ldots)}{(\alpha\beta\gamma\ldots)}, \qquad a'_2 = \frac{(\alpha a\gamma\ldots)}{(\alpha\beta\gamma\ldots)}, \qquad a'_3 = \frac{(\alpha\beta a\ldots)}{(\alpha\beta\gamma\ldots)}, \ldots$$

e anche, introducendo $\sigma + 1$ nuove serie di variabili $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ e ricordando che si ha identicamente

$$(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots) = (\alpha\beta\gamma\ldots)(\xi\eta\zeta\ldots)$$

$$a'_1 = \frac{(a_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)}{(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)},\ a'_2 = \frac{(\alpha_\xi a_\eta \gamma_\zeta\ldots)}{(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)},\ a'_3 = \frac{(\alpha_\xi \beta_\eta a_\zeta\ldots)}{(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)}, \ldots$$

Sostituendo nella (5) tali espressioni delle a' e le espressioui delle x' in funzione delle x date dalla sostituzione (3) abbiamo:

$$\varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots; x_1, x_2, x_3, \ldots)$$
$$= \frac{(\xi\eta\zeta\ldots)^h}{(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta)\ldots)^h} \cdot \varphi\left(\frac{(a_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)}{(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)}, \frac{(\alpha_\xi a_\eta \gamma_\zeta\ldots)}{(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)}, \frac{(\alpha_\xi \beta_\eta a_\zeta\ldots)}{(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)}, \ldots; \alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \ldots\right)$$

e riducendo il secondo membro al comun denominatore $(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)^k$, dove k è un intero positivo, che potrà sempre ritenersi $\gtrless$ del valore assoluto del numero h:

$$(6)\quad \varphi(a_1, a_2, a_3, \ldots; x_1, x_2, x_3, \ldots) = (\xi\eta\zeta\ldots)^h \frac{\psi(\alpha_\xi, \alpha_\eta, \alpha_\zeta, \ldots; \alpha_x, \alpha_y, \alpha_z, \ldots; a_\xi a_\eta a_\zeta, \ldots)}{(\alpha_\xi \beta_\eta \gamma_\zeta\ldots)^k}$$

dove ψ è una funzione *intera* degli elementi che si possono formare colle serie di coefficienti:

$$a,\ b,..,c,\ d,..;\ \ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\dots$$

e colle serie di variabili

$$x,\ y,\ z,\dots;\ \ \xi,\ \eta,\ \zeta,\dots$$

Se poniamo $k-h=k'$ il numero k' sarà intero e positivo e la nostra identità potrà scriversi così:

$$(7)\qquad (\alpha\beta\gamma..)^k.\,(\xi\eta\zeta..)^{k'}.\,\varphi=\psi(\alpha_\xi,\ \alpha_\eta,\ \alpha_\zeta,..;\ \alpha_x,\ \alpha_y,\ \alpha_z,..;\ a_\xi,\ a_\eta,\ a_\zeta,..)$$

77. Nella funzione ψ il grado *totale* nelle a_i, b_i,.., α_i, β_i,... per un *dato* indice i è uguale evidentemente in ogni termine al grado totale nelle x_i, y_i,..., ξ_i, η_i,... A tale proprietà soddisfa anche la funzione $(\alpha_\xi\ \beta_\eta\ \gamma_\zeta..)^k$; quindi, in virtù dell'identità (6), se chiamiamo peso di ogni termine di φ la differenza fra il grado totale dell'indice i in quanto affetta i simboli $a, b, c,\dots$ ed il suo grado totale come indice delle variabili $x, y, z,\dots$, tale peso sarà costante ed uguale a $-h$ per tutti i termini di φ, giacchè i termini di $(\xi\,\eta\,\zeta..)$ hanno il loro peso uguale a -1. Questo peso comune $-h$ coincide col peso del covariante φ definito all'art. 72, $(\tau=-h)$.

78. Se i ed j sono due numeri eguali o distinti della serie $1, 2,\dots, \sigma+1$, la funzione ψ è annullata identicamente (art. 23) dall'operazione:

$$\sum_s s_j\frac{\partial}{\partial s_i}-\sum_q q_i\frac{\partial}{\partial q_j}$$

in cui s rappresenta uno qualunque dei simboli $a, b, c,.., \alpha, \beta, \gamma,\dots$ e q una qualunque delle variabili $x, y, z,.., \xi, \eta, \zeta,\dots$ Il primo membro della identità (7) dovrà dunque del pari essere annullato da quest'operazione, onde

$$(8)\qquad (\xi\eta\zeta..)^{k'}.\sum_s s_j\frac{\partial}{\partial s_i}\Big\{(\alpha\beta\gamma..)^k.\,\varphi\Big\}=(\alpha\beta\gamma..)^k\sum_q q_i\frac{\partial}{\partial q_j}\Big\{(\xi\eta\zeta..)^{k'}.\,\varphi\Big\}$$

Ora si ha:

$$\sum_s s_j\frac{\partial}{\partial s_i}=\sum_{s=\alpha,\beta,\gamma,..} s_j\frac{\partial}{\partial s_i}+\sum_{s=a,b,c,..} s_j\frac{\partial}{\partial s_i}$$

e poichè φ non contiene le $\alpha, \beta, \gamma,..$

$$\sum_{s=\alpha,\beta,\gamma,..} s_j\frac{\partial}{\partial s_i}\Big\{(\alpha\beta\gamma..)^k.\,\varphi\Big\}=\varphi.\Big(\alpha_j\frac{\partial}{\partial\alpha_i}+\beta_j\frac{\partial}{\partial\beta_i}+\gamma_j\frac{\partial}{\partial\gamma_i}+..\Big)(\alpha\beta\gamma..)^k=0$$

oppure $=k.\varphi$ secondochè i ed j sono distinti od uguali.

Similmente, poichè φ non contiene le $\xi, \eta, \zeta\dots$,

$$\sum_{q=\xi,\eta,\zeta,..} q_i\frac{\partial}{\partial q_j}\Big\{(\xi\eta\zeta..)^{k'}.\,\varphi\Big\}=\varphi.\Big(\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_j}+\eta_i\frac{\partial}{\partial\eta_j}+\zeta_i\frac{\partial}{\partial\zeta_j}+..\Big)(\xi\eta\zeta..)^{k'}=0$$

oppure $=k'.\varphi$ secondochè i ed j sono diversi od uguali.

Pertanto la (8) ci dà:

$$(9)\qquad \sum_{s=a,b,c,..} s_j\frac{\partial}{\partial s_i}.\,\varphi=\sum_{q=x,y,z,..} q_i\frac{\partial}{\partial q_j}.\,\varphi\qquad \text{per } i\gtrless j\ (^1)$$

e per $i=j$:

$$(10)\qquad \sum_{s=a,b,c,..} s_i\frac{\partial}{\partial s_i}.\,\varphi=\sum_{q=x,y,z,..} q_i\frac{\partial}{\partial q_i}.\,\varphi-h.\,\varphi.$$

(1) Cfr. Cayley, Crelle's Journal Bd. 47. Philosophical Transactions 1854 pag. 245. Sylvester, Cambridge and Dublin mathematical Journal 1852. Sect. II.

79. Se il numero delle variabili di specie σ contenute nel covariante $\varphi(\overset{\mu_1}{x}, \overset{\mu_2}{y}, \ldots, \overset{\mu_{\sigma+1}}{v})$ non supera $\sigma+1$, i coefficienti dei suoi termini restano completamente determinati appenachè sia dato il coefficiente $A_{\mu_1,0,..,0;\ 0,\mu_2,..,0;\ \ldots;\ 0,0,..,\mu_\sigma}$ del termine che contiene $x_1^{\mu_1} y_2^{\mu_2} \ldots v_{\sigma+1}^{\mu_{\sigma+1}}$.

Sia in generale (posto per brevità $\sigma+1=r$):

$$\varphi = \sum_{h,k,..} \Big\{ A_{h_1h_2..h_r,k_1k_2..k_r,\ldots}\, x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots x_r^{h_r} . y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots y_r^{k_r} \ldots$$

lo sviluppo del covariante φ, cosicchè le $A_{h_1h_2..h_r,k_1k_2..k_r,\ldots}$ sono funzioni razionali intere dei simboli $a, b, c, \ldots$ Se indichiamo per brevità l'operazione $\sum_{s=a,b,..} s_j \frac{\partial}{\partial s_i}$ con Q_{ij}, l'equazione (9) ci dà

$$\sum_{h,k,..} \Big\{ Q_{12} . A_{h_1h_2..,k_1k_2..,\ldots} \Big\} x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots$$

$$= \sum_{h,k,..} A_{h_1h_2..,k_1k_2..,\ldots} \Big\{ h_2 . x_1^{h_1+1} x_2^{h_2-1} \ldots y_1^{k_1} y_2^{k_2} \ldots + k_2 . x_1^{h_1} x_2^{h_2} \ldots y_1^{k_1+1} y_2^{k_2-1} \ldots + \ldots \Big\}$$

ed eguagliando i coefficienti dei termini simili nel 1° e nel 2° membro:

$$\begin{aligned} (11) \qquad & Q_{12} . A_{h_1h_2..,k_1k_2..,l_1l_2..,\ldots} \\ & = (h_2+1) A_{h_1-1,h_2+1,..,k_1k_2..,\ldots} + (k_2+1) A_{h_1h_2..,k_1-1,k_2+1,..,\ldots} + \ldots \end{aligned}$$

Se in questa formola supponiamo:

$$\begin{aligned} & k_1=0, \quad k_2=\mu_2, \quad k_3=0, \ldots, k_r=0 \\ & l_1=0, \quad l_2=0, \quad l_3=\mu_3, \ldots, l_r=0 \\ & \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

i termini del secondo membro a cominciare dal secondo debbono tralasciarsi come privi di senso (perchè avrebbero indici negativi), e resta semplicemente

$$\begin{aligned} & A_{h_1-1,h_2+1,h_3,..,h_r;\ 0,\mu_2,0,..,0;\ 0,0,\mu_3,0,..,0;\ \ldots} \\ & = \frac{1}{h_2+1} . Q_{12} . A_{h_1h_2h_3..h_r;\ 0,\mu_2,0,..,0;\ 0,0,\mu_3,0,..,0;\ \ldots} \end{aligned}$$

Applicando ripetutamente questa formola si ottiene:

$$A_{h_1h_2h_3..h_r;\ 0\mu_20..0;\ 00\mu_30..0;\ \ldots} = \frac{1}{h_2(h_2-1)\ldots 1} . Q_{12}^{h_2} . A_{h_1+h_2,0,h_3,..,h_r;\ 0\mu_20..0;\ \ldots}$$

e affatto similmente operando coll'indice 3 come si è operato coll'indice 2,

$$A_{h_1+h_2,0,h_3,..,h_r;\ 0\mu_20..00;\ \ldots} = \frac{1}{h_3(h_3-1)\ldots 1} . Q_{13}^{h_3} A_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4,..,h_r;\ 0\mu_20\,.0;\ \ldots}$$

onde sostituendo nella formola precedente:

$$\begin{aligned} & A_{h_1h_2h_3..h_r;\ 0\mu_20..0;\ 00\mu_30..0;\ \ldots} \\ & = \frac{1}{\underline{|h_2}\ \underline{|h_3}} . Q_{12}^{h_2}\ Q_{13}^{h_3}\ A_{h_1+h_2+h_3,0,0,h_4..,h_r;\ 0\mu_20..0;\ 00\mu_30..0;\ \ldots} \end{aligned}$$

Così procedendo si otterrà finalmente, poichè $h_1 + h_2 + \ldots + h_r = \mu_1 h_1$

$$A_{h_1 h_2 h_3 .. h_r\,;\; 0\mu_2 0..0\,;\; 00\mu_3 0..0\,;\; .....}$$
$$= \frac{1}{\underline{|h_2}\;\underline{|h_3}\;\ldots\;\underline{|h_r}} \cdot Q_{12}^{h_2}\, Q_{13}^{h_3} \ldots Q_{1r}^{h_r} \cdot A_{\mu_1 0..0\,;\; 0\mu_2 0..0\,;\; 00\mu_3 0..0\,;\; .....}$$

In virtù di questa formola, essendo dato il coefficiente

$$A_{\mu_1 0..0\,;\; 0\mu_2 0..\,;\; 00\mu_3 0..0\,;\; ....}$$

restano determinati i coefficienti del tipo

$$A_{h_1 h_2 \ldots h_r\,;\; 0\mu_2 0..0\,;\; 00\mu_3 0..0} \tag{12}$$

Consideriamo ora un coefficiente del tipo.

$$A_{h_1 h_2 \ldots h_r\,;\; k_1 k_2 \ldots k_r\,;\; 00\mu_3 0..0\,;\; .....} \tag{13}$$

Applicando ad esso la formola (11) dovremo trascurare nel secondo membro tutti i termini a cominciare dal terzo, onde avremo:

$$A_{h_1 h_2 .. h_r\,;\; k_1 - 1, k_2 + 1, k_3, .., k_r\,;\; 00\mu_3 0..0\,;\; .....}$$
$$= \frac{1}{k_2 + 1}\, Q_{12} \cdot A_{h_1 h_2 .. h_r\,;\; k_1 k_2 .. k_r\,;\; 00\mu_3 0..0\,;\; .....}$$
$$- \frac{h_2 + 1}{h_2 + 1} \cdot A_{h_1 - 1, h_2 + 1, h_3, .., h_r\,;\; k_1 h_2 k_3 .. k_r\,;\; 00\mu_3 0..0\,;\; .....}$$

Di qui si vede che la determinazione di un coefficiente del tipo (13) si può far dipendere, con processo successivo, dalla determinazione di coefficienti dello stesso tipo in cui la somma $k_2 + .. + k_r$ va diminuendo di un'unità, quindi finalmente dalle determinazioni dei coefficienti del tipo (12). Ma questi erano già noti, dunque dobbiamo ritenere come noti tutti i coefficienti del tipo (13). Così procedendo verremo evidentemente a stabilire la verità di quanto volevamo dimostrare.

Se il coefficiente dato non fosse $A_{\mu_1 0..0;\; 0\mu_2 0..0;\; 00\mu_3 0..0;\; .....}$ ma un altro *qualsivoglia*, il teorema non sussisterebbe più in generale, cioè gli altri coefficienti non resterebbero con ciò completamente determinati. Solamente nel caso in cui il covariante φ non contenga che una sola serie di variabili x i cofficienti resteranno tutti determinati, in conseguenza della determinazione di uno *qualunque* fra essi ([1]). Ciò segue facilmente dalla (11) che in tal caso prende la forma:

$$A_{h_1 - 1, h_2 + 1, .., h_r} = \frac{1}{h_2 + 1} \cdot Q_{12}\, A_{h_1 h_2 .. h_r}$$

e dalla formola analoga

$$A_{h_1 h_2 .. h_r} = \frac{1}{h_1 - 1} \cdot Q_{12}\, A_{h_1 - 1, h_2 + 1, h_3, .., h_r}$$

le quali ci mostrano che dato l'uno dei due coefficienti:

$$A_{h_1, .., h_i - 1, .., h_j + 1, .., h_r} \qquad \text{ed} \qquad A_{h_1, .., h_i, .., h_j, .., h_r}$$

l'altro resta determinato e reciprocamente.

81. Le equazioni differenziali simboliche (9) si possono tradurre immediatamente in equazioni *alle derivate parziali* del covariante φ rispetto ai coefficienti generali effettivi A_i B_i, .,. delle forme fondamentali, e rispetto alle variabili x_i, y_i, ...

([1]) Cfr. Brioschi l. c.

Siano $F = F' = \ldots$; $\Phi = \Phi' = \ldots$ le forme fondamentali di cui φ è covariante lineare (art. 75). Siano esse rappresentate simbolicamente con

$$F = a_x^m\, b_y^n \ldots , \qquad F' = a'^m_x\, b'^n_y \ldots , \ldots$$

$$\Phi = c_x^\mu\, d_y^\nu \ldots , \qquad \Phi' = c'^\mu_x\, d'^\nu_y \ldots , \ldots$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

ed effettivamente con

$$F = \sum \frac{\underline{|m}}{\underline{|h_1} \ldots \underline{|h_r}} \cdot \frac{\underline{|n}}{\underline{|k_1} \ldots \underline{|k_r}} \ldots A_{h_1 h_2 h_3 \ldots k_1 k_2 k_3 \ldots, \ldots}\, x_1^{h_1} x_2^{h_2} x_3^{h_3} \ldots y_y^{k_1} y_2^{k_2} y_3^{k_3} \ldots\ldots$$

$$\Phi = \sum \frac{\underline{|\mu}}{\underline{|h_1} \ldots \underline{|h_r}} \cdot \frac{\underline{|\nu}}{\underline{|k_1} \ldots \underline{|k_r}} \ldots B_{h_1 h_2 h_3 \ldots k_1 k_1 k_3 \ldots, \ldots}\, x_1^{h_1} x_2^{h_2} x_3^{h_3} \ldots y_1^{k_1} y_2^{k_2} y_3^{k_3} \ldots\ldots$$

cosicchè ciascuno dei prodotti simbolici

$$a_1^{h_1}\, a_2^{h_2}\, a_3^{h_3} \ldots b_1^{k_1}\, b_2^{k_2}\, b_3^{k_3} \ldots\ldots ;\ a'^{h_1}_1\, a'^{h_2}_2\, a'^{h_3}_3\ \ b'^{h_1}_1\ b'^{h_2}_2\ b'^{h_3}_3 \ldots\ldots ; \text{ etc.}$$

rappresenta il coefficiente $A_{h_1 h_2 h_3 \ldots, k_1 k_2 k_3 \ldots, \ldots\ldots}$

Poichè il prodotto simbolico

$$\left\{ a_1^{h_1} a_2^{h_2} \ldots b_1^{k_1} b_2^{k_2} \ldots\ldots \right\} . \left\{ a'^{h'_1}_1\, a'^{h'_2}_2 \ldots b'^{k'_1}_1\ b'^{k'}_2\ \ldots\ldots \right\} . \left\{ a''^{h''_1}_1\ a''^{h''_2}_2 \ldots b''^{k''_1}_1\ b''^{k''_2}_2 \ldots\ldots \right\} \ldots\ldots$$

equivale al prodotto effettivo

$$A_{h_1 h_2 \ldots, k_1 k_2 \ldots, \ldots}\ A_{h'_1 h'_2 \ldots, k'_1 k'_2 \ldots, \ldots}\ A_{h''_1 h''_2 \ldots, k''_1 k''_2 \ldots, \ldots} \ldots\ldots$$

è facile riconoscere che l'espressione simbolica

$$\sum_{s = a, a, \ldots, b, b', \ldots} s_2 \frac{\partial}{\partial s_1}\, \varphi(a, b, \ldots, a', b', \ldots ; c, d, \ldots, c', d', \ldots ; \ldots)$$

in cui s si fa uguale successivamente a tutti i simboli $a, a', a'', \ldots, b, b', b'', \ldots$ relativi alla forma F, equivale all'espressione effettiva

$$\sum_{A_{h_1 h_2 \ldots, k_1 k_2 \ldots, \ldots}} \left\{ h_1 . A_{h_1 - 1, h_2 + 1, \ldots, h_r ;\ k_1 k_2 \ldots k_r ; \ldots} + k_1 . A_{h_1 h_2 \ldots h_r ;\ k_1 - 1, k_2 + 1, \ldots, k_r ; \ldots} + \ldots \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial B_{h_1 h_2 \ldots h_r, k_1 k_2 \ldots k_r, \ldots}}$$

riferita all'espressione effettiva di φ.

Similmente a

$$\sum_{s = c, d, \ldots, c', d', \ldots} s_2 \frac{\partial}{\partial s_1} . \varphi\, (a, b, \ldots, a', b', \ldots ; c, d, \ldots, c', d', \ldots ; \ldots)$$

dovrà sostituirsi

$$\sum_{B_{h_1 h_2 \ldots, k_1 k_2 \ldots, \ldots}} \left\{ h_1 . B_{h_1 - 1, h_2 + 1, \ldots, h_r ;\ k_1 k_2 \ldots k_r ; \ldots} + k_1 . B_{h_1 h_2 \ldots h_r ;\ k_1 - 1, k_2 + 1, \ldots, k_r ; \ldots} + \ldots \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial B_{h_1 h_2 \ldots, k_1 k_2, \ldots, \ldots}}$$

etc. etc. Così l'equazione differenziale simbolica

$$\sum_s s_2 \frac{\partial}{\partial s_1} . \varphi = \sum_q q_1 \frac{\partial}{\partial q_2} . \varphi$$

ed analogamente l'equazione generale (9) si tradurranno nelle corrispondenti equazioni effettive, su di che non ci tratteniamo ulteriormente non avendocene a servire in ciò che segue.

§ VII. *Forma simbolica dei covarianti di un sistema di funzioni fondamentali di più serie di variabili.*

82. Ogni covariante di un sistema di funzioni fondamentali di più serie di variabili di specie σ:

$$F = a_x^m\, b_y^n \ldots = a'^m_x\, b'^n_y \ldots = \ldots ,$$

$$\Phi = c_x^\mu\, d_y^\nu \ldots = c'^\mu_x\, d'^\nu_y \ldots = \ldots ,$$

. . . .

si può esprimere con un aggregato razionale ed intero di forme che appartengono ad uno dei tre tipi seguenti:

1° Determinanti $(pq\ldots)$ formati con $\sigma+1$ serie di variabili.

2° Determinanti $(\alpha\beta\ldots)$ formati con $\sigma+1$ serie di simboli scelte comunque fra le serie $a, b, c, \ldots, a', b', c', \ldots\ldots$

3° Elementi lineari α_q in cui α è uno qualunque dei predetti simboli e q una qualunque delle serie di variabili (¹).

Dopo ciò che si è dimostrato all'art. 75, ci è lecito evidentemente di limitare la dimostrazione al caso di un covariante *lineare* nei coefficienti di ciascuna delle forme fondamentali indipendenti:

$$F = a_x^m\, b_y^n \ldots , \quad \Phi = c_x^\mu\, d_y^\nu \ldots , \ldots\ldots \tag{1}$$

Di più supporremo dapprima che il numero di serie di variabili in esso contenute sia $\overline{\gtrless}\, \sigma+1$.

Sia, come nell'art. 72

$$\varphi(A'_i, B'_i, \ldots; x'_i, y'_i, \ldots) = (\alpha\beta\ldots)^\tau . \varphi(A_i, B_i, \ldots; x_i, y_i, \ldots) \tag{2}$$

la relazione fondamentale cui soddisfa il covariante φ in virtù della sostituzione lineare:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_1 x'_1 + \alpha_2 x'_2 + \ldots \\ x_2 &= \beta_1 x'_1 + \beta_2 x'_2 + \ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3}$$

Distingueremo due casi secondochè $\tau = 0$ oppure $\tau \gtrless 0$.

83. Se Φ è un covariante di peso nullo $(\tau = 0)$ ed il suo grado nelle variabili $x, y, \ldots, v$ sia indicato risp. con $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\sigma+1}$ si ha (art. 72):

$$\rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_{\sigma+1} = m + n + \ldots + \mu + \nu + \ldots + \ldots$$

cioè il grado *totale* nelle $x, y, \ldots$ è uguale al grado *totale* nei simboli $a, b, c, \ldots$ Diciamo che esso è necessariamente compreso nel tipo:

$$\Sigma A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\beta_1\beta_2\ldots\gamma_1\gamma_2\ldots} \cdot a_x^{\alpha_1}\, a_y^{\alpha_2} \ldots a_v^{\alpha_{\sigma+1}}\, b_x^{\beta_1}\, b_y^{\beta_2} \ldots b_v^{\beta_{\sigma+1}}\, c_x^{\gamma_1}\, c_y^{\gamma_2} \ldots c_v^{\gamma_{\sigma+1}} \ldots\ldots \tag{4}$$

(¹) Cfr. Arnhold, Crelle's Journal. Bd. 55. — Clebsch, *Ueber eine symbolische Darstellung* algebraischen Formen. Ib. Bd. 59.

in cui le A sono costanti arbitrarie e la serie di esponenti può prendere i $[\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\sigma+1}; m, n, \ldots, \mu, \nu, \ldots\ldots]$ sistemi di valori che soddisfano alle date condizioni di grado e di peso, cioè:

$$(5)\qquad \begin{array}{ll} \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\sigma+1}=m & \alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\ldots=\rho_1 \\ \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{\sigma+1}=n & \alpha_2+\beta_2+\gamma_2+\ldots=\rho_2 \\ \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{\sigma+1}=\mu & \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \alpha_{\sigma+1}+\beta_{\sigma+1}+\gamma_{\sigma+1}+\ldots=\rho_{\sigma+1}. \end{array}$$

Poichè infatti la forma (4) è evidentemente un covariante, resta soltanto a far vedere che essa ha il dovuto grado di generalità, ed a tale scopo basterà esaminare il coefficiente del termine che contiene:

$$x_1^{\rho_1}\, y_2^{\rho_2} \ldots v_{\sigma+1}^{\rho_{\sigma+1}}$$

giacchè ogni covariante $\varphi\begin{pmatrix}\rho_1 & \rho_2 & & \rho_{\sigma+1}\\ x, & y, & \ldots, & v\end{pmatrix}$ resta perfettamente determinato (art. 79) appenachè sia stato fissato questo coefficiente. Ora questo coefficiente nello sviluppo della forma (4) è evidentemente:

$$(6)\qquad \Sigma\, A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\beta_1\beta_2\ldots\gamma_1\gamma_2\ldots}\cdot a_1^{\alpha_1}\, a_2^{\alpha_2} \ldots a_{\sigma+1}^{\alpha_{\sigma+1}}\, b_1^{\beta_1}\, b_2^{\beta_2} \ldots b_{\sigma+1}^{\beta_{\sigma+1}}\, c_1^{\gamma_1}\, c_2^{\gamma_2} \ldots c_{\sigma+1}^{\gamma_{\sigma+1}} \ldots\ldots$$

e questo è precisamente il tipo più generale per il coefficiente di $x_1^{\rho_1}\, y_2^{\rho_2} \ldots v_{\sigma+1}^{\rho_{\sigma+1}}$ in un covariante di peso nullo. Infatti la serie di esponenti deve soddisfare primieramente alle condizioni relative ai simboli:

$$\begin{array}{c} \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{\sigma+1}=m \\ \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{\sigma+1}=n \\ \gamma_1+\gamma_2+\ldots+\gamma_{\sigma+1}=\mu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Di più affinchè il peso sia nullo deve essere uguale a zero (art. 77) la differenza fra il grado totale di uno stesso indice i in quanto affetta i simboli e del suo grado totale in quanto affetta le variabili, quindi poichè in $x_1^{\rho_1} \ldots x_v^{\rho_{\sigma+1}}$ il grado totale dell'indice i è appunto ρ_i dovrà aversi:

$$(\alpha_i+\beta_i+\gamma_i+\ldots)-\rho_i=0 \qquad i=1, 2, \ldots \sigma+1$$

il che insieme alle condizioni scritte sopra, ricostituisce lo stesso sistema di condizioni (5) cui soddisfano gli esponenti nella forma (4). La forma (6) contiene dunque il debito numero di costanti arbitrarie e rappresenta quindi il coefficiente più generale che possa avere il covariante φ a moltiplicatore di $x_1^{\rho_1} \ldots v_{\sigma+1}^{\rho_{\sigma+1}}$

84. Sia ora $\tau > 0$. Poichè evidentemente in virtù della sostituzione (3):

$$(x' y' \ldots u' v') = (\alpha\beta \ldots)^{-1}. (xy \ldots v)$$

si deduce dalla relazione fondamentale (2) che

$$(x' y' \ldots u' v')^{\tau}. \varphi(A'_i, B'_i \ldots; x'_i, y'_i, \ldots) = (xy \ldots, uv)^{\tau}. (A_i\, B_i, \ldots; x_i, y_i, \ldots)$$

onde si vede che $(xy \dots v) . \varphi$ è un covariante di peso *nullo*. Quindi per ciò che si è dimostrato nell'art. prec. possiamo porre:

$$(xy \dots uv)^{\tau} . \varphi . = \psi (a_x, a_y, \dots, b_x, b_y, \dots)$$

dove ψ è simbolo di funzione intera. Ammettendo per maggior semplicità che il covariante φ contenga al più σ serie di variabili $x, y, \dots u$, la ψ sarà nelle v precisamente del grado τ. Applicando ad essa la formola (14) dell'art. 61, possiamo scrivere:

$$(xy \dots u)^{\tau} . \varphi = \sum_{\mu + \mu_1 + \dots = \tau} \left\{ (xy \dots uv)^{\mu} . \Delta_{\mu_1, \dots, \mu_\sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \right)^{\mu} D_{vy}^{\mu_1} \dots D_{vu}^{\mu_\sigma} . \psi \right\} .$$

Ora i termini della somma nel secondo membro sono tutti nulli ad eccezione del termine che corrisponde al sistema di valori:

$$\mu = \tau, \; \mu_1 = 0, \; \mu_2 = 0, \dots, \mu_\sigma = 0$$

poichè per $\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_\sigma > 0$ si ha evidentemente, essendo φ indipendente da v,

$$D_{vy}^{\mu_1} \dots D_{vu}^{\mu_\sigma} . \psi = D_{vy}^{\mu_1} \dots D_{vu}^{\mu_\sigma} . \left\{ (xy \dots uv)^{\tau} . \varphi \right\}$$

$$= \varphi . \left\{ D_{vy}^{\mu_1} \dots D_{vu}^{\mu_\sigma} . (xy \dots uv)^{\tau} \right\} = 0 .$$

Resta dunque:

$$(xy \dots uv)^{\tau} . \varphi = (xy \dots uv)^{\tau} . \Delta_{0,0,\dots,0} . \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \right)^{\tau} . \psi$$

e dividendo per $(xy \dots uv)^{\tau}$:

$$\varphi = \Delta_{0,0,\dots,0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial y_2} \dots \frac{\partial}{\partial v_{\sigma+1}} \right)^{\tau} . \psi$$

ossia, (art. 39), poichè ψ è un aggregato razionale intero degli elementi lineari $a_x, a_y, \dots, b_x, b_y, \dots$

$$\varphi = \Delta_{0,0,\dots,0} . \sum_{a,b,c,\dots} \left\{ (ab \dots e) \left(\frac{\partial}{\partial a_x} \frac{\partial}{\partial b_y} \dots \frac{\partial}{\partial e_v} \right) \right\}$$

ed ora il secondo membro è appunto un aggregato razionale intero degli stessi elementi $a_x, a_y \dots b_x, b_y, \dots$ che figurano in ψ e di determinanti del tipo $(ab \dots \;)$ c. d. d.

85. Così l'enunciato dell'art. 82 resta stabilito per i covarianti che contengono al più σ serie di variabili. Sia ora φ un covariante contenente un numero qualunque di serie di variabili. Per ciò che si è visto nel § precedente (art. 74) esso può sempre esprimersi in funzione razionale intera di covarianti identici, ossia forme del 1° tipo, e di covarianti del tipo $\Delta . \varphi'$ dove φ' è un covariante che contiene al più σ serie di variabili. Essendo dunque già stato dimostrato che φ' può esprimersi nella forma indicata con elementi del 2° e del 3° tipo, basta osservare che tale forma non è alterata dalle operazioni elementari D_{pq} e quindi neanche dall'operazione Δ per concludere che il covariante φ sarà esprimibile per mezzo di elementi dei tre tipi.

§ VIII. *Riduzione delle equazioni differenziali al minimo numero. Indipendenza delle condizioni lineari date da ciascuna di esse.*

86. Uno dei problemi che più interessano nella teoria dei covarianti è il seguente: essendo date certe funzioni fondamentali di una o più serie di variabili di specie σ, determinare il numero dei covarianti linearmente indipendenti che contengono certe σ serie di variabili $x, y, \ldots, u$ risp. ad un grado dato $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_\sigma$, e che sono parimente di gradi dati nei coefficienti delle forme fondamentali.

Essendo dati i gradi nei coefficienti e nelle variabili, il peso τ di un covariante φ deve pure considerarsi come dato (art. 72). Ora noi diciamo che il numero cercato è anche il numero dei covarianti φ', (di peso nullo), linearmente indipendenti, che sono delli stessi gradi dati nei coefficienti delle forme fondamentali, che sono nelle $\sigma + 1$ serie di variabili $x, y, \ldots, u, v$ risp. dei gradi $\rho_1 + \tau, \rho_2 + \tau, \ldots, \rho_\sigma + \tau, \tau$, e che finalmente soddisfano identicamente alle σ operazioni differenziali:

$$D_{vx} \cdot \varphi' = 0\,, \quad D_{vy} \cdot \varphi' = 0\,, \ldots, \quad D_{vu} \cdot \varphi' = 0 \tag{1}$$

Infatti ad ogni covariante φ di peso τ corrisponde un covariante di peso nullo

$$\varphi' = (xy \ldots uv)^\tau . \varphi \tag{2}$$

che è appunto dei gradi indicati nei coefficienti e nelle variabili e che soddisfa evidentemente alle (1) poichè ps.

$$D_{vx} \left\{ (xy \ldots uv)^\tau . \varphi \right\} = \varphi \,.\, D_{vx} (xy \ldots uv)^\tau = \tau \,.\, \varphi \,.\, (xy \ldots uv)^{\tau - 1} (xy \ldots ux) = 0$$

Reciprocamente se φ' è un covariante di peso nullo, di grado τ nelle v e che soddisfi alle condizioni (1) esso sarà esattamente divisibile (art. 64) per $(xy \ldots uv)^\tau$ che è pure un covariante; quindi il quoziente $\varphi' : (xy \ldots uv)^\tau$ sarà parimenti un covariante che soddisferà alle condizioni imposte nel primo problema, cioè un covariante φ. Dalla (2) risulta poi manifestamente che ad ogni relazione lineare fra i covarianti φ ne corrisponde una simile fra i φ' e reciprocamente, onde il numero dei covarianti *linearmente indipendenti* sarà il medesimo per i due tipi φ e φ'.

87. In ciò che segue supporremo per maggior semplicità che le forme fondamentali contengano una sola serie di variabili di specie σ [1]. Cominciamo dal dimostrare che il numero dei covarianti di peso nullo delle forme fondamentali

$$F_1 = a_x^{m_1} = a'^{m_1}_x = a''^{m_1}_x = \ldots.$$

$$F_2 = b_x^{m_2} = b'^{m_2}_x = b''^{m_2}_x = \ldots.$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

(1) Se le forme fondamentali contenessero più serie di variabili le dimostrazioni che daremo resterebbero sostanzialmente le stesse, e tali pure resterebbero i risultati a meno di una leggera modificazione della funzione numerica.

risp. dei gradi $\mu_1, \mu_2, \ldots$ nei coefficienti delle $F_1, F_2, \ldots$ e dei gradi $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\sigma+1}$, $(\nu_i \gtreqless \nu_{\sigma+1})$ risp. nelle $\sigma+1$ serie di variabili (d specie σ) $x, y, \ldots, u, v$ è dato dal numero partitivo $\left[\binom{\mu_1}{m_1}, \binom{\mu_2}{m_2}, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\sigma+1}\right]$ definito nel § I. (art. 12).

Consideriamo dapprima il covariante di peso nullo φ' come un covariante delle forme indipendenti

$$F_1 = a_x^{m_1},\ F'_1 = a'^{m_1}_x,\ F''_1 = a''^{m_1}_x, \ldots, F_2 = b_x^{m_2},\ F'_2 = b'^{m_2}_x, \ldots\ldots$$

lineare nei coefficienti di ciascuna di esse (art. 75). Il tipo generale di un tal covariante sarà come nell'art. 83.

$$\varphi' = \Sigma A_{\alpha_1\alpha_2..\beta_1\beta_2\ldots\alpha'_1\alpha'_2\ldots} \cdot a_x^{\alpha_1} a_y^{\alpha_2} \ldots b_x^{\beta_1} b_y^{\beta_2} \ldots a'^{\alpha'_1}_x a'^{\alpha'_2}_y \ldots\ldots, \tag{3}$$

conterrà

$$\left[\frac{\mu_1}{m_1}, \frac{\mu_2}{m_2}, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\sigma+1}\right] \tag{4}$$

costanti arbitrarie A, e rappresenterà precisamente altrettanti covarianti linearmente indipendenti, poichè se fra i termini della somma (3) avesse luogo una relazione lineare essa dovrebbe pur sussistere nel caso particolare in cui le $a, b, \ldots, a', b', \ldots, c, d, \ldots$ rappresentassero altrettante serie di coefficienti effettivi fra loro indipendenti, il che è impossibile poichè fra gli elementi lineari di specie σ formati con $\sigma+1$ serie di variabili $x, y, \ldots, v$ ed un numero qualunque di serie di coefficienti arbitrarî $a, b, \ldots, a', b', \ldots, c, \ldots$ non ha luogo alcuna relazione algebrica. Vedi § II. (art. 19).

Supponiamo adesso che i μ_1 simboli $a, a', a'', \ldots$ siano fra loro *equivalenti*, del pari fra loro equivalenti i μ_2 simboli $b, b', \ldots$ e così via; allora il covariante generale di peso nullo φ' non potrà più prendere un numero di valori linearmente indipendenti eguale a $\left[\frac{\mu_1}{m_1}, \frac{\mu_2}{m_2}, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\sigma+1}\right]$, ma un numero più piccolo. Poichè i simboli $a, a', a'', \ldots$ sono equivalenti imaginiamo eseguite nella forma (3) successivamente tutte le permutazioni fra questi simboli e quindi fatta la somma; lo stesso si faccia poi per i simboli $b, b', b'', \ldots$ e così via. È chiaro che avremo così il tipo generale di φ sotto forma di una funzione simmetrica nei simboli equivalenti. Pertanto se tra le $\left[\frac{\mu_1}{m_1}, \frac{\mu_2}{m_2}, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\sigma+1}\right]$ forme monomie di cui si compone la (3) ne trascegliamo una e scancelliamo quelle che si ottengono da essa colla permutazione dei simboli equivalenti, quindi dalle restanti ne trascegliamo un'altra scancellando le sue equivalenti resteranno appunto (Vedi art. 12)

$$\left[\binom{\mu_1}{m_1}, \binom{\mu_2}{m_2}, \ldots; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\sigma+1}\right] \tag{5}$$

forme monomie che moltiplicate per altrettante costanti arbitrarie e sommate ci daranno il tipo più generale di φ' e precisamente col grado di generalità voluto, giacchè se si potessero determinare dei coefficienti numerici $\mu', \mu'', \ldots$ tali da avere fra queste forme monomie una relazione lineare

$$\mu'.\varphi' + \mu''.\varphi'' + \ldots = 0$$

eseguendo in essa le $\underline{|\mu_1}$ $\underline{|\mu_2}\ldots$ permutazioni dei simboli equivalenti se ne dedurrebbe

$$\begin{aligned} &\mu'.(\varphi' + \varphi'_1 + \varphi'' + \ldots) \\ &+\mu''.(\varphi'' + \varphi''_1 + \varphi'' + \ldots) \\ &+ \ldots \ldots \ldots = 0 \end{aligned}$$

e quest'ultima dovrebbe essere una *identità*, cioè sussistere indipendentemente dalla equivalenza dei simboli, in virtù di un principio che dimostreremo a parte, ed allora si concluderebbe $\mu' = 0$, $\mu'' = 0, \ldots$.

88. Il principio ammesso è il seguente: se f è una funzione lineare rispetto a ciascuna delle quantità indipendenti $A, A', A'', \ldots A^{(m-1)}$; $B, B', \ldots, B^{(n-1)}$; .... che si annulla identicamente per $A = A' = \ldots A^{(m-1)}$, $B = B' = \ldots = B^{(n-1)}$; .... la funzione F simmetrica nelle A, simmetrica nelle B, etc., che nasce da f coll'eseguire tutte le permutazioni possibili delle A fra loro, delle B fra loro, e così via e sommare i resultati, sarà nulla *identicamente*, cioè per valori arbitrari delle $A, A', \ldots$, $B, B', \ldots$.

Se infatti si eseguisce su f l'operazione indicata, ogni termine di f che sia di grado α nelle A, di grado β nelle B, etc. ed abbia per coefficiente una costante k, si cangerà in virtù di quest'operazione in $k' . \Sigma_\alpha . \Sigma_\beta \ldots$ dove Σ_α è la somma dei prodotti delle $A, A', A'', \ldots$ combinate α ad α, Σ_β la somma dei prodotti delle B, B', $B'', \ldots$ combinate β a β, e così via. Quindi potremo porre

$$F = \sum_{\alpha,\beta,\ldots} \left\{ k_{\alpha,\beta,\ldots} \Sigma_\alpha . \Sigma_\beta \ldots \right\} \tag{6}$$

Poichè ora f, e quindi anche F, si annulla per ipotesi col porre le $A^{(i)}$ uguali ad A, le $B^{(i)}$ uguali a B, etc., avremo:

$$\sum_{\alpha,\beta,\ldots} \left\{ k_{\alpha,\beta,\ldots} . \binom{m}{\alpha} \binom{n}{\beta} \ldots A^\alpha . B^\beta \ldots \right\} = 0$$

onde evidentemente $k_{\alpha,\beta,\ldots} = 0$, epperò si vede dalla (6) che la F era identicamente nulla c. d. d.

89. Se φ' è il covariante generale considerato all'art. 87, il numero dei covarianti lin. ind. contenuti nel tipo $D_{vx}.\varphi'$ è dato da:

$$\left[\binom{\mu_1}{m_1}, \binom{\mu_2}{m_2}, \ldots ; \nu_1 + 1, \nu_2, \ldots, \nu_\sigma, \nu_{\sigma+1} - 1 \right] \tag{7}$$

Poichè per l'art. 87 il numero ora scritto è quello dei covarianti lin. ind. di peso nullo φ'' che nei coefficienti delle forme F_1, F_2 sono risp. del grado $\mu_1, \mu_2, \ldots$ e nelle variabili $x, y, \ldots, u, v$ risp. del grado $\nu_1 + 1, \nu_2, \ldots, \nu_\sigma, \nu_{\sigma+1} - 1$, e la forma $D_{vx}.\varphi'$ è evidentemente un covariante che soddisfa a tali condizioni, basterà dimostrare che $D_{vx}.\varphi'$ rappresenta il covariante più generala della sua specie, in altri termini che dato un covariante φ'' a piacere si può sempre determinare un covariante φ' per il quale si abbia identicamente

$$\varphi'' = D_{vx} . \varphi'$$

Considerando infatti il covariante dato φ' come funzione delle due variabili x, v poniamo simbolicamente

$$\varphi'' = A_x^m \; B_v^n.$$

Sviluppando secondo le potenze del determinante $(A_x B_v)$ nel modo spiegato al § V avremo identicamente per $m > n$:

$$\varphi'' = \sum_{\mu=0}^{n} k_\mu \, . \, D_{vx}^{m-\mu} \, . \, (A_x B_v)^\mu \, A_v^{m-\mu} B_v^{n-\mu}$$

dove le k_μ sono costanti numeriche, ed anche poichè $m - n > 0$,

$$\varphi'' = D_{vx} \left\{ k_0 D_{vx}^{m-1} . A_v^m \, B_v^n + \ldots . + k_n . D_{vx}^{m-n-1} . (A_x B_v)^n A_v^{m-n-1} \right\}$$

$$= D_{vx} \left\{ \Delta . \varphi'' \right\}$$

essendo Δ una certa operazione fra le variabili v ed x (art. 26). Poichè ora φ'' è un covariante del sistema proposto, $\Delta\varphi''$ lo sarà del pari (art. 73), e sarà del pari di peso nullo poichè le operazioni D_{vx}, D_{xv} di cui si compone Δ non alterano evidentemente il peso. Così resta dimostrato quanto volevamo poichè per il covariante φ'' si ha

$$m = \nu_1 + 1 \, , \qquad n = \nu_{\sigma+1} - 1$$

ed essendo $\nu_{\sigma+1}$ per supposto (art. 87) il più piccolo dei numeri ν_1, ν_2,.. si ha appunto $m > n$.

90. Ora è facile concludere che il numero dei covarianti φ' considerati all'art. 87, che soddisfano all'equazione differenziale $D_{vx} \, \varphi' = 0$ è dato precisamente da:

$$\left[\binom{\mu_1}{m_1}, \binom{\mu_2}{m_2}, \ldots ; \nu_1, \nu_2, .., \nu_{\sigma+1}\right] - \left[\binom{\mu_1}{m_1}, \binom{\mu_2}{m_2}, \ldots ; \nu_1 + 1, \nu_2, \ldots, \nu_\sigma, \nu_{\sigma+1} - 1\right]$$

Infatti essendo il tipo generale di φ' dato dalla forma (3), basterà conoscere il numero delle condizioni *indipendenti* a cui debbono soddisfare le costanti arbitrarie $A_{\alpha_1\alpha_2,..,\beta_1\beta_2,\ldots}$ affinchè sia identicamente $D_{vx} . \varphi' = 0$. Se ora

$$(8) \qquad D_{vx} . \varphi' = \Sigma \, A'_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\beta_1\beta_2} \, a_x^{\alpha_1} \, a_y^{\alpha_2} .. \, b_x^{\beta_1} \, b_y^{\beta_2} \ldots$$

è l'espressione di $D_{vx} . \varphi'$ dedotta direttamente dalla (3) operando su di essa con D_{vx}, cosicchè i coefficienti $A'_{\alpha_1\alpha_2,..,\beta_1\beta_2,\ldots}$ sono combinazioni lineari omogenee delle $A_{\alpha_1\alpha_2,..,\beta_1\beta_2,\ldots}$ si avranno fra le $\left[\binom{\mu_1}{m_1}, \binom{\mu_2}{m_2}, \ldots ; \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{\sigma+1}\right]$ costanti arbitrarie $A_{\alpha_1\alpha_2,\ldots,\beta_1\beta_2,\ldots}$ le $\left[\binom{\mu_1}{m_1}, \binom{\mu_2}{m_2}, \ldots ; \nu_1 + 1, \nu_2, .., \nu_\sigma, \nu_{\sigma+1} - 1\right]$ condizioni lineari omogenee

$$A'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\beta_1\beta_2} = 0$$

e basterà dimostrare che esse sono fra loro indipendenti. Ed invero se esse non lo fossero, si potrebbero, come è noto, moltiplicare i primi membri per delle costanti numeriche $k_{\alpha_1\alpha_2\ldots\beta_1\beta_2\ldots}$ in modo da avere identicamente:

$$\Sigma \, k_{\alpha_1\alpha_2\ldots\beta_1\beta_2\ldots} \, . \, A'_{\alpha_1\alpha_2\ldots\beta_1\beta_2\ldots} = 0$$

ma allora una delle $A'_{\alpha_1\alpha_2\ldots,\beta_1\beta_2\ldots\ldots}$ potrebbe sempre esprimersi linearmente in funzione delle rimanenti e la forma (8) conterrebbe solamente

$$\left[\binom{\mu_1}{m_1},\binom{\mu_2}{m_2},\ldots;\nu_1+1,\ldots,\nu_{\sigma+1}-1\right]-1$$

costanti arbitrarie il che è in contraddizione col grado di generalità dimostrato per queste forme nell'art. prec.

91. Ciascuna delle σ equazioni $D_{vx}=0$, $D_{vy}=0,\ldots$, $D_{vu}=0$ introduce così un numero facilmente determinabile di condizioni *indipendenti* per i coefficienti $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots,\beta_1\beta_2\ldots}$; disgraziatamente però il sistema di condizioni date da una di queste equazioni non è indipendente da quello dato dalle altre, come è facile accertare sopra qualche caso particolare. Quindi se dal numero (5) si sottraggono il numero (7) e gli altri $\sigma-1$ numeri analoghi, il residuo non esprimerà che un *limite inferiore* del numero cercato. Solamente nel caso di $\sigma=1$ questo limite coinciderà col numero cercato poichè in tal caso non si ha che il solo sistema di condizioni lineari dato da $D_{vx}=0$, e queste sono fra loro indipendenti. Risalendo dunque al problema proposto al principio di questo §, vediamo che esso resta risoluto pel caso di variabili binarie come segue: Il numero dei covarianti linearmente indipendenti del sistema di forme

$$F_1\binom{m_1}{x},\ F_2\binom{m_2}{x}\ldots\ldots$$

risp. dei gradi $\mu_1,\mu_2,\ldots$ nei coefficienti di queste forme e del grado ν nelle x è dato da

$$\left[\binom{\mu_1}{m_1},\binom{\mu_2}{m_2},\ldots;\nu+\tau,\tau\right]-\left[\binom{\mu_1}{m_1},\binom{\mu_2}{m_2},\ldots;\nu+\tau+1,\tau-1\right]$$

dove $\tau=\frac{1}{2}\{(m_1\mu_1+m_2\mu_2+\ldots)-\nu\}$ è il peso del covariante [1].

[1] Cfr. la Memoria di Sylvester citata nel prel.re

INDICE DEL VOLUME XII.° SERIE 3.ª

Memorie della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Pubblicazioni della R. Accademia dei Lincei.

Serie 1ª — Atti dell'Accademia pontificia dei Nuovi Lincei. Tomo I-XXIII.
Atti della reale Accademia dei Lincei. Tomo XXIV-XXVI.

Serie 2ª — Vol. I. (1873-74).
Vol. II. (1874-75).
Vol. III. (1875-76) Parte 1ª TRANSUNTI.
2ª MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.*
3ª MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche.*
Vol. V. VI. VII.

Serie 3ª — TRANSUNTI. Vol. I. (1876-77).
» Vol. II. (1877-78).
» Vol. III. (1878-79).
» Vol. IV. (1879-80).
» Vol. V. (1880-81).
» Vol. VI. (1881-82).

MEMORIE *della Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.* Vol. I. disp. 1, 2
» » » » » » » II. » 1, 2.
» » » » » » » III.
» » » » » » » IV.
» » » » » » » V.
» » » » » » » VI.
» » » » » » » VII.
» » » » » » » VIII.
» » » » » » » IX.
» » » » » » » X.
» » » » » » » XI.
» » » » » » » XII.

MEMORIE *della Classe di scienze morali, storiche e filologiche* Vol. I.
» » » » » » » II.
» » » » » » » III.
» » » » » » » IV.
» » » » » » » V.
» » » » » » » VI.
» » » » » » » VII.
» » » » » » » IX.